

# 交通流モデルに関する基礎的研究 (第2報)

——追従理論による交通流モデルとパラメータ

推定に関する新しい考え方について——

田村 洋一\*・最上 幸夫\*

Studies on the Traffic Flow Model (2nd Report)

Yoichi TAMURA and Sachio MOGAMI

## Abstract

In the first report, the authors built up the traffic flow models according to the method that analogized the traffic flow to the one-dimensional compressible fluid. In this report, we built up the traffic flow models according to the Car Following Theory and some models were similar to the models in the first report. These models included two or three parameters and we explained the new idea to estimate the values of the parameters.

## 1. 緒言

交通流モデルについては、これまで大別して二つの立場から研究が進められてきている。その一つは、実証的観点に立つものであり、もう一つは、理論的観点に立つものであるが、本研究は理論的観点より交通現象を明らかにしようとするものである。この理論的観点に立つ研究は、決定論的なものと確率論的なものとに分けられ、決定論的なものは、さらに交通流を巨視的にとらえた流体力学的アプローチによるものと、微視的にとらえた追従理論 (Car Following Theory)、あるいは交通動力学 (Traffic Dynamics) によるアプローチによるものとに分けられる。

交通流モデルに関する決定論的アプローチとして、著者らは前報において<sup>1)</sup>、すでに交通流を一次元圧縮性流体へアナロジーすることにより、交通流の速度、密度、交通量の相互関係を表現し得るモデルを導き、現実の交通流との良好な一致をみている。そこで本研究では、決定論的アプローチのもう一つの立場として、追従理論による交通流モデルの考察を行ない、その結果、交通流モデルの一般形として流体力学的アプ

チを行なって得られたモデルと同一形式のモデルを得た。これらのモデルは、パラメータとして自由速度  $U_f$ 、飽和密度  $K_j$ 、臨界密度  $K_c$ 、臨界速度  $U_c$ 、定数パラメータを含み、現実の交通に対する適用を考える場合には、これらのパラメータの値を推定することが問題となる。

交通流モデルのパラメータ推定については、これまで対象とする道路の交通流データをもとにして、統計的方法によりその値を推定する方法がとられてきている。しかしこの方法では、対象となる道路の稀交通量状態から、渋滞交通量状態にいたるまでの非常に多くのデータを必要とし、また渋滞状態がたびたび発生するようにならなければデータが取得できず、事後解析的なモデルの適用となり易い。しかし、理論モデルの開発の主たる目的は、事前に将来の交通状態を予測し適切な交通計画を立てることに利用することにあることを考えれば、稀交通量状態のデータのみでモデルのパラメータ推定を可能とすることが望ましい。以上のようなことから、本研究では、これまでの方法と全く異なった考え方による交通流モデルのパラメータ推定を試みた。以下その概要について報告する。

## 2. 追従理論による交通流モデル

\* 土木工学科

2.1 追従方程式

道路上を何台かの車が連行して走行している状態を  
考えて、その中の  $k$  番目 (先行車) と  $k+1$  番目 (追従

車) に注目して追従方程式をたてる。この場合、道路  
は一方一車線とし、追い越しはできないものと仮定  
する。

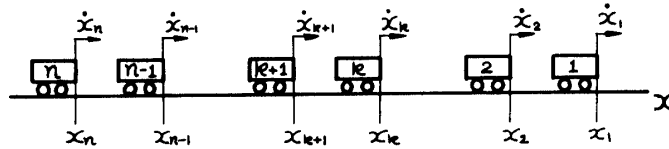


Fig. 1 A line of n vehicles moving to the right

一般に運転者はより早い速度で走行することを希望  
していると考えられ、もしも先行車が加速してスピー  
ドを上げれば、追従車も加速し先行車の速度に近づ  
こうとするであろう。また逆に先行車が減速を行な  
えば、追いが不可能な場合には、追従車は追突を生  
じぬように減速を強制されることになる。このよう  
なことから、先行車と追従車の速度差と追従車の加  
減速度には何らかの相関関係があると考えられる。  
そこで、後続車の加減速度が、先行車、追従車の速  
度差に比例すると仮定すれば、追従方程式として式  
(1)が成立する<sup>2)</sup>。

$$\ddot{x}_{k+1}(t+T) = A[\dot{x}_k(t) - \dot{x}_{k+1}(t)] \quad (1)$$

ここで

- $x_k(t)$  : 時刻  $t$  における  $k$  番目の車の位置
- $\dot{x}_k(t)$  : 時刻  $t$  における  $k$  番目の車の速度
- $x_{k+1}(t)$  : 時刻  $t$  における  $k+1$  番目の車の位置
- $\dot{x}_{k+1}(t)$  : 時刻  $t$  における  $k+1$  番目の車の速度
- $\ddot{x}_{k+1}(t+T)$  : 時刻  $t+T$  における  $k+1$  番目の車の加減速度
- $T$  : 反応時間
- $A$  : 比例定数

式 (1) における比例定数  $A$  について、これを反応  
の感度とみなせば、 $A$  は追従車の速度に比例し、車  
頭間隔に反比例すると考えられるので式 (2) が得ら  
れる。この仮定は、車頭間隔が小さいほど、また追  
従車の速度が大きいほど、追従車が先行車の速度  
変化に敏感に反応するという意味している。

$$A = \alpha \frac{\dot{x}_{k+1}^n(t+T)}{[x_k(t) - x_{k+1}(t)]^m} \quad (2)$$

ここで

$\alpha, m, n$  : constant

式 (2) を式 (1) に代入して、追従方程式として  
式 (3) を得るが、これは D.C. Gazis, R. Herman  
らにより提唱されたものと同じものである<sup>3)</sup>。

$$\ddot{x}_{k+1}(t+T) = \alpha \frac{\dot{x}_{k+1}^n(t+T) \cdot [\dot{x}_k(t) - \dot{x}_{k+1}(t)]}{[x_k(t) - x_{k+1}(t)]^m} \quad (3)$$

さらに、式 (3) において、ここでは定常状態につ  
いての解を求めることに目的があるので、 $T=0$  と  
して考察を進めてもよい。したがって、われわれは  
式 (4) を解けばよいことになる。

$$\ddot{x}_{k+1}(t) = \alpha \frac{\dot{x}_{k+1}^n(t) \cdot [\dot{x}_k(t) - \dot{x}_{k+1}(t)]}{[x_k(t) - x_{k+1}(t)]^m} \quad (4)$$

2.2 追従方程式の解について

式 (4) の追従方程式が式 (5) の成立する定常  
状態の交通流において成立しているものと仮定す  
る。

$$Q = KU \quad (5)$$

ここで

- $Q$  : 交通量 (veh/h)
- $K$  : 交通密度 (veh/km)
- $U$  : 空間平均速度 (km/h)

このとき、パラメータ  $m, n$  を適当に与えること  
により式 (4) を解けば、交通密度  $K$  と速度  $U$   
の関係を表わす種々の交通流モデルを導びき出す  
ことができる。

1)  $n=0, m=1$  の場合

この場合式 (4) は次のようになる。

$$\ddot{x}_{k+1}(t) = \alpha \frac{\dot{x}_k(t) - \dot{x}_{k+1}(t)}{x_k(t) - x_{k+1}(t)} \quad (6)$$

両辺を積分すると

$$\dot{x}_{k+1}(t) = \alpha \cdot \ln[x_k(t) - x_{k+1}(t)] + C \quad (7)$$

定常状態で、しかも個々の車の速度が等しく、  
また平均車頭間隔の逆数が交通密度を与えると  
仮定すると式 (8)、式 (9) が成立する。

$$\dot{x}_{k+1}(t) = U \quad (8)$$

$$x_k(t) - x_{k+1}(t) = 1/K \quad (9)$$

式 (8)、式 (9) を式 (7) に代入すると式 (10)  
となる。

$$U = \alpha \ln(1/K) + C \quad (10)$$

境界条件として式 (11) を用いて式 (10) の  $\alpha, C$  を決定する.

$$\left. \begin{array}{l} K=K_j \text{ の場合, } U=0 \\ K=K_c \text{ の場合, } dQ/dK=0 \end{array} \right\} \quad (11)$$

ここで

$K_j$ : 飽和密度 (veh/km)

$K_c$ : 臨界密度 (veh/km)

これより

$$\left. \begin{array}{l} \alpha=U_c \\ C=-U_c \ln(1/K_j) \end{array} \right\} \quad (12)$$

ここで

$U_c$ : 臨界速度

式 (12) を式 (10) に代入して式 (13) を得る.

$$U=U_c \ln(K_j/K) \quad (13)$$

式 (13) は Greenberg のモデルである.

2)  $n=0, m>1$  の場合

この場合, 式 (4) は次のようになる.

$$\ddot{x}_{k+1}(t)=\alpha \frac{\dot{x}_k(t)-\dot{x}_{k+1}(t)}{[x_k(t)-x_{k+1}(t)]^m} \quad (14)$$

両辺を積分すると

$$\dot{x}_{k+1}(t)=\frac{\alpha}{1-m} \cdot \frac{1}{[x_k(t)-x_{k+1}(t)]^{m-1}}+C \quad (15)$$

境界条件式 (16) より,  $\alpha, C$  を求めると式 (17) となる.

$$\left. \begin{array}{l} K=0 \text{ の場合, } U=U_f \\ K=K_j \text{ の場合, } U=0 \end{array} \right\} \quad (16)$$

ここで

$U_f$ : 自由速度 (km/h)

よって

$$\left. \begin{array}{l} \alpha=\frac{U_f(m-1)}{K_j^{m-1}} \\ C=U_f \end{array} \right\} \quad (17)$$

前述 1) と同様にして, 式 (15) の  $1/[x_k(t)-x_{k+1}(t)]^{m-1}$  を  $K^{m-1}$  と置き換えて式 (17) の  $\alpha, C$  を代入すると式 (18) を得る.

$$U=U_f \left[ 1-\left(\frac{K}{K_j}\right)^{m-1} \right] \quad (18)$$

式 (18) は流体力学的アプローチより求められたモデルと同じ形のものであり,  $m$  の値を変化させることにより, それぞれ以下のような交通流モデルが導かれる.

a)  $m=2$  のとき (Greenshields のモデル)

$$U=U_f[1-(K/K_j)] \quad (19)$$

b)  $m=3/2$  のとき (Drew のモデル)

$$U=U_f[1-(K/K_j)^{1/2}] \quad (20)$$

c)  $m=N+1$  のとき ( $N$  次曲線モデル)

$$U=U_f[1-(K/K_j)^N] \quad (21)$$

式 (21) は流体力学的モデルと全く同一のものでありまた以上のことから, 式 (21) は, Greenshields のモデル, Drew のモデルの一般形であることがわかる.

3)  $n=1, m>1$  の場合

この場合式 (4) は次のようになり,

$$\ddot{x}_{k+1}(t)=\alpha \frac{\dot{x}_k(t) \cdot [\dot{x}_k(t)-\dot{x}_{k+1}(t)]}{[x_k(t)-x_{k+1}(t)]^m} \quad (22)$$

積分して式 (23) となり, 前と同様の置き換えをすると式 (24) が得られる.

$$\ln \dot{x}_{k+1}(t)=\frac{\alpha}{1-m} \cdot \frac{1}{[x_k(t)-x_{k+1}(t)]^{m-1}}+C \quad (23)$$

$$\ln U=\frac{\alpha}{1-m} K^{m-1}+C \quad (24)$$

境界条件式

$$\left. \begin{array}{l} K=K_c \text{ の場合, } d\theta/dk=0 \\ K=0 \text{ の場合, } U=U_f \end{array} \right\} \quad (25)$$

より

$$\left. \begin{array}{l} \alpha=1/K_c^{m-1} \\ C=\ln U_f \end{array} \right\} \quad (26)$$

式 (26) を式 (24) に代入して式 (27) を得る.

$$U=U_f \cdot e^{-\frac{1}{m-1} \left(\frac{K}{K_c}\right)^{m-1}} \quad (27)$$

式 (27) で  $m$  の種々な値により次のような交通流モデルが得られる.

a)  $m=2$  のとき (Underwood のモデル)

$$U=U_f e^{-(K/K_c)} \quad (28)$$

b)  $m=3$  のとき (May のモデル)

$$U=U_f e^{-\frac{1}{2}(K/K_c)^2} \quad (29)$$

c)  $m=N+1$  のとき (指数形非線形モデル)

$$U=U_f e^{-\frac{1}{N}(K/K_c)^N} \quad (30)$$

以上のことからわかるように, 式 (30) の指数形非線形モデルは, Underwood のモデル, May のモデルの一般形となっている.

### 3. 非線形交通流モデルのパラメータ推定

#### 3.1 非線形交通流モデルの意義とパラメータ推定の考え方

前節において、追従方程式(4)を種々の条件下で解くことにより、従来提唱されていたモデルの一般形として $N$ 次曲線モデルと指数形非線形モデルを求めることができた。したがって、これらのモデル中に含まれるパラメータを直接求めることができれば、これまでのモデルはほとんど統一されることになる。

ところで、指数形非線形モデルについて考えてみると、このモデルは追従方程式を解く過程で境界条件として、 $K=K_c$ の場合に $d\theta/dk=0$ を用いているためにモデル中にパラメータとして $K_c$ を含んでいる。ところが、本来交通流モデルを実際の交通流に適用する場合一番問題となるのは、対象とする道路がいつ飽和状態になるか、すなわち飽和交通量 $Q_c(Q_c=K_c U_c)$ を知ることにある。このことを考えると、モデル中にパラメータとして $K_c$ 、あるいは $U_c$ を含むことは、モデルの応用上好ましくない、同様のことが、Greenbergのモデルについてもいえる。このようなことを考えれば、交通流モデルの一般としては、境界条件の与え方に無理のない $N$ 次曲線モデルが最も合理的な交通流モデルとして考えられる。

これまで、これらのモデルのパラメータ推定には、道路交通流の観測データをもとにして、回帰分析を行なう方法がとられてきている<sup>4)</sup>。しかしすでに緒言でも述べたように回帰分析には多大なデータを必要とし、しかも対象道路が飽和状態を呈するまでは直接高密度データを得ることができず、また密度データを得るのに非常に多くの労力と経費が必要となり、このことが交通流モデルの応用を妨げている大きな原因となっている。このようなことから、現在のところ交通流モデルは主として事後分析に用いられることになっているが、交通流モデル開発の本来の目的が、将来の交通状況の予測にあることを考えれば、このことは明らかにモデル開発の意図に矛盾している。したがって以下では、 $N$ 次曲線モデルについて、 $U_f$ 、 $K_j$ 、 $N$ が回帰計算以外の方法で推定可能であるとの仮定のもとに平均自由速度 $U^*$ 、ならびに平均自由密度 $K^*$ の概念を導入して、これをもとに $N$ の値を決定する方法についての考察を行ない $N$ の交通工学的意義についても明らかにしておく。

#### 3.2 交通流モデルのパラメータ推定

以下では、 $N$ 次曲線モデルにおける新しいパラメータ推定方法について述べる。これまで用いられてきた最小自乗法によるパラメータ推定方法は参考のために付録に示しておく。

##### 3.2.1 自由速度 $U_f$

自由速度 $U_f$ について考えると、その定義より明らかのように $K=0$ における速度であり、追従方程式中には道路の幾可構造の影響は全く含まれていないので、この $U_f$ は自動車自体の最高速度(限界速度)と考えられるべきものである。したがって $U_f$ は交通流を構成する車輛の最高速度の平均値と考えてよい。このような観点に立てば、 $U_f$ は対象となる道路交通流の車種構成を知れば、その最高速度の平均値として求めることができる。このとき車種構成については、公共機関により周期的に行なわれている交通量の調査結果を利用すれば比較的簡単に知ることができる。また、車の最高速度についてはメーカーのカタログ数値より推定することが可能である。

##### 3.2.2 飽和密度 $K_j$

飽和密度 $K_j$ に関しては、一車線道路であれば、道路条件、運転者の特性などによりあまり大きな影響を受けずほぼ一定であると考えられる。ただし、大型車混入率の高い場合には、当然車長の影響が大きく作用し $K_j$ は低下するが、乗用車交通が主である道路では、 $K_j=130\text{veh/km}$ は前後と考えると問題はなからう。大型車混入率の高い場合には、大型車の乗用車に対する換算係数を決定して $K_j$ の補正を行なう必要がある。

##### 3.2.3 平均自由速度 $U^*$ および平均自由密度 $K^*$

一般に追従車が先行車の影響を受け始めるのは、車頭時間が7~10sec程度であるといわれている<sup>5)</sup>。したがって、これ以上の車頭時間を有する車は自由走行車としてみなしてよからう。したがって、このような自由走行車の平均速度の平均値をその道路の平均自由速度 $U^*$ として定義する。

一方、平均自由密度 $K^*$ は、 $U^*$ を用いて、式(31)で定義する。

$$K^* = \frac{3600}{U^* \cdot t} \quad (31)$$

ここで

$t$  : 自由速度とみなせる車頭時間

ただし、式(31)は見通しの良い直線道路を考えてあり、曲線部の多い道路に対しては、まだ問題が残されている。

### 3.2.4 $N$ の算出

式 (21) を  $N$  について解くと式 (32) を得る.

$$N = \frac{\ln(1-U/U_f)}{\ln(K/K_j)} \quad (33)$$

式 (32) に  $U^*$ ,  $K^*$  を代入すると  $N$  は式 (33) により求められる.

$$N = \frac{\ln(1-U^*/U_f)}{\ln(K^*/K_j)} \quad (33)$$

式 (33) について考えると, 交通流構成が同じであれば, 良い道路程  $U^*$  は大きくなり, したがって  $U^*/U_f$  は大きくなる. 一方  $K^*/K_j$  については,  $K^*$ ,  $K_j$  のいずれにも限界値があり, ある限界値よりの変動は小さいと考えられるので, ほぼ一定とみなして良い, このことから,  $N$  の値は,  $U^*$  が大きくなる程大きな値をとることになり, したがって,  $N$  の値が大きいほど良い道路であると考えてよい. このことを利用すれ

ば,  $N$  を用いて道路の構造の良否を判定することも可能と考えられるが, この点に関しては, 多くのデータを用いて実証されるべき問題として残されている.

### 3.3 実際の交通流との比較

実際の交通流との比較は, 前報で述べた回帰分析との比較も考えて, 前報と同じデータを用いた. 今回の計算においては, 調査地点 (国道 190 号線, 宇部市流川) の交通流構成がほとんど乗用車で占められていたことから,  $U_f=120$  km/h,  $K_j=130$  veh/km を仮定し, また調査データより  $U^*=57$  km/h, を得た. この  $U^*$  の値を用いて, 式 (31) において  $t=9$  sec と仮定して  $K^*=7.0$  veh/km, また, 式 (33) より  $N=0.221$  を得た.

以上の値により行なった計算結果を前報で行なった計算結果とを比較したものを Table 1 に示す.

Table 1. Comparison of new estimate method and least-square approximation

	$U_f$ km/h	$K_j$ veh/km	$N$	$Q_c$ veh/h	$U_c$ km/h	$K_c$ veh/h
new estimate method	120	130	0.221	1144	21.7	52.7
least-square approximation	95.9	123.9	0.333	1250	23.9	52.3

この結果よりわかるように, 両者の計算結果は, 良好な一致を示しており,  $U_c$ ,  $K_c$ ,  $Q_c$ , の値の比較によって, 今回用いた方法によっても, 十分交通流の状態を表わすことがわかった.

## 4. 結 言

本研究では, まず交通流に関する追従方程式を立て, 種々の条件下でこれを解くことによって, これまで提唱されてきた交通流モデルの一般形を導くことができた. また, こうして導びかれたモデルの一つが, 流体力学的アプローチによる交通流モデルと全く同一のものとなるという興味深い結果もえられた. また今回はこれまで統計的に回帰分析することによって求められていたモデル中のパラメータ推定についても,  $N$  次曲線モデルについて, 新しい考え方を導入し, より簡便なパラメータ推定方法について考察を行なった結果, これまでの推定方法と比較して良好な結果が得られた.

また今回の解析においては, 新しく平均自由速度  $U^*$  と平均自由密度  $K^*$  の概念を導入することにより, 定数パラメータ  $N$  の交通工学的意味をある程度まで明らかにすることができた. しかし, 今回のパラメータ推定方法は, まだ試案の段階であり,  $U_f$ ,  $K_j$ ,  $U^*$ ,

$K^*$  などの推定方法についても不明確な部分も多いが, これらの点については目下研究を続行中であり, また指数形非線形モデルについても簡便なパラメータの推定方法について研究中であり, 機会を改めて発表する予定である.

今後の研究の課題としては,  $U^*$  は道路幅員, 視距, 勾配などの道路の幾何構造により決定されると考えられるのでこの点を明確にすること, また  $K^*$  の決定方法についてもさらに研究を深めてゆきたい.

本研究で述べたモデルは交通流が定常状態にある場合のみ成立するものであり, 飽和容量を越えた非常域では成立しない. 非常域での交通流に対しては, 車群の概念を取り入れる方法が可能であると考えられるので, この点も今後の研究の課題としたい.

## 参 考 文 献

- 1) 田村洋一・最上幸夫: 交通流モデルに関する基礎的研究 (第1報), 山口大学工学部研究報告, 27 75 (1976).
- 2) 伊吹山四郎: 道路交通工学, pp. 62, 金原出版, (1964).
- 3) Gazis, D.C., R. Herman, R.W. Rothery: Non linear Follow the Leader Model of Traffic Flow, J. Opns. Res. Soc. Am. No.4, (1961)

- 4) 佐藤馨一, 五十嵐日出夫: 非線形交通流モデルに関する研究, 土木学会論文報告集, No. 258, (1977)
- 5) 交通工学研究会: 交通工学ハンドブック, pp. 128, 技報堂 (1973)

付 録:  $N$ 次曲線交通流モデルのパラメータ推定

ここでは参考のために式(1)の $N$ 次曲線交通流モデルのパラメータ  $U_f, K_j, N$ を推定するために最小自乗法を利用する方法について説明する.

$$U = U_f \left[ 1 - \left( \frac{K}{K_j} \right)^N \right] \quad (1)$$

式(1)の右辺は線形ではないので, これを線形化するために, 未知量  $U_f, K_j, N$ の概略値  $\bar{U}_f, \bar{K}_j, \bar{N}$ を求めること考える. そのためには, まず  $U, K$ の代表的な測定値を三組用いて式(1)を次のように書き表わす. ただし測定値の組はそれぞれ  $(U_1, K_1), (U_2, K_2), (U_3, K_3)$ とする.

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= \bar{U}_f \left[ 1 - \left( \frac{K_1}{\bar{K}_j} \right)^{\bar{N}} \right] \\ U_2 &= \bar{U}_f \left[ 1 - \left( \frac{K_2}{\bar{K}_j} \right)^{\bar{N}} \right] \\ U_3 &= \bar{U}_f \left[ 1 - \left( \frac{K_3}{\bar{K}_j} \right)^{\bar{N}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式(2)より  $\bar{U}_f$ を消去すると式(3)を得る.

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_1}{U_2} &= 1 + \frac{U_1}{U_2} \left( \frac{K_2}{\bar{K}_j} \right)^{\bar{N}} - \left( \frac{K_1}{\bar{K}_j} \right)^{\bar{N}} \\ \frac{U_2}{U_3} &= 1 + \frac{U_2}{U_3} \left( \frac{K_3}{\bar{K}_j} \right)^{\bar{N}} - \left( \frac{K_2}{\bar{K}_j} \right)^{\bar{N}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式(3)より  $\bar{K}_j, \bar{N}$ を計算すればよいが, これは簡単には解けないので次のような試算法を用いることにする. まず式(3)をそれぞれ  $\bar{K}_j$ について解くと,

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{j1} &= \left[ \frac{\frac{U_1}{U_2} K_2^{\bar{N}} - K_1^{\bar{N}}}{\frac{U_1}{U_2} - 1} \right]^{\frac{1}{\bar{N}}} \\ \bar{K}_{j2} &= \left[ \frac{\frac{U_2}{U_3} K_3^{\bar{N}} - K_2^{\bar{N}}}{\frac{U_2}{U_3} - 1} \right]^{\frac{1}{\bar{N}}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となり, 式(4)の右辺は  $\bar{N}$ の値を変化させてやればその値が求まるので,

$$f(\bar{N}) = \bar{K}_{j1} - \bar{K}_{j2} \quad (5)$$

の値を計算して, それがある許容範囲の中で0に収束する点を求め, それを  $\bar{N}$ とし, そのときの  $\bar{K}_{j1}$ と  $\bar{K}_{j2}$ の平均値と  $\bar{N}_j$ とする, こうして求められた  $\bar{N}, \bar{K}_j$ を式(2)に代入すれば, 三つの  $U_f$ の値が求められるのでその平均値を  $U_f$ として決定すればよい.

以上のようにして  $\bar{U}_f, \bar{K}_j, \bar{N}$ が求められるので, その修正量を  $d\bar{U}_f, d\bar{K}_j, d\bar{N}$ とすると求める最確値は,

$$\left. \begin{aligned} U_f &= \bar{U}_f + d\bar{U}_f \\ K_j &= \bar{K}_j + d\bar{K}_j \\ N &= \bar{N} + d\bar{N} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

として求められる. したがって修正量  $dU_f, dK_j, dN$ を最小自乗法によって求めればよい. そのためには, 式(1)を Taylor 展開すると,

$$U_f \left[ 1 - \left( \frac{K}{K_j} \right)^N \right] = f_i(U_f, K_j, N) = U_i \quad (7)$$

と表わされるから,

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \right) dU_f + \left( \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \right) dK_j + \left( \frac{\partial f_i}{\partial N} \right) dN \\ &= U_i - f_i(U_f, \bar{N}_j, \bar{N}) = U_i \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)で  $\left( \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \right), \left( \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \right), \left( \frac{\partial f_i}{\partial N} \right)$ はそれぞれ偏微分した式に  $\bar{U}_f, \bar{K}_j, \bar{N}$ および測定値を代入した値である. また  $f_i(\bar{U}_f, \bar{K}_j, \bar{N})$ は  $f_i$ に  $\bar{U}_f, \bar{K}_j, \bar{N}$ を代入した値である.

式(8)より正規方程式は, 式(9)のようになりこれと解いて  $d\bar{U}_f, d\bar{K}_j, d\bar{N}$ を求めれば, 式(6)より最確値  $U_f, K_j, N$ が求められる.

$$\left. \begin{aligned} &\left[ \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \right] d\bar{U}_f + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \right] d\bar{K}_j \\ &+ \left[ \frac{\partial f_i}{\partial N} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \right] d\bar{N} = \left[ U_i \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \right] \\ &\left[ \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \right] d\bar{U}_f + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \right] d\bar{K}_j \\ &+ \left[ \frac{\partial f_i}{\partial N} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \right] d\bar{N} = \left[ U_i \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \right] \\ &\left[ \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial N} \right] d\bar{U}_f + \left[ \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial N} \right] d\bar{K}_j \\ &+ \left[ \frac{\partial f_i}{\partial N} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial N} \right] d\bar{N} = \left[ U_i \frac{\partial f_i}{\partial N} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)において  $[ \ ]$ は測定値  $i=1, 2, \dots, n$ についての総和を表わす. また  $(\partial f_i / \partial U_f), (\partial f_i / \partial K_j), (\partial f_i / \partial N)$ は次式で表わされる.

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial U_f} \right) = 1 - \left( \frac{K_i}{K_j} \right)^{\bar{N}} \quad (10)$$

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial K_j} \right) = \bar{N} \bar{U}_f \left( \frac{K_i}{K_j} \right)^{\bar{N}} \cdot \frac{1}{K_j} \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial f_i}{\partial N} \right) = -\ln \left( \frac{K_i}{K_j} \right) \cdot U_f \cdot \left( \frac{K_i}{K_j} \right)^{\bar{N}} \quad (12)$$

(昭和52年4月15日受理)