

# 熱伝達と周期的温度変化を伴う非定常熱伝導

村川 勝弥\*・栗間 諄二\*

## Unsteady Heat Conduction with Heat Transfer and Periodic Temperature Variation

Katsuhisa MURAKAWA and Junji KURIMA

### abstract

In determining the unsteady temperature distribution of a pipe under the boundary condition that the inside surface periodically varies with time and the outside surface accompanies with heat transfer, the analytical investigation is performed in use of five methods.

The all of these analysis are solved by use of the Bessel function. The calculated values for each solution are obtained, and the attentions for the application are considered.

### 1. 緒言

熱機関即ち蒸気機関や内燃機関のシリンダー壁、保温材の層、蒸気パイプ、原子炉の燃料要素被覆や多層円筒で各円筒が密着しているときとか、各円筒間のすきまによる熱抵抗（特に原子炉の燃料要素の被覆とウラン棒との間のすきまによる熱抵抗）などにおいて熱応力、熱衝撃、熱疲労などを考える場合に非定常温度分布が必要となる。その材料内温度分布は、その形状に相当する熱伝導方程式を解く事により理論的に求める事が出来、一番平易な平面座標問題では、無限、半無限物体を軸とし有限迄色々解析されている。ここで取り扱う単層円筒の問題も今迄、数多く取り扱われ、川下<sup>1)</sup>、Özisik<sup>2)</sup> は様々な条件下での解析を行い、その解法は熱伝導方程式への数学的解法として古典的な立場をしめている。又ここ十数年、計算機の普及に伴ない差分法による数値解が研究され、片山ら<sup>3)4)</sup> はこの方法、利点等を発表した。只、差分法による数値解には、時間区分、長さ区分の関係上どうしても大型計算機を必要とする。そこで今回、卓上計算機でも可能な様に、過去の解析法をふまえてベッセル関数を軸として5つの解析を行った。この解析において、内壁の温度は周期的に変化し、外壁では熱伝達が生じるという第1種及び第2種境界条件を採用し初期条件は4つの解法には用いたが、他の1つは存在しない状況で行った。

解析解に著しく異なる2種の材料の数値を入れてその温度分布を求め、その際に必要な数値手法その他から条件に適した解析解を考えた。

### 2. 解析条件

単層円筒に於て、円筒軸方向長さは無限大即ち軸方向には温度変化がないものとして、内壁  $r=r_1$  の位置で温度が周期的に変化し、外壁  $r=r_2$  の位置では熱伝達により熱が移動していると定めると、エネルギー式及び境界条件は以下の様になる。

$$\partial T / \partial \tau = k \{ \partial^2 T / \partial r^2 + (1/r) \partial T / \partial r \} \quad (1)$$

$$(T)_{r=0} = T_0 \quad (2)$$

$$(T)_{r=r_1} = c \sin \omega_0 \tau \quad (3)$$

$$-\lambda (\partial T / \partial r)_{r=r_2} = \alpha (T - T_0)_{r=r_2} \quad (4)$$

ここで次の様な無次元数をとる。

$$r / (r_2 - r_1) = x \quad (T - T_0) / T_0 = \theta$$

$$k \tau / (r_2 - r_1)^2 = t$$

(1)~(4) は (5)~(8) に変わる。

$$\partial \theta / \partial t = \partial^2 \theta / \partial x^2 + (1/x) \partial \theta / \partial x \quad (5)$$

$$(\theta)_{t=0} = 0 \quad (6)$$

$$(\theta)_{x=a} = c \sin \omega t \quad (7)$$

$$-(\partial \theta / \partial x)_{x=b} = h \theta_{x=b} \quad (8)$$

\* 機械工学科

この(5)~(8)を考えるのであるが、熱伝導率  $\lambda$ 、や温度伝導率  $k$  の物性値は温度依存性のない一定値として取り扱う。

### 3. 解析

#### 3.1 解法 1

無次元温度  $\theta$  を(5)式がベッセルの方程式に帰着する事を考えて次のように定める。

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) u_0(\lambda_n x) \quad (9)$$

$$u_0(\lambda_n x) = \{J_0(\lambda_n x)/J_0(\lambda_n a)\} - \{Y_0(\lambda_n x)/Y_0(\lambda_n a)\}$$

ここで固有値  $\lambda_n$  の値は境界条件(8)より求める。

$$\lambda_n \cot \lambda_n + h = 0^{(5)} \quad (10)$$

$\theta$  を求めるには(9)に於て未知関数  $A_n(t)$  を決定すれば良いので、直交関数を考えて(9)は

$$A_n(t) = \int_a^b \theta u_0 x dx / \int_a^b u_0^2 x dx \quad (11)$$

これを  $t$  について微分すると

$$dA_n(t)/dt = \int_a^b (d\theta/dt) u_0 x dx / \int_a^b u_0^2 x dx \quad (12)$$

又  $\int_a^b (d\theta/dt) u_0 x dx$

$$= \int_a^b (\partial^2 \theta / \partial x^2 + \partial \theta / x \partial x) u_0 x dx$$

$$= a f(t) u_0'(a) - \lambda_n^2 \int_a^b \theta x u_0 dx \quad (13)$$

(12) (13) より

$$dA_n/dt + \lambda_n^2 A_n = a f(t) u_0'(a) / \int_a^b u_0^2 x dx$$

この常微分方程式を  $t$  について解くと

$$A_n = \int_0^t a f(\eta) u_0'(a) / \int_a^b u_0^2 x dx \cdot e^{-\lambda_n^2(t-\eta)} d\eta \quad (14)$$

ここで  $\int_a^b u_0^2 x dx$

$$= 2 / [1 + (h/\lambda_n)^2] b^2 u_0^2(b) - a^2 u_1^2(a) = K_n \quad (15)$$

又条件より  $f(t) = c \sin \omega t$  だから

$$\int_a^b e^{-\lambda_n^2(t-\eta)} f(\eta) d\eta = c \{(\lambda_n^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}) / (\lambda_n^4 + \omega^2)\} \quad (16)$$

(15) (16) を(14)に代入して、(9)式で整理すると求める  $\theta$  は

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \{-2a \lambda_n u_1(a) u_0(x)\} / [1 + (h/\lambda_n)^2] b^2 u_0^2(b) - a^2 u_1^2(a) \cdot c \{\lambda_n^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}\} / (\lambda_n^4 + \omega^2) \quad (17)$$

#### 3.2 解法 2

条件の簡易化のため  $u(x, t)$  なる関数を考えて  $\theta$  を次のように置く。

$$\theta = u(x, t) + (b-x)^2 c \sin \omega t \quad (18)$$

(18)により(5)~(8)は次の様になる。

$$\partial u / \partial t = \{\partial^2 u / \partial x^2 + \partial u / (x \partial x)\} + F(x, t) \quad (19)$$

$$u_{t=0} = 0 \quad u_{x=a} = 0$$

$$-(\partial u / \partial x)_{x=b} = h u_{x=b}$$

但し  $F(x, t)$

$$= 2c(1-1/x) \sin \omega t - c\omega(a-x)^2 \cos \omega t$$

(19)式を  $t$  に関してラプラス変換を行うと

$$s \bar{u} = \{\partial^2 \bar{u} / \partial x^2 + \partial \bar{u} / (x \partial x)\} + \bar{F}(x, s) \quad (20)$$

ここで

$$\partial^2 \bar{u} / \partial x^2 + \partial \bar{u} / (x \partial x) = -\lambda_n^2 \bar{u}$$

であり  $\bar{u} = u_0(\lambda_n x)$

$$= \{J_0(\lambda_n x) / J_0(\lambda_n a)\} - \{Y_0(\lambda_n x) / Y_0(\lambda_n a)\}$$

$\lambda_n$  は解法 1 と同様 (10) 式を用いる。

よって(20)式は  $s \bar{u} = -\lambda_n^2 \bar{u} + \bar{F}(x, s)$

$$\therefore \bar{u} = \bar{F}(x, s) / (s + \lambda_n^2)$$

この式に  $\bar{u} x$  を掛けると

$$\bar{u}^2 x = \bar{F}(x, s) \bar{u} x / (s + \lambda_n^2) \quad (21)$$

(21)を  $a \leq x \leq b$  について有限ハンケル変換を行う。

$$\int_a^b \bar{u}^2 x dx = \int_a^b \bar{F}(x, s) \bar{u} x dx / (s + \lambda_n^2)$$

ここで左辺は(15)式であるから

$$K_n = \int_a^b \bar{F}(x, s) \bar{u} x dx / (s + \lambda_n^2)$$

よって

$$s + \lambda_n^2 = \int_a^b \bar{F}(x, s) \bar{u} x dx / K_n$$

これはベッセルの展開型であるので

$$\bar{F}(x, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (s + \lambda_n^2) \bar{u}$$

よって

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \bar{F}(x, s) \bar{u} x dx / \{(s + \lambda_n^2) \cdot K_n\} \quad (22)$$

(22)式を逆ラプラス変換を行う。

$$u = 2c \sum_{n=1}^{\infty} 2u_0(x) \{\lambda_n^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}\} \int_a^b [1 - (b-x)/x] u_0(x) x dx / \{K_n(\lambda_n^4 + \omega^2)\}$$

$$- c\omega \sum_{n=1}^{\infty} 2u_0(x) \{\lambda_n^2 \cos \omega t + \omega \sin \omega t - \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 t}\} \int_a^b (b-x)^2 u_0(x) x dx / \{K_n(\lambda_n^4 + \omega^2)\} \quad (23)$$

(23)を(18)に代入

$$\theta = 2c \sum_{n=1}^{\infty} [2u_0(x) \{\lambda_n^2 \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega e^{-\lambda_n^2 t}\} \int_a^b \{1 - (b-x)/x\} u_0(x) x dx - \omega u_0(x) \{\lambda_n^2 \cos \omega t + \omega \sin \omega t - \lambda_n^2 e^{-\lambda_n^2 t}\} \int_a^b (b-x)^2 u_0(x) x dx] / [1 + (h/\lambda_n)^2] b^2 u_0^2(b)$$

$$-a^2 u_1^2(a)](\lambda_n^4 + \omega^2) \quad (24)$$

### 3.3 解法 3

(5)~(8) を解くために (6) を用いてラプラス変換を行う。

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \mathcal{L}\{\theta\} \quad f(p) = \mathcal{L}\{f(t)\} \\ \phi(p) &= p \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \\ \therefore f(t) &= 1/(2\pi i) \cdot \int_{Br} e^{pt} \phi(p) dp/p \end{aligned} \quad (25)$$

(5) と (6) から

$$\bar{\theta} = A J_0(i\sqrt{p}x) + B Y_0(i\sqrt{p}x) \quad (26)$$

未知定数  $A, B$  を (7) (8) から決定して, (25) を使用すれば, (7) より  $f(p)$  を含む解がえられる。

今  $f(t) = c \sin \omega t$  であるので

$$\begin{aligned} F(q) &= \{h Y_0(q) - q/b \cdot Y_1(q)\} \\ M(aq, bq) &= [h \{J_0(bq) Y_0(aq) - J_0(aq) Y_0(bq)\} \\ &\quad + q \{J_1(bq) Y_0(aq) - J_0(aq) Y_1(bq)\}] \end{aligned}$$

とおくと  $\theta$  は次の様になる。

$$\begin{aligned} \theta &= c(\cos \omega t + i \sin \omega t) J_0(i\sqrt{i\omega}x) F(i\sqrt{i\omega}a) \\ &\quad / \{M(i\sqrt{i\omega}) + c(\sin \omega t + i \cos \omega t) J_0(i\sqrt{-i\omega}x) \\ &\quad F(i\sqrt{-i\omega}a) / \{2M(i\sqrt{-i\omega}) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 t} J_0(\alpha_n x) \{h Y_0(\alpha_n a) - \alpha_n Y_1(\alpha_n a)\} c\omega \\ &\quad / (\alpha_n^4 + \omega^2) + (c/2)(\sin \omega t - i \cos \omega t) Y_0(i\sqrt{i\omega}x) \\ &\quad [1/Y_0(i\sqrt{i\omega}b) - J_0(i\sqrt{i\omega}b) F(i\sqrt{i\omega}a) / \{Y_0 \\ &\quad (i\sqrt{i\omega}b) M(i\sqrt{i\omega})\}] + (c/2)(\sin \omega t \\ &\quad + i \cos \omega t) Y_0(i\sqrt{-i\omega}x) [1/Y_0(i\sqrt{-i\omega}b) \\ &\quad - J_0(i\sqrt{-i\omega}b) F(i\sqrt{-i\omega}a) / \{Y_0(i\sqrt{-i\omega}b) \\ &\quad M(i\sqrt{-i\omega})\}] + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 t} Y_0(\alpha_n x) [1/Y_0(\alpha_n b) \\ &\quad - J_0(\alpha_n b) F(\alpha_n a) / \{Y_0(\alpha_n b) M(\alpha_n)\}] c\omega / (\alpha_n^4 \\ &\quad + \omega^2) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} Y_0(\beta_n x) [1/Y_0(\beta_n b) \\ &\quad - J_0(\beta_n b) F(\beta_n a) / \{Y_0(\beta_n b) M(\beta_n)\}] c\omega / (\alpha_n^4 \\ &\quad + \omega^2) \end{aligned} \quad (27)$$

この式に於て

$\alpha_n \cot \alpha_n + h = 0$  の根が  $\alpha_n$  であり

$Y_0(\beta_n b) = 0$  の根が  $\beta_n$  である。

(27) 式の実数部を採用すれば, 実際に用いる  $\theta$  となる。

### 3.4 解法 4

これは解法 3 に於て時間無限大とした場合の解析で各位置での温度も周期的に変化する事になる。

(27) 式を一般式表示すると

$$\theta = A(x, a, b, \omega) \sin \omega t + B(x, a, b, \omega) \cos \omega t$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n^2 t} a_n(x, a, b, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 t} b_n(x, a, b, \omega)$$

となり, 時間無限大即ち  $t \rightarrow \infty$  の時,  $e^{-\alpha_n^2 t} \rightarrow 0$   $e^{-\beta_n^2 t} \rightarrow 0$  となるので, 時間が大きく経過した後には  $\theta = A \sin \omega t + B \cos \omega t$  が予想される。それ故  $y(x)$  を  $x$  についての未知関数として,  $\theta$  を次の様に定める。

$$\theta = c e^{-i\omega t} y(x) \quad (28)$$

(28) を (5) に代入する。

$$d^2 y/dx^2 + (1/x) dy/dx - i\omega y = 0 \quad (29)$$

これはベッセルの微分方程式であり, その解は

$$\begin{aligned} y &= A I_0(\sqrt{i\omega}x) + B K_0(\sqrt{i\omega}x) \\ &= A \{\text{ber}(\sqrt{\omega}x) + i \text{bei}(\sqrt{\omega}x)\} \\ &\quad + B \{\text{ker}(\sqrt{\omega}x) + i \text{kei}(\sqrt{\omega}x)\} \end{aligned} \quad (30)$$

また境界条件は (8) より

$$-(\partial y / \partial x)_{x=b} = h y_{x=b} \quad (31)$$

(7) より

$$y_{x=a} = -i \quad (32)$$

(30) (31) (32) より定数  $A, B$  を決定する

今,  $(\omega/k)^{1/2} = \varepsilon$ ,  $\varepsilon a = Z_1$ ,  $\varepsilon b = Z_2$

とおき,  $F$  を次の様に定めると定数  $A, B$  は

$$\begin{aligned} F &= \{\varepsilon (\text{ber}' Z_2 + i \text{bei}' Z_2) + h (\text{ber} Z_2 \\ &\quad + i \text{bei} Z_2)\} / \{\varepsilon (\text{ker}' Z_2 + i \text{kei}' Z_2) + h (\text{ker} Z_2 \\ &\quad + i \text{kei} Z_2)\} \end{aligned}$$

$$A = -i / \{(\text{ber} Z_1 + i \text{kei} Z_1) - F(\text{ker} Z_1 + i \text{kei} Z_1)\}$$

$$B = F i / \{(\text{ber} Z_1 + i \text{bei} Z_1) - F(\text{ker} Z_1 + i \text{kei} Z_1)\}$$

よって

$$y(x) = (Z + iW) / (X + iY) \quad (33)$$

ここで  $\varepsilon x = Z_x$  とし

$$X = \varepsilon \{\text{ber} Z_1 \text{ker}' Z_2 - \text{bei} Z_1 \text{kei}' Z_2$$

$$- \text{ker} Z_1 \text{ber}' Z_2 + \text{kei} Z_1 \text{ker}' Z_2$$

$$+ h \{\text{ber} Z_1 \text{ker} Z_2 - \text{bei} Z_1 \text{kei} Z_2$$

$$- \text{ker} Z_1 \text{ber} Z_2 + \text{kei} Z_1 \text{bei} Z_2\}$$

$$Y = \varepsilon \{\text{ber} Z_1 \text{kei}' Z_2 + \text{bei} Z_1 \text{ker}' Z_2 - \text{ker} Z_1 \text{bei}' Z_2$$

$$- \text{kei} Z_1 \text{ber}' Z_2\} + h \{\text{ber} Z_1 \text{kei} Z_2 + \text{bei} Z_1 \text{ker} Z_2$$

$$- \text{ker} Z_1 \text{bei} Z_2 - \text{kei} Z_1 \text{ber} Z_2\}$$

$$Z = \varepsilon \{\text{ber} Z_x \text{kei}' Z_2 + \text{bei} Z_x \text{ker}' Z_2 - \text{ker} Z_x \text{bei}' Z_2$$

$$- \text{kei} Z_x \text{ber}' Z_2\} + h \{\text{ber} Z_x \text{kei} Z_2 + \text{bei} Z_x \text{ker} Z_2$$

$$- \text{ker} Z_x \text{bei} Z_2 - \text{kei} Z_x \text{ber} Z_2\}$$

$$W = \varepsilon \{\text{bei} Z_x \text{kei}' Z_2 - \text{ber} Z_x \text{ker}' Z_2 + \text{ker} Z_x \text{ber}' Z_2$$

$$- \text{kei} Z_x \text{bei}' Z_2\} + h \{\text{bei} Z_x \text{kei} Z_2 - \text{ber} Z_x \text{ker} Z_2$$

$$+ \text{ker} Z_x \text{ber} Z_2 - \text{kei} Z_x \text{bei} Z_2\}$$

(33) 式を (28) 式に代入して実数部をとると

$$\begin{aligned} \theta &= c \sqrt{\{(XZ + YW)^2 + (YZ - XW)^2\} / \{X^2 \\ &\quad + Y^2\}} \cdot \sin(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (34)$$

ここで

$$\tan\delta = (XZ + YW) / (YZ - XW)$$

3.5 解法 5

(5) 式の解をベッセル関数を用いて次のように定める。

$$\theta = \sum_{m=1}^{\infty} b_m u_0(\lambda_m x) e^{-\lambda_m^2 t} \quad (35)$$

但し

$$u_0(\lambda_m x) = (1/2) [ \{ J_0(\lambda_m x) / J_0(\lambda_m a) \} + \{ Y_0(\lambda_m x) / Y_0(\lambda_m a) \} ] \quad (36)$$

(8) と (36) より

$$\lambda_m \tan \lambda_m (a+b) = h \quad (37)$$

(37) で  $\lambda_m$  が決定するので、次に  $b_m$  を求める。

(35) 式に於て  $x=a$  ならば

$$\theta_{x=a} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m e^{-\lambda_m^2 t} = b_1 e^{-\lambda_1^2 t} + b_2 e^{-\lambda_2^2 t} + \dots + b_m e^{-\lambda_m^2 t} + \dots \quad (38)$$

(38) 式の右辺は  $f(t)$  をブローネーの内挿式で展開した型と同じなので、次に  $t$  を等間隔  $t_1, t_2, \dots, t_m$  にとって (38) に代入すれば...

$$f(t_1) = b_1 e^{-\lambda_1^2 t_1} + b_2 e^{-\lambda_2^2 t_1} + \dots + b_m e^{-\lambda_m^2 t_1}$$

$$\vdots$$

$$f(t_m) = b_1 e^{-\lambda_1^2 t_m} + b_2 e^{-\lambda_2^2 t_m} + \dots + b_m e^{-\lambda_m^2 t_m}$$

この連立  $m$  元方程式から  $b_1, b_2, \dots, b_m$  を決定すると (35) より  $\theta$  が求まる。

4. 計算結果

数値計算は解法 3 を除く全てについて行い、外表面即ち  $r=r_2$  での位置での温度分布を円管材料としては熱伝導率の著しく異なった炭素鋼 ( $k=0.036m^2/h$ ) とシャモットレンガ ( $k=0.0012m^2/h$ ) を用いて求めた。

Fig. 1 は  $r_1=0.05m, r_2=0.07m$  の炭素鋼を用いての解法 1, 解法 2, 解法 5 での  $h=0.5$  の温度分布を示している。ここで解法 2 の解 (24) の値を求めるに当り、その積分項は Simpson の 1/3 則の数値積分を用いた。実際には Gauss の数値積分法を用いた方が適切であろう。解法 5 での結果はこのグラフに於ては解

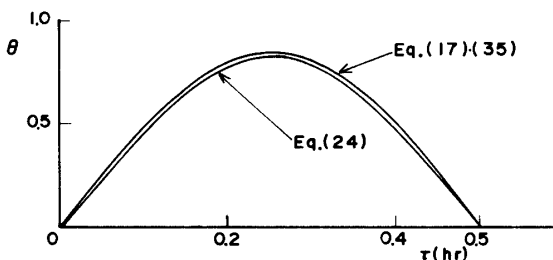


Fig.1 Temperature Profile of Iron  $r_1=0.05m, r_2=0.07m, h=0.5$

法 1 の結果と全く一致しているが、 $\exp(-\lambda_m^2 t)$  の値の変化が  $n$  の増加と共に著しくなり、 $k/(r_2-r_1)^2=90$  の場合、 $\tau=0.1$  で  $(-\lambda_1^2 t) \doteq -0.12, (-\lambda_6^2 t) \doteq -62$  となり数値的に求める事が非常に困難である。この曲線も部分的に行列式を用いて導いたものである。

Fig. 2 は炭素鋼  $r_1=0.05m, r_2=0.10m$  で解法 1 での結果を  $h$  をパラメータとして表したものであり、当然の結果として  $h$  が大きい時、即ち外表面での熱伝達率が大きい時、温度は低くなっている。Fig. 3 は  $r_1=0.07m, r_2=0.10m$  のシャモットレンガで  $h$  を変化させたものであるが、炭素鋼に比して頂点の位置が大きくなっている事が観察される。Fig. 4 は熱伝達率  $\alpha$  を一定 ( $\alpha=8Kcal/m^2h^\circ C$ ) にして円筒厚さを変化させたものである。尚、Fig. 3, Fig. 4 は共に解法 1 での結果である。

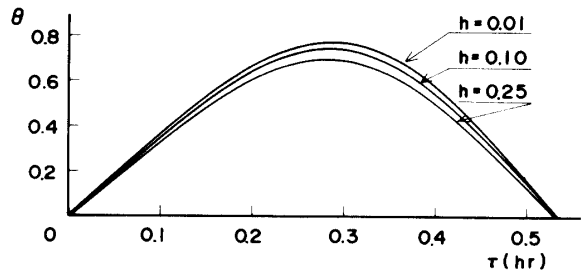


Fig.2 Effects of Bio Number on Temperature Profiles at  $r=r_2$  Iron,  $r_1=0.05m, r_2=0.10m$

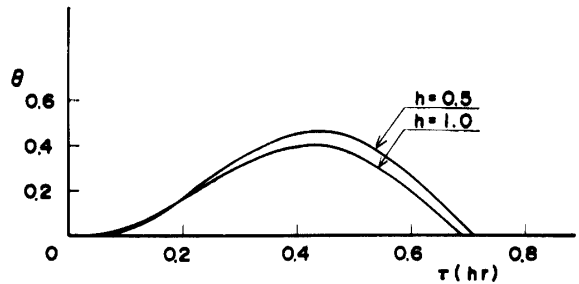


Fig.3 Effects of Bio Number on Temperature at  $r=r_2$  Brick,  $r_1=0.07m, r_2=0.10m$

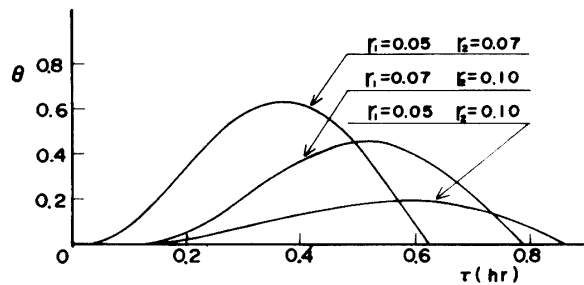


Fig.4 Thickness Effects of Pipe on Temperature Brick,  $\alpha=8kcal/m^2h^\circ C$

又、解法 4 により時間が充分経過してからの値を求めた。この計算でケルビン関数は以下の式を用いた。

$$\text{ber}x = 1 - x^4/(2^2 \times 4^2) + x^8/(2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2) - + \dots$$

$$\text{beix} = x^2/2^2 - x^6/(2^2 \times 4^2 \times 6^2) + x^{10}/(2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2 \times 10^2)$$

$$\text{ker}x = (\log_e 2 - \gamma - \log_e x) \text{ber}x + (\pi/4) \text{beix} - \{1 + (1/2)\} x^4/(2^2 \times 4^2) + \{1 + (1/2) + (1/3) + (1/4)\} x^8/(2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2)$$

$$\text{keix} = (\log_e 2 - \gamma - \log_e x) \text{beix} - (\pi/4) \text{ber}x + x^2/2^2 - \{1 + (1/2) + (1/3)\} x^6/(2^2 \times 4^2 \times 6^2)$$

ここで  $\gamma$  = オイラーの定数 = 0.5772

この結果を他と同様、炭素鋼、シャモットレンガについて円筒厚さと熱伝達率を変化させてえた値を Table. 1 に示す。

Table. 1 Periodic Temperature Variation at  $r=r_2$

物質	$r_1m$	$r_2m$	$\alpha \text{Kcal/m}^2\text{h}^\circ$	振 幅	位相差
炭	0.05	0.07	7	0.9899	0.0065
			70	0.9446	0.0061
			155	0.8898	0.0056
素	0.05	0.10	7	0.9634	0.0220
			70	0.8719	0.0195
			155	0.7726	0.0168
鋼	0.07	0.10	7	0.9851	0.0039
			70	0.9319	0.0032
			155	0.8685	0.0024
シャモットレンガ	0.05	0.07	7	0.5835	0.1325
			15	0.4921	0.1207
	0.05	0.10	7	0.1020	0.3956
			15	0.0879	0.3773
	0.07	0.10	7	0.3464	0.2300
			15	0.2939	0.2108

### 5. 結 言

境界条件、初期条件を与えての4つの解法の中で、解法2は、境界条件を平易にするため  $\theta = u + (b-x)^2 c \sin \omega t$  とおいたが、この為、積分項が解の中に存在し実際の計算上不便であるし、誤差の原因になりやすい。又解法5は前述の如く定数の範囲が非常に広いものとなり、特定の場合、例えば  $k/(r_2-r_1)^2$  が1に近いような時しか、この連立方程式を簡単に解く事が出来ず応用範囲が狭い。この条件下の解法としては、解法1、解法3が適切であるが計算のより単純化を考えると解法1が最適である。

### Nomenclature

- $a$  : 無次元内径
- $b$  : 無次元外径
- $c$  : 定数
- $h$  : ビオ数

- $i$  : 虚数単位  $\sqrt{-1}$
- $k$  : 温度伝導率
- $r$  : 半径
- $r_1$  : 内径
- $r_2$  : 外径
- $s$  : ラプラス変換のパラメータ
- $t$  : 無次元時間 (フーリエ数)
- $u$  : 固有関数
- $u_0$  : "
- $x$  : 無次元半径
- $f(t)$  : " 関数
- $y(x)$  : " "
- $A$  : 定数
- $B$  : "
- $J_0$  : 第0次ベッセル関数
- $J_1$  : 第1次 "
- $Y_0$  : 第0次ノイマン関数
- $Y_1$  : 第1次 "
- $I_0$  : 変形ベッセル関数
- $K_0$  : "
- $T$  : 温度
- $T_0$  : 初期及び周囲温度
- $\text{ber}$  : ケルビン関数
- $\text{bei}$  : "
- $\text{ker}$  : "
- $\text{kei}$  : "

### Greek Letters

- $\alpha$  : 熱伝達率
- $\lambda$  : 円筒の熱伝導率
- $\lambda_m$  : ベッセル関数の固有値
- $\alpha_n$  : "
- $\beta_n$  : "
- $\lambda_n$  : "
- $\theta$  : 無次元温度
- $\tau$  : 時間
- $\omega$  : 周期

### 参 考 文 献

- 1) 川下研介: 熱伝導論, オーム社 (1966) p. 231
- 2) M.N. Özisik: 'Boundary Value Problems of Heat Conduction' Internal Textbook Co., 125 (1968)
- 3) 片山, 齊藤: 日本機械学会論文集 34, 1224 (1968)
- 4) 片山, 齊藤: 日本機械学会論文集 39, 242, (1973)
- 5) H.S. Carslaw, J.C. Jaeger: 'Conduction of Heat in Solid' Clarendon Press, 378 (1947)

(昭和52年4月15日受理)