線形多変数系の状態値観測と制御

中　村　春　季**

Observing the state of a linear multivariable system and Control

Haruki NAKAMURA

Abstract

Often, in feedback control design, it is necessary to construct estimates of state variables which are not available by direct measurements. An observer for the linear systemem can be approximately reconstructed throught input measurements, output measurements and system matrices A and H. The concepts of an observer for the linear system was introduced initially by Luenberger, which approximately reconstructs the state vector and is itself a linear system driven by the available outputs and inputs of the original system. The observer theory for linear systems has been a field of research for several years. In this paper, we generalize the concepts of an observer, for linear systems, In a sense. The results obtained indicate that an observer by Luenberger is a special kind of generalized observer introduced in this paper. The application of the observer in this paper to feedback control design is investigated.

1. 序　論

近代制御理論において，状態変数のフィードバックによる制御策は，基本的である．一般的には，多変数制御系において，全ての状態変数を直接に測定できない場合が多い．オブザーバにより測定不可能な状態値を漸近的に再構成し，そしてその状態推定値でフィードバック制御を行なうという意図を持った多くの研究論文が発表されている．オブザーバは系の出力と入力で駆動される線形システム系であり，系の入力と出力そして構造（システム行列，観測行列）を基にして状態値と状態推定値の差が時間の経過にしたがって漸近的に零に収束するように構成された観測器である．

最初に，Luenberger が線形確定定数系に対し，オブザーバ[1]の概念を導入して，研究発表を行なっている．状態推定値は出力とオブザーバの状態値の線形結合である．ここ数年にわたって線形系に対するオブザーバの理論は，一つの研究分野となっている．そして系に雑音，観測に雑音を伴う場合，オブザーバの概念と Kalman Filter の概念を一般化した研究を Athans [2] 等が行なっている．本稿では，線形定数系に対して，観測器を構造的に，ある意味において，Luenberger のオブザーバ（観測器）を一般化したのでここに，報告する．この観測器はオブザーバと同じく系の出力と入力で駆動される，線形システムである．オブザーバが n 次元の場合，形式的に，Kalman Filter 的になるが，ここでの観測器は必ずしも Kalman Filter 型とはならない．Kalman Filter の場合，フィルタの構造は出力と出力の推定値差で駆動し，その係数は雑音の確率，統計的な性質に基づいて決定されている．この観測器は一般的には出力だけ（制御を行なう場合は，それと入力）で駆動される．そして状態推定値は出力と観測器の状態値の線形結合である．特別な場合が Kalman Filter 型オブザーバとなる．オブザーバの特長は，状態値の次元から出力の次元の差の次元，（n－m）次元オブザーバを最小次元オブザーバ（観測器）と呼び次元数が最小次元である．ここでの観測器は（n－m）次元以下にできる可能性があり，そして容易に n 次元以上にもできる．

すなわち観測器の次元の自由性と同時に，オブザーバと同様に，パラメータの自由度も存在する．ここで導入した観測器の特別な場合がオブザーバであり，他の特別な場合，出力（制御の場合，それと入力）で駆動され，状態推定値は観測器の状態値の線形結合で表示される．本報告の構造は以下次のようである．

** 工業短期大学部情報処理工学科

まず問題の設定と以下の論議に必要な定義を与える．次に，ここで導入された観測器の構造に関して議じる．そして Luenberger によって導入されたオブザーバ（観測器）との関係を論じる．終りに，Luenberger が導入した Supplemental[3] オブザーバの概念も同様にしてある意味で一般化した観測器に関して論じ，そして，観測器の制御への応用として安定化問題そして最適化問題への適用を論じる．

2. 問題の設定

本報告で論じる制御系は主として線形確定定数系であり，状態方程式と観測方程式の構造：

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} \qquad (1)$$

$$\mathbf{y} = H\mathbf{x} \qquad (2)$$

である．ここで，$\mathbf{x}$：n 次元状態ベクトル，$\mathbf{u}$：r 次元操作ベクルトルそして $\mathbf{y}$：m 次元観測ベクトル．A, B, H, はそれぞれ n×n, n×r, m×n 行列である．(1), (2)の系に対し，観測器による状態値再構成（推定），安定化問題そして最適制御問題への応用に関して論じる．まず，以下の義論に必要な若干の定義を行なう．

定義 1）次の q 次元線形ダイナミカル系

$$\overset{\circ}{\mathbf{z}} = F\mathbf{z} + C\mathbf{y} + E\mathbf{u} \quad \mathbf{z} \in R \qquad (3)$$

が (p, q) K 観測器と呼ばれるのは，次の $s\times(p+m)$ 行列 $W=[P,\ V]$ と $p\times q$ 行列 T が存在する場合である．ここで，K：$s\times n$ 行列である．

$$\lim_{t\to\infty}\left(K\mathbf{x} - W\begin{bmatrix} T\mathbf{z} \\ \mathbf{y}\end{bmatrix}\right) = \lim_{t\to\infty}(K\mathbf{x} - PT\mathbf{z} - V\mathbf{y}) = \mathbf{o}_s \qquad (4)$$

そして，状態値の線形結合 $K\mathbf{x}$ の推定値 $K\hat{\mathbf{x}}$ は

$$K\hat{\mathbf{x}} = P\,T\mathbf{z} + V\mathbf{y} \qquad (5)$$

である．ここで F, C, E はそれぞれ $q\times q$, $q\times m$ そして $q\times r$ 観測器行列である．特に，$K=I_{n,n}$ すなわち，n 次元単位行列の場合を (p, q) 状態観測器と呼ぶ．状態推定 $\hat{\mathbf{x}}$：

$$\hat{\mathbf{x}} = PT\mathbf{z} + V\mathbf{y} \qquad (6)$$

で，W は $n\times(p+m)$ 行列となる．特に，$K=I_{n,n}$, $T=I_{p,p}$ で $p=n-m$ すなわち $(n-m,\ n-m)$ 状態観測器が最小次元観測器（オブザーバ）の定義であり，$P=I_{n,n}$, $V=O_{n,m}$ 行列の場合がカルマン型観測器である．状態推定値が系(3)の q 次元線形ダイナミカル系の状態値の線形結合で表示される場合の論義の準備として次の定義を行なう．

定義 2）系(3)の q 次元線形ダイナミカル系が (n, q) 状態観測器と呼ばれるのは次の $n\times q$ 行列 T が存在する場合：

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{x} - T\mathbf{z}) = \mathbf{o}_n \qquad (7)$$

である．ここで，状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}$：$\hat{\mathbf{x}} = T\mathbf{z}$ である．定義 2 は定義 1 において $W=[I_{n,n},\ O_{n,m}]$ 行例とした特別な場合となっている．以上の準備の元に次に状態推定を行なう線形観測器に関して論じる．

3. 線形観測器

最初に，自由系 S_1 の状態値再構成（推定）問題を考察する．すなわち系が零入力の場合である．系 S_1 の出力が系 S_2 の入力として作用する．そして系 S_2 の状態値の線形結合 Tz が系 S_1 の状態値の線形結合 $S\mathbf{x}$ に漸近的に追跡する傾向にある場合，系 S_2 が系 S_1 の観測器としての役割を形成するのである．

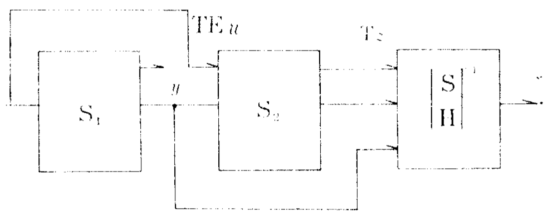

Fig. 1

ここで，$S\mathbf{x}$ と $T\mathbf{z}$ の間の関係を数式的に論じる．

補題 1）系(3)の状態値の線形結合関数 $T\mathbf{z}$ と状態値の線形結合関数 $S\mathbf{x}$ との間の関係：

1）$\lim_{t\to\infty} T\mathbf{z} = S\mathbf{x}$

特に

2）$T\mathbf{z}_0 = S\mathbf{x}_0$ の時 $T\mathbf{z} = S\mathbf{x}$

となるの次の条件が成立する場合である．ここで，S, T, G はそれぞれ $p\times n$, $p\times q$, $p\times p$ 行である．

条件 1　$SA - GS = TCH$　(8)

条件 2　$GT = TF$　(9)

条件 3　$TE = SB$　(10)

条件 4　G は安定行列（固有値の実部は全て負）　(11)

証明）

$$(\overset{\circ}{T\mathbf{z} - S\mathbf{x}}) = T(F\mathbf{z} + C\mathbf{y}) - SA\mathbf{x} = G(T\mathbf{z} - S\mathbf{x}) \qquad (12)$$

したがって

$$Tz = Sx + e^{G}(Tz - Sx)_{t=0} \tag{13}$$

ここでGは安定行列であることより

$$\lim_{t\to\infty} Tz = Sx \tag{14}$$

特に，$Tz_0 = Sx_0$ の時，$Tz = Sx$である．ただし，条件3は操作量Uで実際に制御を行う場合の条件であり，証明は同様の手順を経て，(13)式，(14)式となる．

次に，補題1の結果を応用して系(1)，(2)に対する状態値推定問題を考察する．問題の対象は定義1である．

補題2) 系(3)が(1)，(2)に対して (s, q) 状態観測器と呼ばれるのは補題1の条件で $S: s\times n$ 行列，$G: s\times s$ 行列，そして $T: s\times q$ 行列 $(s=n-m)$ と設定した場合に加えるに，次の条件が成立する時である．

条件5 $PS + VH = I_{n\times n}$ (15)

ここで，$W = [P, V]: n\times(s+m)$行列であり，状態推定値 $\hat{x}: \hat{x} = PTz + Vy$ となる．

証明)

系と観測器との間の関係は，誤関数 e(t) の導入より：

$$e(t) = Tz - Sx \tag{16}$$

$$x - W\begin{bmatrix} Tz \\ y \end{bmatrix} = x - [P, V]\begin{bmatrix} Tz \\ y \end{bmatrix}$$

$$= x - [P, V]\begin{bmatrix} Sx + e \\ Hx \end{bmatrix}$$

$$= x - x - [P, V]\begin{bmatrix} e \\ o_m \end{bmatrix} \tag{17}$$

ここで，補題1より，$\lim_{t\to\infty} e = o_{n-m}$

故に

$$\lim_{t\to\infty} (PTz + Vy) = x$$

(r, q) 状態観測器は，以上の構造より，観測器の次元がn次元であっても，駆動されるのは出力だけであり，出力と出力の推定値の差で駆動する Luenberger のn次元の特別の場合とは，一般的に異なる．そして観測器の定義を，上述のように，ある意味で拡張することにより，カルマン型オブザーバと最小次元オブザーバの中間の次元の観測器も容易に構成可能であり，最小次元オブザーバ（観測器）の次元以下にもできうる．これは，例でもって示す．次に，(s, q) 状態観測器と最小次元観測器との間の関係を論じる．

観測器の状態値と系の状態値を関係づける変換を $T = I_{p,p} (p=n-m)$ と設定することにより，補題1の条件1，2は

$$SA - GS = CH \quad G = F$$

故に，

$$SA - FS = CH$$

この条件は Luenberger による観測器の構造である．すなわち $(n-m,\ n-m)$ 状態観測器に対応する．そして状態推定：$x = Pz + Vy$ である．

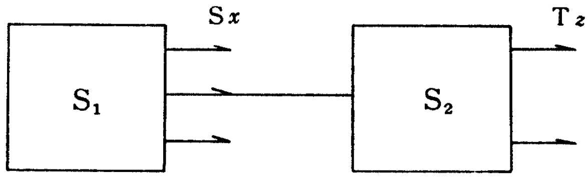

Fig. 2

次に，定義2に基づいた状態値推定問題を考察する．

補題3) Tz と x との間の関係：

1) $\lim_{t\to\infty} Tz = x$

特に，

2) $Tz_0 = x_0$ の時 $Tz = x$

となるのは，次の条件が成立する時であり，補題1で $S = I_{n,n}$ の場合である．ここで，$G: n\times n$ 行列，$T: n\times q$ 行列である．

条件1 $G = A - TCH$ (18)

条件2 $GT = TF$ (19)

条件3 $B = TE$ (20)

条件4 G は安定行列 (21)

証明)

$$(\overset{\circ}{x - Tz}) = Ax - T(Fz + Cy)$$

$$= (A - TCH)(x - Tz) \tag{22}$$

したがって

$$x = Tz + e^{(A-TH)t}(x - Tz)_{t=0} \tag{23}$$

故に，$\lim_{t\to\infty} Tz = x$ である．状態推定値：$\hat{x} = Tz$ となる．すなわち，状態推定値が観測器の状態値の線形結合で表示される場合であり，観測器のパラメータ決定に関してオブザーバと同程度に簡略化できる．補題2と補題3の関係は線形変換 $S = I_{n,n}$ と設定することにより(8)式：

$$A - G = TCH$$

故に，

$$G = A - TCH$$

となり，補題1の特別の場合であることがわかる．

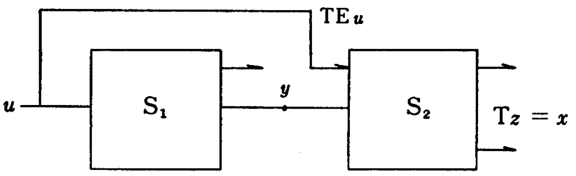

Fig. 3

ふたたび，次の制御系を考察する．

$$\mathring{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+B\mathbf{u} \tag{24}$$

$$\mathbf{y}=H\mathbf{x} \tag{25}$$

観測器（オブザーバ）を別の見地より考察する．Luenberger はこのオブザーバ（観測器）を Supplemental オブザーバと呼んでいる．ここで，行列 M（M は n×n 行列）を

$$M=\begin{bmatrix} T \\ H \end{bmatrix}^{-1} \begin{matrix}\}n-m \\ m\end{matrix} \tag{26}$$

とする．ただし，T は M が正則である範囲では任意の行列である．この行列Mを用いて座標変換を行なう．

$$\overset{\triangle}{\mathbf{x}}=M\mathbf{x}=\begin{bmatrix} S\mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \tag{27}$$

ここで，行列 S は $(n-m)\times q$ 行列で $\mathbf{z}$ は q 次元，$\mathbf{y}$ は m 次元ベクトルである．(24)，(25)をそして(26)式より

$$\mathring{\mathbf{x}}=MAM^{-1}\mathbf{x}+MB\mathbf{u}$$

$$=\quad A\mathbf{x}\ +\ B\mathbf{u} \tag{28}$$

$$\mathbf{y}=HM^{-1}\mathbf{x}=H\mathbf{x} \tag{29}$$

ただし，行列 A，B を次のように分解する．：A，B

$$A=\begin{bmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{11}, & A_{22} \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

である．A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22}，B_1，B_2 は，それぞれ $(n-m)\times(n-m)$，$(n-m)\times m$，$m\times(n-m)$，$m\times m$，$(n-m)\times r$，$m\times r$ 行列である．ここで $(n-m)\times q$ 行列 S を次の条件が成立するように設定する．

$$A_{11}S=G_{11},\quad A_{12}=SG_{12},\quad B_1=SE_1 \tag{30}$$

ここで，G_{11}，G_{12}，E_1 はそれぞれ $q\times q$，$q\times m$，$q\times r$ 行列である．(28)，(30)より

$$\mathring{\mathbf{z}}=G_{11}\mathbf{z}+G_{12}\mathbf{y}+E\mathbf{u} \tag{31}$$

$$\mathbf{y}=A_{21}S\mathbf{z}+A_{22}\mathbf{y}+B_2\mathbf{u} \tag{32}$$

ここで，$\mathbf{w}=\mathbf{z}-L\mathbf{y}$ と定める．次の式を得る．

$$\mathring{\mathbf{w}}=(G_{11}-LA_{21}S)\mathbf{w}+(G_{12}-LA_{22})\mathbf{y}$$
$$+(G_{11}-LA_{21}S)L\mathbf{y}+(E_1-LB_2)\mathbf{u} \tag{33}$$

系(24)，(25)に対する q 次元観測器を次のように定義する．ここで $\hat{\mathbf{w}}$ を $\mathbf{w}$ の推定値とする．

$$\mathring{\hat{\mathbf{w}}}=(G_{11}-LA_{21}S)\hat{\mathbf{w}}+(G_{12}-LA_{22})\mathbf{y}$$
$$+(G_{11}-LA_{21}S)L\mathbf{y}+(E_1-LB_2)\mathbf{u} \tag{34}$$

以上の元で，q 次元観測器の構成に関して次の補題を得る．

補題 4） 系(34)が系(24)，(25)に対する q 次元観測器であるのは，次の条件が成立する時である．

条件 1　M^{-1}の存在性

条件 2　$A_{11}S=SG_{11}$，$A_{12}=SG_{12}$，$B_1=SE_1$ なる行列 S，G_{11}，G_{12}，E_1 の存在性

条件 3　$G_{11}-LA_{21}S$ の固有値の実部は全て負

証明）

ここで，誤差関数 $\mathbf{e}$ を次のように定義する．

$$\mathbf{e}=\hat{\mathbf{w}}-\mathbf{w}=(\hat{\mathbf{z}}-L\mathbf{y})-(\mathbf{z}-L\mathbf{y})$$
$$=\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{z} \tag{35}$$

(33)，(34)と条件 2 より

$$\mathring{\mathbf{e}}=(G_{11}-LA_{21}S)\mathbf{e} \tag{36}$$

条件 3 より $\lim_{t\to\infty}\mathbf{e}=\mathbf{o}_q$ である．(37)

$$\hat{\mathbf{x}}-\mathbf{x}=M^{-1}\begin{bmatrix} S\hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}-M^{-1}\begin{bmatrix} S\mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$
$$=M^{-1}\begin{bmatrix} S(\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{z}) \\ \mathbf{o}_m \end{bmatrix}=M^{-1}\begin{bmatrix} S\mathbf{e} \\ \mathbf{o}_m \end{bmatrix} \tag{38}$$

(37)，(38)より

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}$$

故に成立，ここで状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}$：

$$\hat{\mathbf{x}}=M^{-1}\begin{bmatrix} S\mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}=M^{-1}\left[\begin{bmatrix} SL \\ I \end{bmatrix}\mathbf{y}+\begin{bmatrix} S \\ O \end{bmatrix}\hat{\mathbf{w}}\right] \tag{39}$$

この観測器の特長は(34)式で既知であるように，$(G_{12}-LA_{22})y$と $(G_{11}-LA_{21}S)\ L\mathbf{y}$ で駆動されるということであり特に，$E_1=LB_2$ の時は系が制御状態にあっても入力の駆動項は消える．この観測器の概念は Luenberger が Supplemental オブザーバとして導入した概念をある意味で一般化したものである．

4. 線形確定時変系の観測器

線形確定定数系の概念に基づいて，線形確定時変系の観測器（オブザーバ）の概念が（asymptotic state estimator）[4] として研究発表が行なわれている．ここで，線形定数系の概念に基づいて，(s, q) 状態時変観測器に関して基礎的概念を論じる．

次の線形時変系の状態推定問題を考察する．状態方程式と観測方程式はそれぞれ：

$$\mathring{\mathbf{x}}=A(t)\,\mathbf{x}+B(t)\mathbf{u} \quad (40)$$

$$\mathbf{y}=H(t)\mathbf{x} \quad (41)$$

ここで，$\mathbf{x}$：n 次元状態ベクトル，$\mathbf{u}$：r 次元操作ベクトル，$\mathbf{y}$：m 次元観測ベクトル．(40)，(41)に対する（s, q）状態時変観測器を次のように定義する．

定義 3）次の q 次元線形時変ダイナミカル系

$$\mathring{\mathbf{z}}=F(t)\mathbf{z}+H(t)\mathbf{y}+E(t)\mathbf{u} \quad (42)$$

が系(40)，(41)に対する（s, q）状態時変観測器と定義されるのは，次の $s\times(p+m)$ 行列 $W(t)=[P,\ V]$ と $p\times q$ 行列 $T(t)$ が存在する場合である．

$$\lim_{t\to\infty}\left[\mathbf{x}-W\begin{bmatrix}T(t)\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}\right]$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\mathbf{x}-P(t)T(t)\mathbf{z}-V(t)\mathbf{y}\right]=\mathbf{o}_n \quad (43)$$

定義 3 に基づいて，線形時変系に対する観測器の概念を論じる．ここで，誤差ベクトルを次のように定義する．

$$\mathbf{e}(t)=T(t)\mathbf{z}-S(t)\mathbf{x}\quad e\in R_q \quad (44)$$

補題 5）系(42)が系(40)，(41)に対する（s, q）状態時変観測器と呼ばれるのは，次の条件が成立する時である．

条件 1 $\quad I_n-W(t)\begin{bmatrix}S(t)\\ H(t)\end{bmatrix}=I_n \quad (45)$

条件 2 $\quad \lim_{t\to\infty}\mathbf{e}(t)=\mathbf{o}_{n-m} \quad (46)$

証明）

条件 1 より

$$\mathbf{x}-W(t)\begin{bmatrix}T(t)\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}$$

$$=-W(t)\begin{bmatrix}S(t)\mathbf{x}+\mathbf{e}_{n-m}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}$$

$$=W(t)\begin{bmatrix}\mathbf{e}_{n-m}\\ \mathbf{o}_m\end{bmatrix} \quad (47)$$

条件 2 より，故に

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{x}=W(t)\begin{bmatrix}T(t)\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}$$

したがって，状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}$：$\hat{\mathbf{x}}=P(t)T(t)\mathbf{z}+V(t)\mathbf{y}$ である．次に観測器行例，$F(t)$，$H(t)$，$E(t)$の計算に必要な基本的関係式を導出する．基本的関係式：$\mathring{T}+FT=GT$，$\mathring{S}+SA-GS=TCH$，そして $TE=SB$ とする．その時，誤差関数 $\mathbf{e}$ は次の線形時変微分方程式で支配される．

$$\mathring{\mathbf{e}}=G(t)\mathbf{e} \quad (48)$$

実際

$$\mathring{\mathbf{e}}=(Tt)\mathbf{z}-\mathring{S}(t)\mathbf{x})$$

$$=G(t)T(t)\mathbf{z}-G(t)T(t)\mathbf{x}$$

$$=G(t)(T(t)\mathbf{z}-S(t)\mathbf{x})$$

$$=G(t)\mathbf{e} \quad (49)$$

故に，$\mathring{\mathbf{e}}=G(t)\mathbf{e}$ で $G(t)$ が安定となるように観測器のパラメータを決定すれば，観測器として構成可能である．ここで，システムと観測器のパラメータを定数に設定した場合が線形確定定数系の状態値推定問題に帰する．

5. 閉ループ特性（観測器による安定化法）

線形定数系の状態推定の一方法として，観測器による方法が提案されており，これをある意味で一般化を行ない，定義の意味で状態推定が可能な観測器の構成条件を導出した．次の問題は，操作量 $\mathbf{u}=\mathbf{Kx}$ で，目標値を原点として安定であるとする．具体的には，コントロールゲイン K を状態値と操作量の 2 次形式の評価関数で決定する．この場合，状態値は一般的には既知でないので，状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ を用いて制御を行なった場合安定でろうかという問題が生ずる．このことは観測器の役割において重要である．ここでは，上述のことを含めて，以下のように論述を進める．前節では，状態推定問題を考察したが，今，状態値の線形関数 $\mathbf{kx}$ の推定問題を論じる．そして観測器による安定化問題を論じる．

補題 6）系(1)の状態値の線形関数 $\mathbf{kx}$ の推定値：$k\hat{\mathbf{x}}=PT\mathbf{z}+V\mathbf{y}$ となるのは，次の条件が成立する時である．そして操作量 $\mathbf{u}=k\mathbf{x}$ の代りに，$\hat{\mathbf{u}}=k\hat{\mathbf{x}}$ を用いても安定である．ここで K, S, G, T はそれぞれ (r, n)，(r, n)，(r, r) そして (r, q) 行列である．この観測器は定義 1 の意味において（p, q）k 観測器である．

条件 1 $\quad SA-GS=TCH \quad (50)$

条件 2 $\quad GT=TF \quad (51)$

条件 3 $\quad SB=TE \quad (52)$

条件 4 $\quad PS+VH=K$ ただし， (53)

$\quad W=[P,\ V]$：$r\times(r+m)$ 行列

条件 5 $\quad G$：安定行列 (54)

証明

a. 定義 1 に基づいて $\mathbf{Kx}$ の推定問題を考察する．

$$\lim_{t\to\infty}\left(K\mathbf{x}-W\begin{bmatrix}T\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(K\mathbf{x}-W\begin{bmatrix}S\\ H\end{bmatrix}\mathbf{x}-W\begin{bmatrix}\mathbf{e}\\ \mathbf{o}_m\end{bmatrix}\right) \quad (55)$$

補題1より，$\lim_{t\to\infty} \mathbf{e}=\mathbf{o}_r$ より，したがって

$$\lim_{t\to\infty}\left(K\mathbf{x}-W\begin{bmatrix}T\mathbf{z}\\ \mathbf{y}\end{bmatrix}\right)$$
$$=K\mathbf{x}-PT\mathbf{z}-\mathbf{y}=\mathbf{o}_r$$

故に，$K\hat{\mathbf{x}}=PT\mathbf{z}+V\mathbf{y}$ である．

b．操作量 $\mathbf{u}=K\mathbf{x}$ のかわりに，$\hat{\mathbf{u}}=K\hat{\mathbf{x}}$ を用いた安定化問題に関して論じる．ここで，$\mathbf{e}=T\mathbf{z}-S\mathbf{x}$ とおいて，座標変換を行を行なう．

$$\mathring{\mathbf{x}}=A\mathbf{x}+BK\mathbf{x}$$
$$=A\mathbf{x}+B(PT\mathbf{z}+V\mathbf{y})$$
$$=(A+BK)\mathbf{x}+BP\mathbf{e} \tag{56}$$
$$\mathring{\mathbf{e}}=T(F\mathbf{z}+C\mathbf{y}+EK\hat{\mathbf{x}})-S(A\mathbf{x}+BK\mathbf{x})$$
$$=G(T\mathbf{z}-S\mathbf{x})=G\mathbf{e} \tag{57}$$

(56)，(57)式より

$$\begin{pmatrix}\mathring{\mathbf{x}}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+BK, & BP\\ O_q, & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{e}\end{pmatrix} \tag{58}$$

操作量 $\hat{\mathbf{u}}=K\hat{\mathbf{x}}$ を用いた安定化問題の賛否は，その相互作用より合成系(58)式で考察しなければいけない．合成系の固有値は．$A+BK$ と G である．可制御性の条件と観測器の構成可能性より，合成系の固有値の実部は，全て負にできる．すなわち，安定化可能である．特に状態値のかわりに状態推定値 $\hat{\mathbf{x}}$ を用いて，$\hat{\mathbf{u}}=K\hat{\mathbf{x}}$ で制御を行なっても安定化可能である，これは条件4で $K=I_{n,n}$ と設定した場合に対応し，$s=n$ の時である．そして，状態推定値を構成して制御を行う場合より，操作量を推定して制御を行なう方が，操作量の次元が状態値の次元より低次元であるために，より低次元の観測器が構成できる．

6．最適制御への応用[4),5)]

系(1)，(2)において目標値 $\mathbf{u}(t)=\mathbf{o}_n$ とし，評価関数（状態値と操作量の2次形式）：

$$J=\int_0^\infty(\mathbf{x}^TQ\mathbf{x}+\mathbf{u}^TR\mathbf{u})dt \tag{59}$$

を最小にするような入力 $\mathbf{u}$ を求める問題は最適（状態）レギュレータ問題である．ここで，Q，R は実対称，かつ Q は準正定で R は正定とする．この最適操作量 $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u}=-R^{-1}B^TP\mathbf{x}=K\mathbf{x} \tag{60}$$

である．P は実対称で次の方程式を満足する．以下簡略的に式を導出する．(60)式を(1)，(59)式に代入する．

$$\mathring{\mathbf{x}}=(A+BK)\mathbf{x} \tag{61}$$

そして，

$$V=\min_{\mathbf{u}} J=\int_0^\infty \mathbf{x}^T(Q+K^TRK)\mathbf{x}dt \tag{62}$$

ここで，

$$V=-\mathbf{x}^T(Q+K^TRK)\mathbf{x}$$

であり，V は(61)式に対するリャプーノフ関数である．P を次のように定義する．

$$P=\left\{\int_0^\infty e^{(A+BK)^Tt}(Q+K^TRK)e^{(A+B)t}\,dt\right. \tag{63}$$

(61)式の解は

$$\mathbf{x}=e^{(A+BK)t}\mathbf{x}_0 \tag{64}$$

であり，(64)式を(62)式に代入すると，次式を得る．

$$V=\mathbf{x}_0^T\left\{\int_0^\infty e^{(A+BK)^{Tt}}(Q+K^TRK)\,e^{(A+BK)t}dt\right\}\mathbf{x}_0 \tag{65}$$

ここで，(62)式より，P の満足すべき，リカッチ代数方程式は

$$(A^T+K^TB^T)P+P(A+BK)=-(Q+K^TPK) \tag{66}$$

であり，実対称正定解で一意に定まる．故に，(63)，(65)(66)式より，最小評価関数は

$$V=\mathbf{x}^T{}_0\,P\mathbf{x} \tag{67}$$

である．ここで，(60)式の代りに，状態観測器の出力 $\hat{\mathbf{x}}$ を用いた場合の評価数の変動計算を行なう．

状態方程式系と観測系を考察する．ただし $\mathbf{z}=T\mathbf{z}$ と設定した，合成系〔$\mathbf{x}^T$，$\mathbf{z}^T$〕であり，$\hat{\mathbf{x}}=P\mathbf{z}+V\mathbf{y}$ とすることにより(1)と(3)式より合成系の満たすべき方程式系は

$$\begin{pmatrix}\mathring{\mathbf{x}}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A+BKVH, & BKP\\ TCH+VH, & G+SBKP\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}$$
$$=A_1\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix} \tag{68}$$

ここで，$SB=TE$

ただし，A_1を(68)式のように定義している．$\mathbf{u}$ の代りに $\hat{\mathbf{u}}$ を用いた場合の評価関数 V_1：

$$V_1=\int_0^\infty(\mathbf{x}^TQ\mathbf{x}+\mathbf{u}^TR\mathbf{u})\,dt$$
$$=\int_0^\infty[\mathbf{x}^T,\ \mathbf{z}^T]\begin{pmatrix}Q+H^TV^TK^TRKVH, & H^TV^TK^TRKP\\ P^TK^TRKVH, & P^TK^TRKP\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{bmatrix}dt$$
$$=\int_0^\infty[\mathbf{x}^T,\ \mathbf{z}^T]\,Q_1\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{bmatrix}dt \tag{69}$$

であり，行列 Q_1 を(69)式のように定義している．(61)，(62)式と(68)，(69)式の類似性より，最小評価関数：

$$V_1=[\mathbf{x}^T{}_0,\ \mathbf{z}_0]\,P_1\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{z}_0\end{bmatrix}$$

で，P_1 は次のリカッチ方程式の根である．

$$A^T{}_1P_1+P_1A_1=-Q^1 \qquad (70)$$

状態値と観測器による状態推定値の誤差は　$\mathbf{e}(t)=\mathbf{z}-S\mathbf{x}$ により，それは初期誤差 $\mathbf{e}_0=\mathbf{z}_0-S\mathbf{x}_0$ に基づいている．そこで，$\mathbf{e}_0=\mathbf{o}_{n-m}$ と設定して，

$$PS+VH=I_n$$

の関係式を用いれば

$$\begin{aligned}V_1&=\int_0^\infty[\mathbf{x}^T,\ \mathbf{z}^T]\,Q_1\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{bmatrix}dt\\ &=\int_0^\infty[\mathbf{x}^T,\ \mathbf{x}^TS^T]\,Q_1\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ S\mathbf{x}\end{bmatrix}dt\\ &=\int_0^\infty\mathbf{x}^T(Q+K^TRK)\,\mathbf{x}dt\end{aligned} \qquad (71)$$

すなわち

$$V=(\mathbf{x}_0^T\,P\mathbf{x}_0)=[\mathbf{x}_0^T,\ \mathbf{z}_0^T]P_1\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{z}_0\end{bmatrix}=V_1 \qquad (72)$$

この場合，評価関数の損失は生じない．実際には，このような状態は生じえず，上述の理論におけるように，観測器を用いたことによって，初期値誤差による評価関数の損失を生ずる．次に，評価関数の損失を量的に表示する．

$$\begin{aligned}V_1&=[\mathbf{x}^T{}_0,\ \mathbf{z}^T{}_0]\,P_1\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{z}_0\end{bmatrix}\\ &=[\mathbf{x}^T{}_0,\ \mathbf{z}^T{}_0]\begin{bmatrix}P_{11}, & P_{12}\\ P_{21}, & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{z}_0\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (73)$$

$$\begin{aligned}V&=[\mathbf{x}^T{}_0,\ \mathbf{x}^T{}_0S^T]\,P_1\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ S\mathbf{x}_0\end{bmatrix}\\ &=[\mathbf{x}_0{}^T,\ \mathbf{x}^T{}_0S^T]\begin{bmatrix}P_{11}, & P_{12}\\ P_{21}, & P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ S\mathbf{x}_0\end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (74)$$

として，P_1 を分割する．今，$\varDelta V=V_1-V$ とおけば(73)，(74)式より $\varDelta V$：

$$\varDelta V=2\,\mathbf{x}^T{}_0P_{12}\mathbf{e}_0+2\,\mathbf{x}^T{}_0S^TP_{22}\mathbf{e}_0+\mathbf{e}^T{}_0P_{22}\mathbf{e}_0 \qquad (75)$$

である，そこで，V_1 が最小になるように $\mathbf{z}_0$ を決定する．すなわち：

$$\frac{\partial V_1}{\partial\mathbf{z}_0}=0 \text{ と } \mathbf{z}_0=S\mathbf{x}_0 \text{ より } P^T{}_{12}+P_{22}S=0 \qquad (76)$$

(75)と(76)式より

$$\varDelta V=\mathbf{e}_0^T\,P_{22}\mathbf{e}_0 \qquad (77)$$

(70)式を分割した型で演算を行ない，(76)式を用いて整すれば，P_{22} の満足すべきリカッチ代数方程式

$$G^TP_{22}+P_{22}G=-P^TK^TRKP \qquad (78)$$

である．系の初期状態値が未知の場合，上述の理論より，観測器を用いたことにより，評価関数に損失を生ずる．観測器の設計おいて，観測器のパラメータの自由度そして，次元の自由性を利用して，(77)，(78)を考慮して，この損失を減ずる問題が生ずる．これは別の機会に報告する．

7. 例　　題

状態推定問題の例として次の状態方程式と観測方程式の系を考察する．システムは3次元，観測機構は1次元である．システム行列：A，H と観測行列：F，C はそれぞれ

$$A=\begin{pmatrix}a_1 & & O\\ & a_2 & \\ O & & a_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}=[h_1,h_2,\ h_3],\quad F=f,\ C=c$$

観測器条件行列：G そして T は

$$G=\begin{bmatrix}g_{11}, & g_{12}\\ 0, & g_{22}\end{bmatrix},\quad T=\begin{bmatrix}t_1\\ t_2\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}S_{11}, & S_{12}\\ S_{21}, & S_{22}\end{bmatrix}$$

であり，Gの固有値 g_{11}，g_{21} の実部は全て負とする．条件(8)，(9)，(15)より

$f=g_{22}$，$t_1=g_{12}t_2/(g_{22}-g_{11})$，ここで，$\alpha$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ そして，β_1，β_2，β_3 を次のように定める．

$\alpha=g_{12}/(g_{22}-g_{11})$，$\alpha_1=a_1-g_{11}$，$a=a_2-g$，$\alpha_3=a_3-g_{11}$，$\beta_1=a_1-g_{22}$，$\beta_2=a_2-g_{22}$，$\beta_3=a_3-g_{22}$.

この場合 S：

$S_{11}=(\alpha h_1+g_{12}h/\beta_1)ct_2/\alpha_1$，$S_{12}=(\alpha h_2+g_{12}h_2\ /\beta_2)ct_2/\alpha_2$，$S_{13}=(\alpha h_3+g_{12}h_3/_2/\beta_3)ct_2/\alpha_3$，$S_{21}=ct_2h_1/\beta_1$，$S_{22}=ct_2h_2/\beta_2$，$S_{23}=ct_2h_3/\beta_3$

観測器条件行列，観測器パラメータは以上であり，Luenberger が提案したオブザーバ（観測器）では，2次元であるが，ここである意味で，一般化を行うことにより，定義の意味で1次元で構成可能である．状態推定値 $\mathbf{x}=[x_1,\ x_2,\ x_3]^T$ は，1次元観測器を基にして，すなわち

$$\mathring{z}=fz+cy$$

と，出力より：y

$$\hat{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}S\\ \mathbf{H}\end{bmatrix}^{-1}[t_1z,\ t_2z,\ y]^T$$

である．パラメータt_2 とcの自由度が存在する．

以上より，この観測器の特長，従来の最小次元オブザーバの次元以下の観測器の構成が可能ということを例でもって示した．

7. 結　言

観測器の定義をある意味で一般化することにより，初めのオーブザーバ（観測器）の概念，特長を含み，結果的に，従来の観測器にない特長，観測器の次元が系の次元と同一次元においても，出力推定値を構成しないでよいこと．すなわち，最小次元オブザーバ（観測器）型構造を持っている．そして，特殊な場合，推定値が観測器の推定値の線形結合だけで表示できること．観測器の次元を（n－m）次元からn次元の間の次元にすことも，n次元以上にすることも容易にできる．このようにして，観測器のパラメータに自由度があること，さらに次元に自由性が存在することより，これを制御的見地よりいかに決定すべきであるかそして，システムが雑音，そして観測雑音を供う場合，いかなる意味で，最適観測器をいかにして構成すべきであるか，今後の問題として別の機会に報告する．

8. 参考文献

1) D.G. Luenberger, "Observing the state of a linear system". I.E.E. E Trans. Mil. Electron., vol. MIL-8, pp 77—80. Apr. (1964)

2) E. Tse and M. Athans, "Optimal minimal-order observer-estimators for discrete linear time-varying systems" I.E.E. E Trans. Automat. Contro, vol.9 AC-15, pp 416—426, Aug. (1970)

3) A. E. Bryson, Jr., and D.G. Luenberger. "The synthesis of regulator logic state-variable concepts", Proc. I.E.E.E, vol. 58, 1803—1811 (1970)

4) Y. ONDER YUKSEL and J.J Bongiorno, JR, "Observers for Linear Multivariable Systems with Applications", I. E. E. E Trans. Automat. Contro, vol. AC—16, 603—613, Decem. (1971)

5) M. M.Newman, "Optimal and Sub-optimal control using an observer when some of the state variables are not measurable", Int. J. Contr., 9, 284—290(1969)

6) D.G. Luenbdrger, "An Introduction to Observers" I. E. E. E Trans. Automat. Contro, 16 '596—602, decem. (1971)

（昭和50年10月15日受理）