

半無限垂直平板まわりの非定常自由対流熱伝達の数値解析*

—前縁近傍において有効な解(一様壁温の場合)—

宮本 政英**・西山 修二***

Numerical Solutions of Unsteady Laminar Free Convection on
a Semi-Infinite Vertical Flat Plate—Available Solutions in the Vicinity of
Leading Edge (Constant wall Temperature Case)—

Masahide MIYAMOTO and Shiyuuzi NISHIYAMA

Abstract

Unsteady laminar free convection along a semi-infinite vertical flat plate is treated by the numerical method, which is valid in the vicinity of the leading edge.

The steady state temperature, velocity and local Nusselt number distributions in the vicinity of the leading edge for constant wall temperature and $Pr=0.72, 1.0, 10$ have been calculated and compared with other experimental results for $Pr=0.72$.

Good agreement is found between the present solutions and experimental results.

1. 緒 言

1904年, Prandtlは流体摩擦を理論的に解析する方法として境界層理論を導き流体工学において理論と実験の二つの分野が結合する点を示した。

1930年, Schmidt-Beckmann¹⁾により自由対流にも境界層の考えが適用できることが実証され, 以来種々の条件について境界層方程式を解くことが試みられ, 現在我々は自由対流に関して豊富な知識をもつようになった。だが物体の前縁近傍では境界層方程式はもはや成立しなくなることが知られている。²⁾

本報では一様壁温のもとに前縁より下方にも流体があり, 温度変化が上流にもおよぶとし, 境界層方程式において無視された垂直方向の拡散項を, 境界層方程式に加えた基礎式を数値的に解くことにより, 前縁近

傍の温度場, 速度場および局所熱伝達率の特性を明らかにすることを試みた。本数値解の妥当性を検討するため, $Pr=0.72$ に関して, 対流空間の差分格子の大きさおよび数値計算を実行する範囲を種々変えた計算を実行し比較してある。又比較のため前縁より下方には流体が存在せず温度変化がおよばない場合についても数値計算を実行した。本数値解の結果は速度場, 温度場において Schmidt-Beckmann¹⁾による実測値の結果とよく一致し, 前縁近傍においても有効かつ精度の高い自由対流熱伝達の数値解の手段が得られていると思われる。

2. 主要な記号

α : 温度伝導率 $=\lambda/\rho C_p$ [m^2/s]

C_p : 定圧比熱 [$Ws/(kg \cdot K)$]

g : 重力加速度 [m/s^2]

i : X軸方向網目分割番号

I : X軸方向網目分割数

j : Y軸方向網目分割番号

* 昭和51年5月, 第13回日本伝熱シンポジウムにおいて講演

** 機械工学科

*** 大学院機械工学専攻

- J ; Y 軸方向網目分割数
- Nu_x ; 局所ヌセルト数 $= \alpha_x x / \lambda$
- Pr ; プラントル数 $= \nu / a$
- t ; 時間 [s]
- T ; 温度 [K]
- u ; 鉛直方向速度
- v ; 水平方向速度
- U ; 無次元鉛直方向速度, 式(8)で定義
- V ; 無次元水平方向速度, 式(9)で定義
- X ; 無次元鉛直方向座標, 式(6)で定義
- Y ; 無次元水平方向座標, 式(7)で定義
- α ; 熱伝達率 [W/(m²·K)]
- α_x ; 局所熱伝達率 [W/(m²·K)]
- β ; 体膨張係数 [1/K]
- ΔT ; 温度差 $= T_w - T_\infty$ [K]
- $\Delta \tau$; 時間差分
- ΔX ; X 方向差分
- ΔY ; Y 方向差分
- θ ; 無次元温度 式(11)で定義
- λ ; 熱伝導率 [W/(m·K)]
- ν ; 動粘性係数 [m²/s]
- τ ; 無次元時間 式(10)で定義
- ρ ; 密度
- 添字
- w ; 伝熱面
- ∞ ; 伝熱面から無限遠

その数値解法

3.1 基礎方程式と境界条件

Fig. 1 に物理モデルとその座標を示す, 連続流体の微少要素に質量, 運動量および熱エネルギーの保存則を適用すると, 各々次に示す, 連続の方程式, 運動量方程式, エネルギー方程式が得られる.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g\beta(T - T_\infty) + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

(2), (3)式において下線を施した項が, 境界層近似の成立する境界層方程式に新たにつけくわえた垂直方向の拡散項であり, 他の圧力等の高次の項は無視されている.

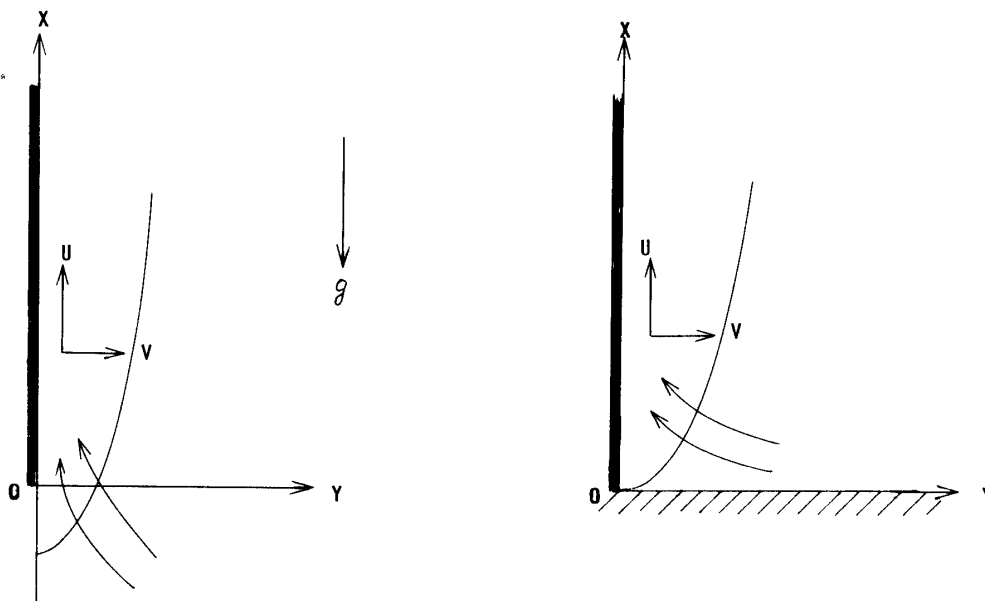
境界条件は Fig. 1, (a), (b) を各々 B.C. (Boundary Condition) 1, B.C. 2 と定め後においてもこれに従う. 境界条件はそれぞれ次のようになる.

(a) B.C. 1 の場合

$$\left. \begin{aligned} &t > 0, \\ &x = -\infty; u = 0, v = 0, T = T_\infty \\ &x \geq 0, y = 0; u = 0, v = 0, T = T_w \\ &x < 0, y = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, v = 0 \\ &y = \infty; u = 0, T = T_\infty \\ &t \leq 0, u = 0, v = 0, T = T_\infty \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

(b) B.C. 2 の場合

3. 非定常自由対流の基礎方程式と境界条件および



(a) Boundary Condition 1

(b) Boundary Condition 2

Fig.1 Physical model and coordinate system.

$$\left. \begin{aligned}
 t > 0, \\
 x = 0; u = 0, v = 0, T = T_\infty \\
 y = 0; u = 0, v = 0, T = T_w \\
 y = \infty; u = 0, T = T_\infty \\
 t \leq 0, \\
 u = 0, v = 0, T = T_\infty
 \end{aligned} \right\} (5)$$

基礎式を無次元化⁶⁾ するため次の無次元量を定義する。

$$X = \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu^2} \right)^{1/3} x, \quad (6) \quad Y = \left(\frac{g\beta\Delta T}{\nu^2} \right)^{1/3} y, \quad (7)$$

$$U = \frac{u}{(\nu g\beta\Delta T)^{1/3}}, \quad (8) \quad V = \frac{v}{(\nu g\beta\Delta T)^{1/3}}, \quad (9)$$

$$\tau = \frac{(g\beta\Delta T)^{2/3} t}{\nu^{1/3}}, \quad (10) \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} \quad (11)$$

これらの無次元量を用いて基礎式(1)から(3)を無次元化すると次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \theta + \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (14)$$

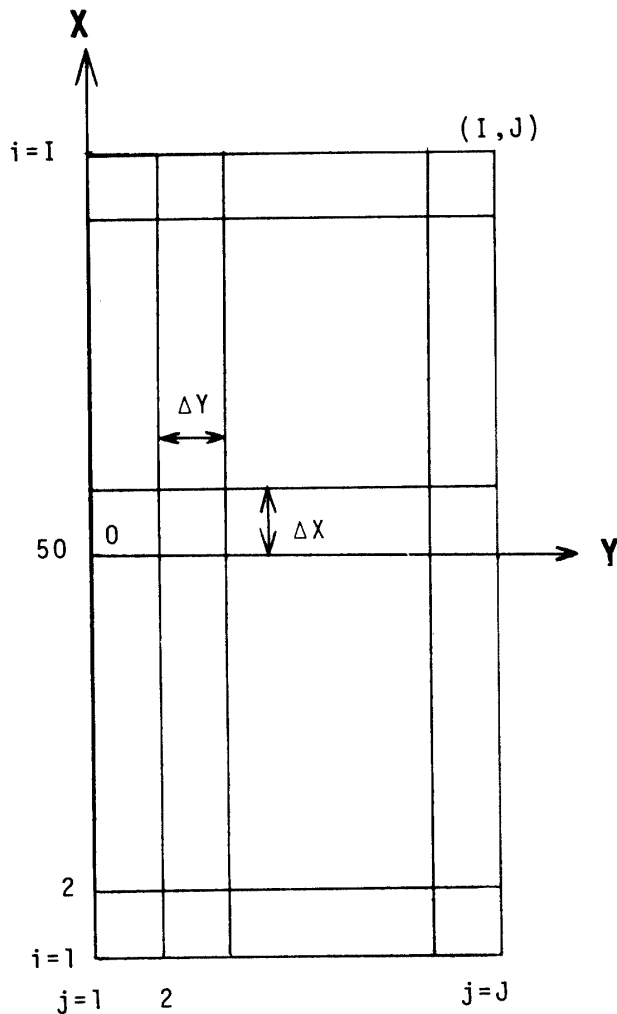
境界および初期条件を無次元化すると次のようになる。

(a) B.C. 1 の場合

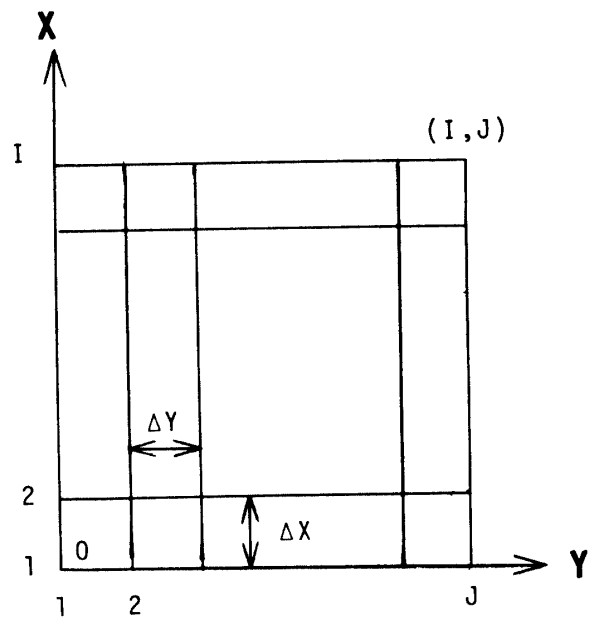
$$\left. \begin{aligned}
 \tau > 0, \\
 X = -\infty; U = V = \theta = 0 \\
 X \geq 0, Y = 0; U = V = 0, \theta = 1 \\
 x < 0, Y = 0; \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, V = 0 \\
 Y = \infty; U = \theta = 0 \\
 \tau \leq 0, \\
 U = V = \theta = 0
 \end{aligned} \right\} (15)$$

(b) B.C. 2 の場合

$$\left. \begin{aligned}
 \tau > 0, \\
 X = 0; U = V = \theta = 0 \\
 Y = 0; U = V = 0, \theta = 1 \\
 Y = \infty; V = \theta = 0 \\
 \tau \leq 0, \\
 U = V = \theta = 0
 \end{aligned} \right\} (16)$$



(a) Boundary Condition 1



(b) Boundary Condition 2

Fig. 2 Schematic diagram of finite difference network.

3.2 基礎方程式の数値解法

無次元化された基礎式を、対流空間を格子に区切って偏微分方程式を差分方程式に弛緩しそれを数値的に

解くことを試みる⁴⁾。本解法は Hellums-Churchill⁵⁾らの手法を拡張したものであり、まず対流空間を Fig. 2 に示すように格子に分割する。X, Y 方向格子間隔を ΔX, ΔY とし、非線型項は風上差分を用いると、

$$(12) \text{式より} \quad \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta X} + \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta Y} = 0 \quad (17)$$

$$(13) \text{式, (14)式より} \quad \begin{aligned} \frac{U'_{i,j} - U_{i,j}}{\Delta \tau} &= -U_{i,j} \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{\Delta X} - V_{i,j} \frac{U_{i,j+1} - U_{i,j}}{\Delta Y} + \theta'_{i,j} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} \\ &+ \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\theta'_{i,j} - \theta_{i,j}}{\Delta \tau} &= -U_{i,j} \frac{\theta_{i,j} - \theta_{i-1,j}}{\Delta X} - V_{i,j} \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}}{\Delta Y} + \frac{1}{Pr} \\ &\left[\frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{(\Delta Y)^2} + \frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{(\Delta X)^2} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

ここに ' のついた項は Δτ 時間後の値を示す。(19)式より

$$\begin{aligned} \theta'_{i,j} &= \left[-U_{i,j} \frac{\Delta \tau}{\Delta X} + V_{i,j} \frac{\Delta \tau}{\Delta Y} - \frac{2\Delta \tau}{Pr(\Delta Y)^2} - \frac{2\Delta \tau}{Pr(\Delta X)^2} \right] \theta_{i,j} + \left[U_{i,j} \frac{\Delta \tau}{\Delta X} + \frac{\Delta \tau}{Pr(\Delta X)^2} \right] \theta_{i-1,j} \\ &+ \left[V_{i,j} \frac{\Delta \tau}{\Delta Y} + \frac{\Delta \tau}{Pr(\Delta Y)^2} \right] \theta_{i,j+1} \\ &+ \left[\frac{\Delta \tau}{Pr(\Delta Y)^2} \right] \theta_{i,j-1} + \left[\frac{\Delta \tau}{Pr(\Delta X)^2} \right] \theta_{i+1,j} \end{aligned}$$

最大原理⁵⁾より θ_{i,j}, θ_{i-1,j}, θ_{i,j+1}, θ_{i,j-1}, θ_{i+1,j} の係数

がゼロ又は正でなければならないから、時間差分 Δτ は次の制限をうける。

$$\frac{U}{\Delta X} + \frac{|V|}{\Delta Y} + \frac{2}{Pr} \left[\frac{1}{(\Delta X)^2} + \frac{1}{(\Delta Y)^2} \right] \leq \frac{1}{\Delta \tau} \quad (20)$$

同様に(18)式より

$$\frac{U}{\Delta X} + \frac{|V|}{\Delta Y} + 2 \left[\frac{1}{(\Delta X)^2} + \frac{1}{(\Delta Y)^2} \right] \leq \frac{1}{\Delta \tau} \quad (21)$$

Pr < 1 のときは(20)式, Pr ≥ 1 のときは(21)式を用いる ΔX, ΔY を適当に選び⁵⁾ 最大速度は Ostrach³⁾ より見積り(20), (21)式より Δτ を決定した。局所ヌセルト数は次式で算出してある。

$$\begin{aligned} Nu_x &= -X \frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} \\ &= -\frac{(i-1)\Delta X}{12\Delta Y} \left[-25 + 48\theta_{i,2} - 36\theta_{i,3} + 16\theta_{i,4} - 3\theta_{i,5} \right] \end{aligned} \quad (22)$$

4. 数値計算の結果と考察

本数値計算は九州大学大型計算機センター FACOM 230-75 を使用し、各プラントル数について約 8 分の計算時間を要した。

Table 1, Table 2, は Pr = 0.72 のときのそれぞれ対流空間での格子差分の大小の影響および計算領域の影響を定常局所ヌセルト数について調べたものである。実行された範囲の領域の差では、局所ヌセルト数の差は小さく数値計算を実行する際に、前縁より下方に考慮すべき領域は X = -30 で十分であることがわかる。

Table 1 Comparisons of steady state Nusselt numbers, Pr = 0.72, Tw = const., I × J = 100 × 50.

ΔX	1.0	1.0	1.5	similar solution (Ostrach)
ΔY	0.5	1.0	1.0	
Δτ	0.04	0.07	0.09	
τ/X ^{1/2}	9	9	9	steady state
X	Nux/X ^{3/4}	Nux/X ^{3/4}	Nux/X ^{3/4}	0.3568
15	0.3556	0.3559	0.3561	
20	0.3556	0.3561		
30	0.3560	0.3567	0.3568	
40	0.3564	0.3571		
45	0.3566	0.3573	0.3575	
50	0.3567	0.3574		
75			0.3581	

Table 2 Comparisons of steady state Nusselt Numbers, $Pr=0.72$, $T_w=const.$, $I \times J=100 \times 50$, $\Delta X=1.0$, $\Delta Y=0.5$, $\tau=67.50$, flat plate at $Y=0$, $X \geq 0$.

X	Nux/X ^{3/4}			Ostrach
	-30 ≤ X ≤ 70	-50 ≤ X ≤ 50	-70 ≤ X ≤ 30	
5	0.36065	0.36065	0.36065	0.3568
10	0.35659	0.35660	0.35660	
15	0.35571	0.35572	0.35572	
20	0.35560	0.35560	0.35560	
25	0.35571	0.35571	0.35571	
30	0.35589	0.35590	0.35565	
35	0.35609	0.35609		
40	0.35627	0.35628		
45	0.35644	0.35644		
50	0.35659	0.35651		
55	0.35672			
60	0.35683			
65	0.35693			
70	0.35697			

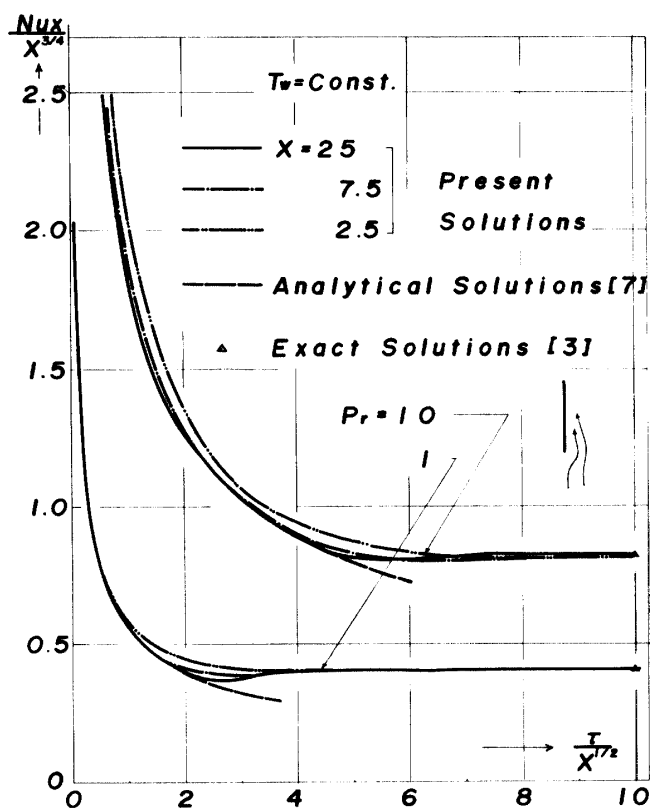


Fig.3 Transient local Nusselt number at X=2.5, 7.5 and 25.

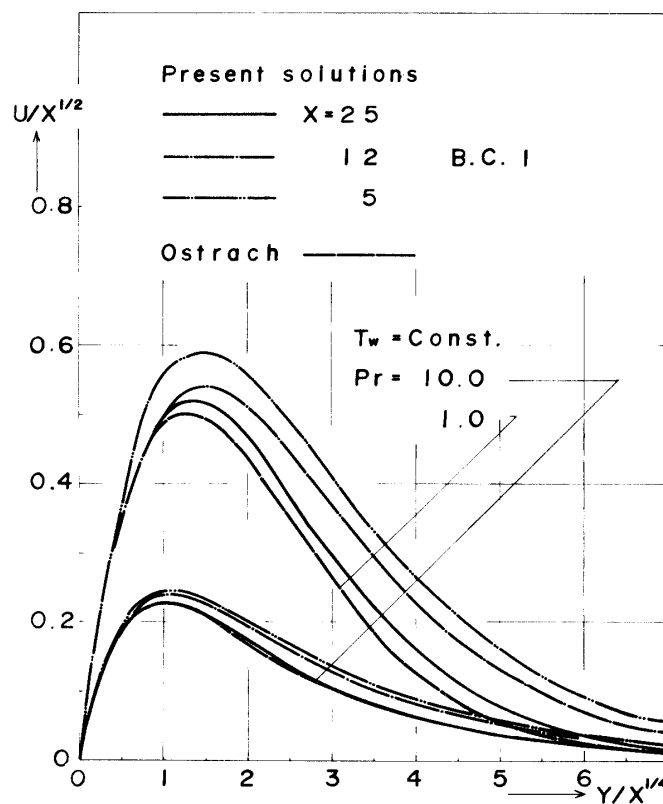


Fig.4 Steady state local velocity profiles at $X=5, 12, 25$ and for $Pr=1.0, 10$.

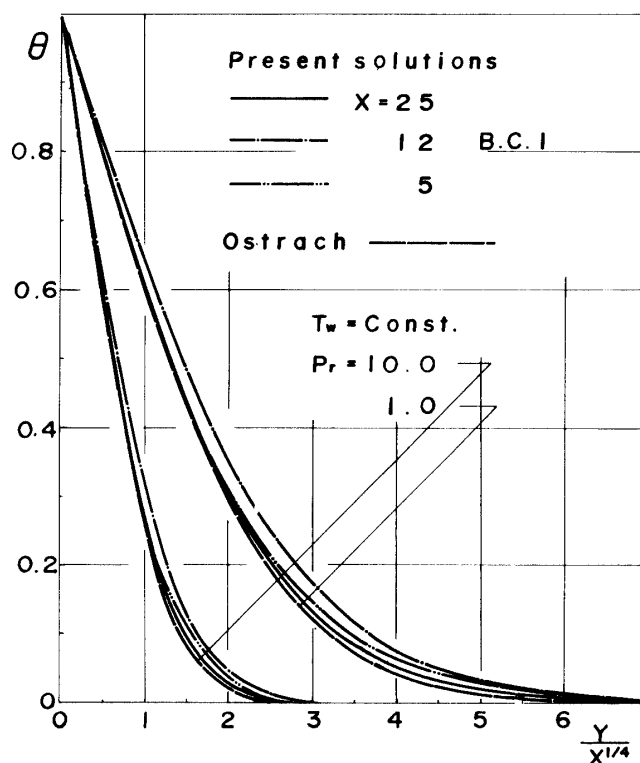


Fig.5 Steady state local temperature profiles at $X=5, 12, 25$ and for $Pr=1.0, 10$.

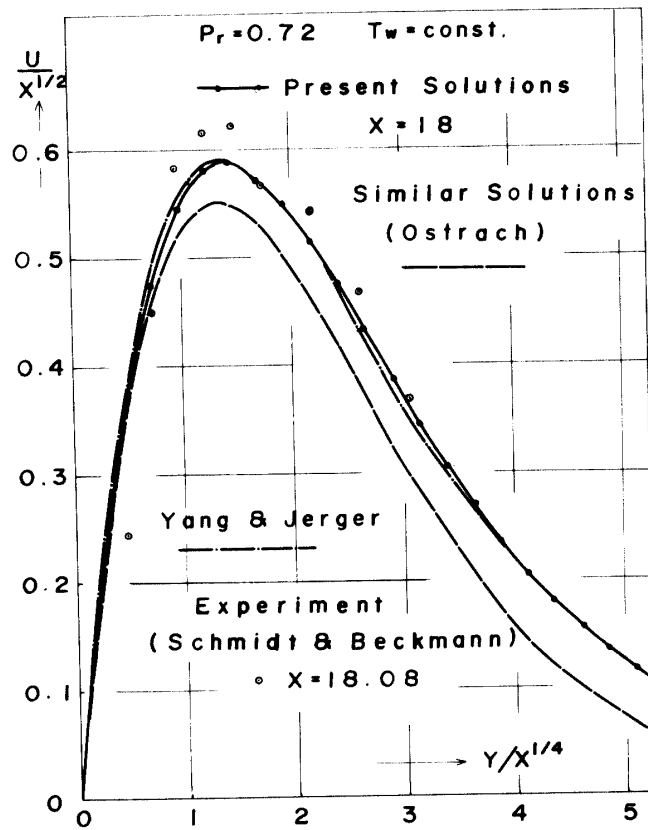


Fig.6 Comparisons of local velocity profiles for $X=18$, $Pr=0.72$ between the present solutions and other experimental and theoretical results.

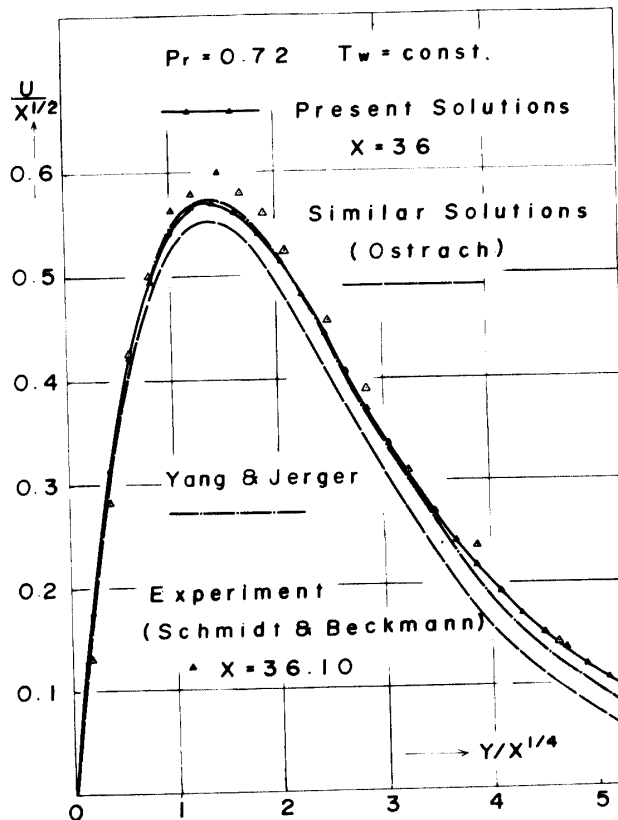


Fig.7 Comparisons of local velocity profiles for $X=36$, $Pr=0.72$ between the present solutions and other experimental and theoretical results.

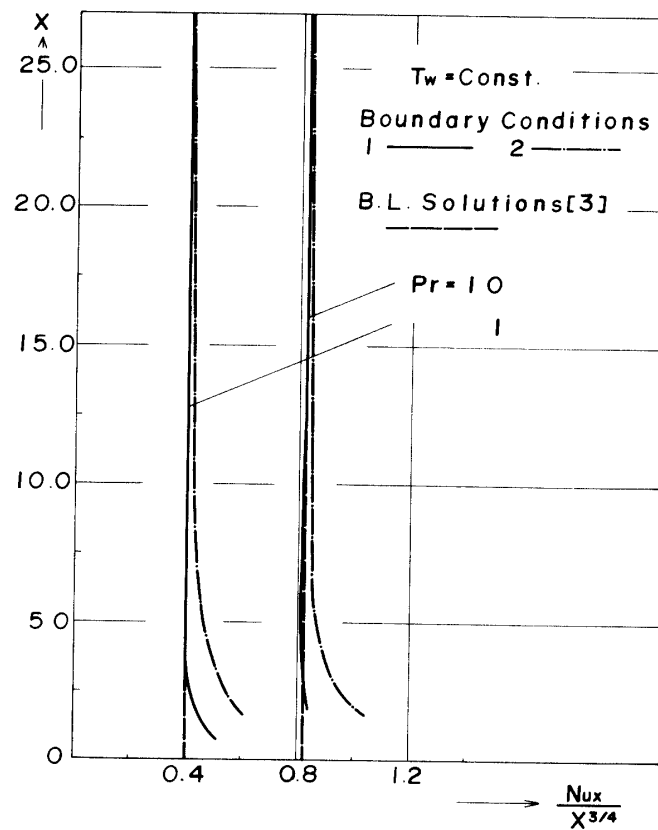


Fig.8 Steady state local Nusselt number distributions.

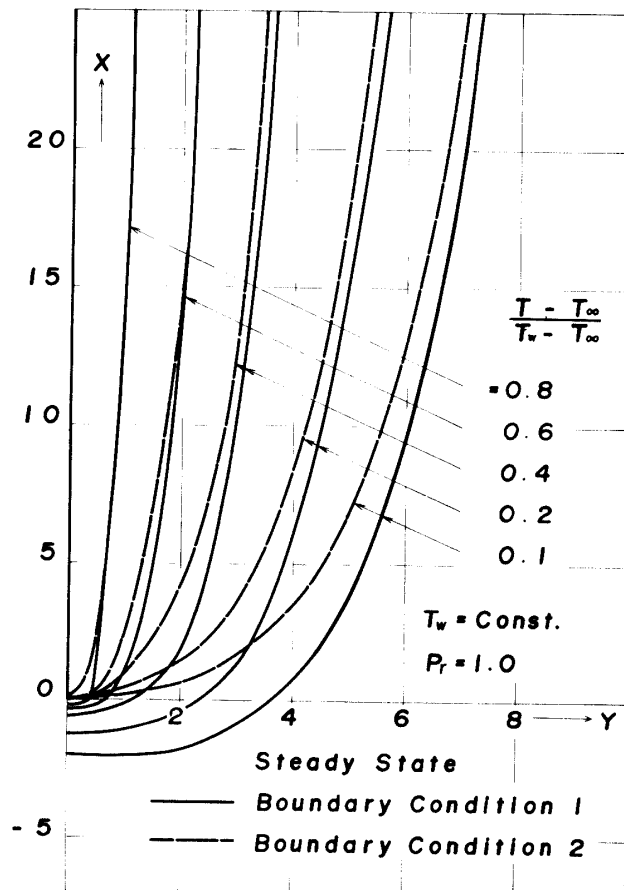


Fig.9 Steady state isotherms in the vicinity of leading edge for $Pr=1.0$.

Hellums-Churchill⁶⁾ は一様壁温の場合には $U/X^{1/2}$, $VX^{1/4}$, θ は $Y/X^{1/4}$, $\tau/X^{1/2}$, と Pr の関数として, $Nux/X^{3/4}$ は $\tau/X^{1/2}$ と Pr の関数としてあらわされることを指摘している. 本報ではこれらの無次元数を用いてグラフの整理を行なった. 以下グラフについての説明を行なう.

Fig. 3 は B.C.1 における局所ヌセルト数の時間的変化を示す. 伝熱面下端の位置に近づく程 overshoot 現象が減少する.

Fig. 4, Fig. 5 は X の各位置での定常状態速度および温度分布を表わす. Fig. 6, Fig. 7 は定常状態の速度分布を $Pr=0.72$ について, Schmidt-Beckmann¹⁾ の実験および, Yang-Jerger²⁾ の摂動解と比較したものである. $X=18$ は Schmidt-Beckmann の実験すなわち $T_w=67.7^\circ\text{C}$ として $T_\infty=14.8^\circ\text{C}$ において, 12cm の高さの伝熱面の下端より 1cm の位置に相当し, 境界層前縁近傍においても実験値とよく一致している.

Fig. 8 は定常状態局所ヌセルト数の伝熱面の高さ方向の変化を表わす. Fig. 9 は定常状態, $Pr=1.0$ の場

合の等温線分布を表わす.

B.C.1 では $X=-2$ くらいまで 10% の温度変化がおよんでいる.

Fig. 10 と Fig. 11 は定常状態, $Pr=1.0$, 10 における流线分布を示す. 局所グラスホフ数が大きくなるにつれて流线の間隔はせまくなり, 伝熱面に平行になり境界層を形成し水平方向速度成分は垂直方向速度成分に比較して小さくなる.

5. 結 言

半無限垂直平板による非定常自由対流を数値解析し前縁近傍の特性を明らかにすることを試み, 得られた結果をとりまとめると次のようになる.

- 1) 計算範囲を種々変えて計算を実行し, 前縁より下方には $X=-30$ 程度以上であれば局所ヌセルト数は範囲のとりかたによつてほとんど変化しないことを示した.
- 2) 伝熱面より下方の定常流動状態, 温度分布を調

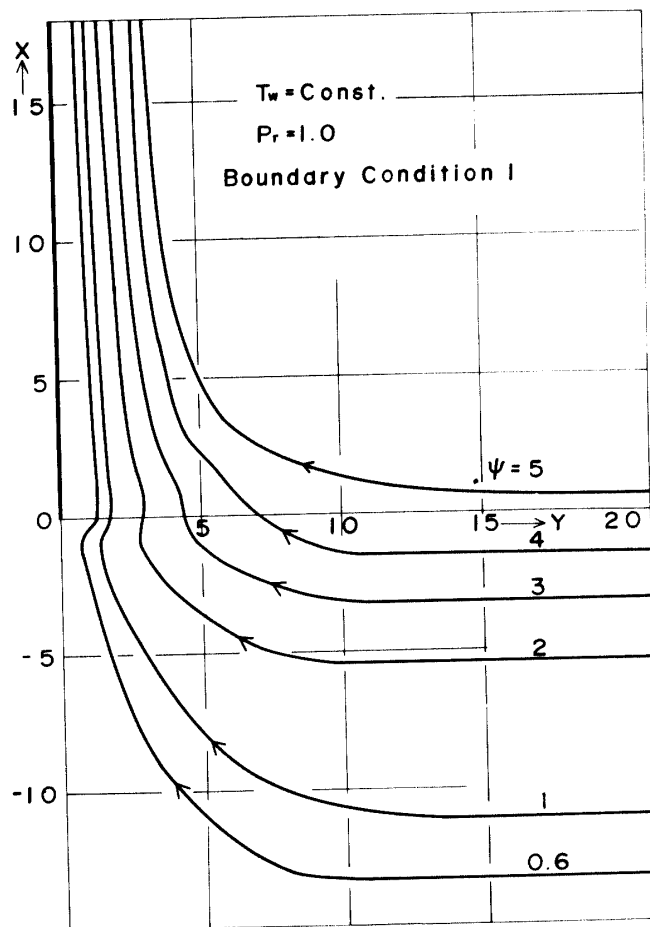


Fig. 10 Steady state stream lines in the vicinity of leading edge for $Pr=1.0$.

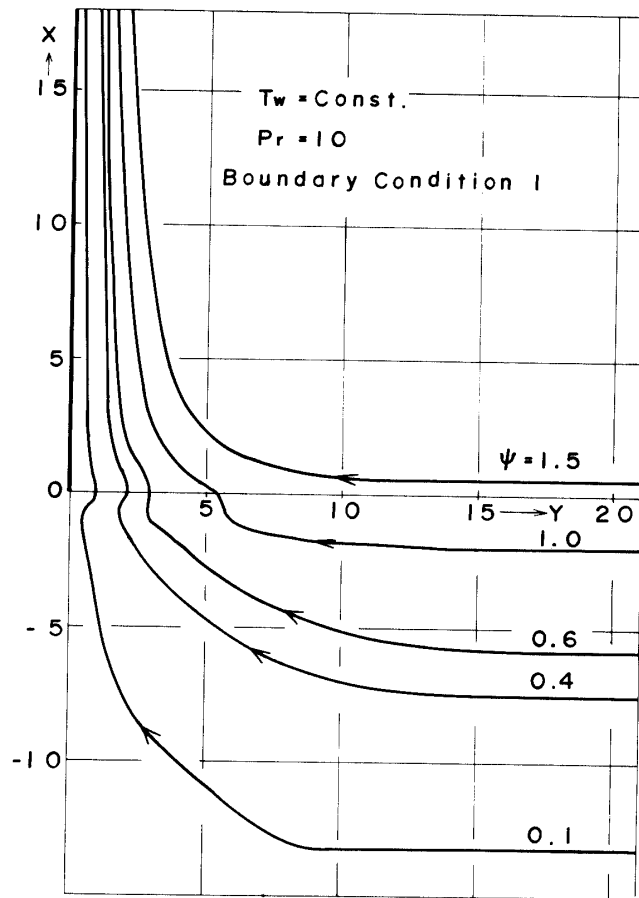


Fig.11 Steady state stream lines in the vicinity of leading edge for $Pr=10$.

べ特に温度変化は伝熱面下端より、 $Pr=1.0$ のとき 10% の温度変化が $X=-2$ まで及ぶことが知れた。

3) 特に前縁近傍では境界層近似で予想されるより overshoot が小さい。

おわりに一様熱流束の場合および種々のプラントル数について、より精度の高い結果を得るため目下広範な数値計算を進めている。これらの結果については後に発表の予定である。

文 献

1) E. Schmidt & W. Beckmann; Techn. Mech. und

Thermodyn., **10**, 341 (1930), **11**, 391 (1930).

2) K.T. Yang & E.W. Jerger; Trans. ASME, **C-86**, 107 (1964).

3) S. Ostrach; NACA TR 1111, (1953).

4) K.T. Yang; Trans. ASME, **E-82**, 230 (1960).

5) J.D. Hellums & S.W. Churchill; Proc. Inter. Heat Transfer Conference, 985 (1961).

6) J.D. Hellums & S.W. Churchill; Chem. Eng. Prog. sym. series, No.32, 57, 75 (1961).

7) J.A. Schetz & R. Eichhorn; Trans. ASME, **C-84**, 334 (1962).

(昭和52年4月15日受理)