

汎関数展開に基づく非線形系の準最適制御

野村 洋*・田中 正吾**・沖田 豪**

Sub-optimal Control of Nonlinear Systems by Use of Functional Expansions

Hiroshi NOMURA*, Syogo TANAKA** and Tsuyoshi OKITA**

Abstract

This paper is concerned with representing the response of non-linear differential systems by functional expansions, and we consider a suboptimal control problem by using this expansions.

The use of functional expansions to represent the response of dynamic systems is a well-established concept. Since then functional expansions have played an important role in the modeling of nonlinear systems, both when the underlying system equations are known and when the system is characterized only by the availability of input-output data. The dynamic system is described by a systems of nonlinear differential equations and the objective is to obtain a local approximation of the system output by a functional expansion operating on the input. Usually, although not always, the expansion is a truncated power series.

A perturbation method have been applied to optimal control problem in some class of nonlinear systems. We propose a new perturbation method which use functional expansions, and apply this method to nonlinear systems which is described by the Kolmogorov-Gabor's nonlinear differential equation. This equation is very universal, and include Duffing's equation, Van der, Pol's Rayleigh's, etc. ... Examples are given to illustrate the method.

1. 緒 言

実在する数多くのシステムは、多かれ少なかれ非線形性を呈示する。また、現実に対象とするシステムがより広範に及ぶにつれて、複雑多様な非線形性を示す系を取扱う機会が多くなってきた。したがって、非線形システムの制御に関する研究はますます重要になっている。

制御問題については、これまでに特定の形の非線形システムについて、種々の方法が提案されている。しかし、一般には非線形システムの制御方策の決定は、解析的には困難であり、数値解法にたよれば膨大な計算量と記憶容量を必要とする^{1),2)}。このため、従来から非線形システムの制御に対して、摂動法がしばしば用いられている^{3),4)}。しかし、より普遍的な系に対する摂動の与え方については十分な成果が得られていないようである。したがって、ここでは入力階層性に

着目した汎関数展開表示に基づく新たなシステムに対する摂動を考える。

汎関数展開は、ボルテラ級数を始めとして、すでに良く知られた概念であり⁵⁾、非線形システムのモデリング等において、極めて重要な役割をはたしている。最近、E. G. Gilbert は非線形ダイナミカル・システムに対して、新たな汎関数展開表示を提案し、その収束性および近似誤差等について考察している⁶⁾。しかしながら、そこでは基本的な概念は与えられているものの、任意の展開項に対する一般的表示は与えられていない。また、初期値の展開項への組込み方についても、展開の中心が零でない場合しか言及されていない。しかし、この展開表示を実際に非線形システムに適用する場合、これらは重要な課題となる。したがって、ここではまず非線形ダイナミカル・システムの汎関数展開について、任意の展開項に対する一般的表示を導出し、初期値の組込み方について考察している。

次に、汎関数展開表示したシステムについて、その入力に対する階層性に着目した準最適制御方策を与えている。

* 大学院 電子工学専攻

** 電子工学科

2. 問題の設定

システム方程式が次式で表わされる非線形離散値系を考える。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{f}(\cdot)$ はシステムを記述する非線形関数で P 回 Frechet 微分可能とする。また、 $\mathbf{x}(k)$ は状態ベクトルで n_1 次元ベクトル、 $\mathbf{u}(k)$ は入力で n_2 次元ベクトルである。

$$\mathbf{x}(k) = [x^1(k), x^2(k), \dots, x^{n_1}(k)]^T \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(k) = [u^1(k), u^2(k), \dots, u^{n_2}(k)]^T \quad (3)$$

(1) 式の $\mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k))$ は、打切誤差 $O(P)$ を許せば、次の Kolmogorov-Gabor 形非線形階差方程式で表わされる⁷⁾。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)) \\ &= T_{10}[\mathbf{Z}(k)] + \frac{1}{2!} T_{20}[\mathbf{Z}(k)]^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} T_{30}[\mathbf{Z}(k)]^3 + \dots + \frac{1}{P!} T_{P0}[\mathbf{Z}(k)]^P \\ &\quad + O(p), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $\mathbf{Z}(k)$ についての零次の項は、因果律を考慮して零とする。また、 $\mathbf{Z}(k)$ は次式で定義される $n_0 (\triangleq n_1 + n_2)$ 次元ベクトルである。

$$\mathbf{Z}(k) \triangleq [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)] \quad (5)$$

また、 T_{i0} はシステムのパラメータで、 $[\mathbf{Z}(k)]^i$ に対応した次元を持つ。すなわち、

$$\begin{aligned} T_{10} &\sim n_1 \times n_0 \\ T_{20} &\sim n_1 \times n_0 \times n_0 \\ \vdots \\ T_{i0} &\sim n_1 \times \underbrace{n_0 \times n_0 \times \dots \times n_0}_{i \text{ 個}} \end{aligned}$$

である。

(4) 式で表わされる Kolmogorov-Gabor 形非線形階差方程式は、ボルテラ級数表示とも相互に関係し、良く知られた Duffing の方程式や、Van der Pol の方程式、Rayleigh の方程式等を離散化したものを含む普遍的な表示である^{8)~10)}。

また、制御問題を考えるにあたっては、状態 $\mathbf{x}(k)$ 、入力 $\mathbf{u}(k)$ とともに完全可観測と仮定し、次の二次形式評価を用いる。

$$\begin{aligned} J = \sum_{k=1}^N \{ &(\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_d(k))^T Q (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_d(k)) \\ &+ \mathbf{u}(k-1)^T R \mathbf{u}(k-1) \} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\mathbf{x}_d(k)$ は状態 $\mathbf{x}(k)$ の目標値で n_1 次元ベクトル、 Q, R は重みで Q は $n_1 \times n_1$ 次元の非負定値マトリクス、 R は $n_2 \times n_2$ 次元の正定値マトリクスである。

3. システムの汎関数展開表示

3.1 汎関数展開の一般表示

(1) 式で表わされるシステムについて、その複雑多様な非線形性にも対応し得る普遍的表現法を考える。そのような表現法としては、従来からボルテラ級数表示が知られている⁵⁾。しかし、その表示法は普遍的ではあるが、きわめて多くの展開項を必要とし、かつ系統的表示が困難である。E. G. Gilbert は、ボルテラ級数展開表示の概念に基づき、入力の階層性に着目した新たな汎関数展開表示を提案している⁶⁾。しかし、任意の展開項に対する一般表示は与えていない。ここでは、その概念に基づき、一般表示を系統的な形で導出しよう。

いま、 i 次のボルテラ核に対する応答成分を $\mathbf{x}_i(k)$ とすれば、状態 $\mathbf{x}(k)$ はその和として表わされる。

$$\mathbf{x}(k) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{x}_i(k) \quad (7)$$

(1) 式に (7) 式を代入し、初期値を $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ とすれば、次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2!} \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k) \right]^2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{1}{P!} \mathbf{f}^{(P)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{x}_i(k), \mathbf{u}(k) \right]^P \\ &\quad + O(P), \quad \mathbf{z}(0) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{f}^{(i)}(\cdot)$ は $\mathbf{f}(\cdot)$ の $\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)$ についての i 回 Frechet 微分である。また、(7) 式より次式を得る。

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{x}_i(k+1) \quad (9)$$

(8), (9) 式において、入力 $\mathbf{u}(k)$ について同次の階層性分、すなわち、そのボルテラ核に対する応答成分をそれぞれ等置すると、次式を得る。

$$\mathbf{x}_1(k+1) = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{0})[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}(k)]$$

$$\mathbf{x}_2(k+1) = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{0})[\mathbf{x}_2(k), \mathbf{0}] + \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{0}, \mathbf{0})[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}(k)]^2$$

⋮

同様にして、任意の階層成分 $\mathbf{x}_i(k)$ に対する一般表示は、 $\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)$ について i 次の成分の和として、次のように得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i(k+1) &= i\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{0}, \mathbf{0})[\mathbf{x}_i(k), \mathbf{0}] \frac{1}{i!} \\ &+ \frac{i!}{2!} \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \left\{ [\mathbf{x}_{i-1}(k), \mathbf{0}] \cdot \right. \\ &\quad \left. [\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}(k)] \cdot \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{1}{1!} \right. \\ &+ [\mathbf{x}_{i-2}(k), \mathbf{0}] [\mathbf{x}_2(k), \mathbf{0}] \frac{1}{(i-2)!} \cdot \frac{1}{2!} + \dots \\ &\left. + [\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}(k)] [\mathbf{x}_{i-1}(k), \mathbf{0}] \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{(i-1)!} \right\} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{i!}{i!} \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) [\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}(k)]^i \\ &= \sum_{h=1}^i \left\{ \frac{i!}{h!} \mathbf{f}^{(h)}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \sum_{\sum_{l=1}^h j_l = i} \prod_{l=1}^h \right. \\ &\quad \left. [\mathbf{x}_{j_l}(k), \mathbf{u}(k) \delta_{j_l 1}] \frac{1}{j_l!} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、零次の項は因果律を考慮して零とする。また、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

さらに、展開の中心を $(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))$ とすれば、 $\mathbf{u}'(k) = \mathbf{u}(k) - \bar{\mathbf{u}}(k)$ に対する階層成分として、(10) 式に準じて、次の一般表示を得る。

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{h=1}^i \left\{ \frac{i!}{h!} \mathbf{f}^{(h)}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k)) \cdot \sum_{\sum_{l=1}^h j_l = i} \prod_{l=1}^h [\mathbf{x}_{j_l}(k), \mathbf{u}'(k) \delta_{j_l 1}] \frac{1}{j_l!} \right\} \quad (11)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \bar{\mathbf{x}}(k) + \sum_{i'=1}^i \frac{1}{i'!} \mathbf{x}_{i'}(k) \\ \mathbf{u}(k) &= \bar{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{u}'(k) \\ \bar{\mathbf{x}}(k+1) &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k)), \quad \bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。

表記を簡単にするため、次のように定義する。

$$T_i(k) \triangleq \mathbf{f}^{(i)}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k)), \quad T_0(k) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k)) \quad (13)$$

$$\mathbf{Z}_j(k) \triangleq [\mathbf{x}_j(k), \mathbf{u}'(k) \delta_{j 1}] \quad (14)$$

(13), (14) 式を用いれば、(11) 式は次式となる。

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{h=1}^i \left\{ \frac{i!}{h!} T_h(k) \sum_{\sum_{l=1}^h j_l = i} \prod_{l=1}^h \mathbf{Z}_{j_l}(k) \frac{1}{j_l!} \right\} \quad (15)$$

ここで、(15) 式における積和表現

$$\sum_{\sum_{l=1}^h j_l = i} \prod_{l=1}^h \mathbf{Z}_{j_l}(k) \frac{1}{j_l!} \quad (16)$$

を具体的に与えよう。 $h=2, h=3$ に対しては、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sum_{\sum_{l=1}^2 j_l = i} \prod_{l=1}^2 \mathbf{Z}_{j_l} \frac{1}{j_l!} &= \sum_{j_2=1}^{i-1} \frac{\mathbf{Z}_{j_1}(k)}{j_1!} \cdot \frac{\mathbf{Z}_{i-j_1}(k)}{(i-j_1)!} \\ \sum_{\sum_{l=1}^3 j_l = i} \prod_{l=1}^3 \mathbf{Z}_{j_l} \frac{1}{j_l!} &= \sum_{j_2=1}^{i-2} \sum_{j_3=1}^{i-j_1-j_2} \frac{\mathbf{Z}_{j_1}(k)}{j_1!} \cdot \frac{\mathbf{Z}_{j_2}(k)}{j_2!} \cdot \frac{\mathbf{Z}_{i-j_1-j_2}(k)}{(i-j_1-j_2)!} \end{aligned}$$

さらに、一般に $h=q (\leq i)$ のとき、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \sum_{\sum_{l=1}^q j_l = i} \prod_{l=1}^q \mathbf{Z}_{j_l}(k) \frac{1}{j_l!} &= \sum_{j_1=1}^{i-q+1} \sum_{j_2=1}^{i-j_1-q+2} \sum_{j_3=1}^{i-j_1-j_2-q+3} \dots \\ &\dots \sum_{j_{q-1}=1}^{i-\sum_{l=1}^{q-2} j_l-1} \frac{\mathbf{Z}_{j_1}(k)}{j_1!} \cdot \frac{\mathbf{Z}_{j_2}(k)}{j_2!} \cdot \frac{\mathbf{Z}_{j_3}(k)}{j_3!} \dots \frac{\mathbf{Z}_{i-\sum_{l=1}^{q-1} j_l}(k)}{(i-\sum_{l=1}^{q-1} j_l)!} \end{aligned}$$

すなわち、 q 個の和が i となる整数の組 $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_q)$ を考え、それらすべての組合せについて、 $\mathbf{Z}_{j_l}(k)$ の積和を求めれば良い。上述の条件を満たす整数の組 $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_q)$ に対して (16) 式は、 $\mathbf{u}'(k)$ について i 次の階層成分となっている。

3.2 展開の中心と初期値

前節で述べたように、(1) 式で表わされるシステムを、(12)~(15) 式で表現する場合、展開の中心 $(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))$ の与え方、および初期値の取扱いについて考察する必要がある。

非線形システムを考える場合、展開の中心をシステムの特徴を考察して定めることが望ましい。例えば、制御問題を考える場合、展開の中心を最適解とかけ離れたものにとると、制御方策の決定が困難であろう。制御の目的を考えると、展開の中心を目標値に収束あるいは漸近する近似解を選ぶことが望ましい。しかし、

簡単に近似解が得られない場合は、展開の中心を零とせざるをえない。

次に、システムを (12)~(15) 式のように汎関数展開した場合、初期値 \mathbf{x}_0 を階層成分 $\mathbf{x}_i(0)$ にどのように与えるべきかについて考えよう。展開の中心 $(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))$ が零でない場合は、階層成分 $\mathbf{x}_i(k)$ は $\mathbf{u}'(k)$ に対する応答成分と考えられるので、初期値は $\bar{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{0}$ である。次に、展開の中心を零とした場合を考える。(8) 式を $T_i(k), \mathbf{x}(k)$ を用いて表わせれば、次式となる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} T_i(k) [\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k)]^i + O(P) \quad (17)$$

また、(9), (10), (13) 式より次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{x}i(k+1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \sum_{h=1}^i \left\{ \frac{i!}{h!} T_h(k) \sum_{\sum_{j=1}^h j_l=i} \prod_{l=1}^h \right. \\ &\quad \left. [\mathbf{x}_{j_l}(k), \mathbf{u}(k) \delta_{j_l 1}] \frac{1}{j_l!} \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

(17), (18) において、 $k=0$ とし、対応する同次の成分を等置すると、次のようになる。

$$T_1(0) [\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(0)] = T_1(0) \sum_{i=1}^{\infty} [\mathbf{x}i(0), \mathbf{u}(0) \delta_{i1}] \frac{1}{i!}$$

$$\begin{aligned} T_2(0) [\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(0)] &= T_2(0) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\sum_{j=1}^2 j_l=i} \prod_{l=1}^2 \\ &\quad [\mathbf{x}_{j_l}(0), \mathbf{u}(0) \delta_{j_l 1}] \frac{1}{j_l!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_q(0) [\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(0)] &= T_q(0) \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\sum_{j=1}^q j_l=i} \prod_{l=1}^q \\ &\quad [\mathbf{x}_{j_l}(0), \mathbf{u}(0) \delta_{j_l 1}] \frac{1}{j_l!} \end{aligned}$$

任意のシステムおよび任意の入力 $\mathbf{u}(0)$ について次の条件が満たされ、かつそのときのみ上式は成り立つ。

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{0}, \quad i \geq 2 \end{cases} \quad (19)$$

したがって、(19) 式から各階層成分に対する初期値は一意に定められる。

3.3 段数と次数との関係

前節では、入力 $\mathbf{u}(k)$ に対する階層成分 $\mathbf{x}_i(k)$ の一般表示を与えた。ここでは、その制御問題への適用を

考え、時間経過と階層成分の次数との関係について考察する。

いま、この表現法を用いて N 段制御過程を考え、(4) 式において有限な P が与えられるとする。このとき、(13) 式で表わされる $f(\cdot)$ の i 回微分 $T_i(k)$ は、

$$T_i(k) \begin{cases} \neq \mathbf{0}, & 1 \leq i \leq P \\ = \mathbf{0}, & i > P \end{cases} \quad (20)$$

となる。また、展開の中心を零とすれば (19) 式より初期値は $\mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_0$ となる。このことを考えれば、制御過程の第 1 段目では、(15) 式の右辺において値を持つ最大の次数の項は $T_P(0) [\mathbf{x}_1(0), \mathbf{u}(0)]^P$ となる。そのときの左辺は $\mathbf{x}_P(1)$ である。したがって、第 1 段目の最大次数の階層成分は $\mathbf{x}_P(1)$ である。第 2 段目でも同様に考えると、最大の次数の項は $T_P(1) [\mathbf{x}_P(1), \mathbf{0}]^P$ となる。したがって、第 2 段目の最大次数の階層成分は $\mathbf{x}_{P^2}(2)$ となる。第 N 段目を考えると、(15) 式の右辺で値を持つ最大の次数の項は $T_P(N-1) [\mathbf{x}_{P^{N-1}}(N-1), \mathbf{0}]^P$ となる。そのときの右辺は $\mathbf{x}_{P^N}(N)$ である。したがって、(4) 式で表わされるシステムの N 段制御過程を考える場合、最大 P^N 次の階層成分まで考慮すれば十分である。

4. 汎関数展開を用いた制御

4.1 システムに対する摂動

システムを汎関数展開表示し、階層的に摂動を与える。すなわち、(12)~(15) 式でシステムを表現しよう。システムを汎関数展開表示した場合、階層成分の次数を上げると、状態 $\mathbf{x}(k)$ はより正確にシステムの非線形性を表現できる。そこで、制御方策として次のような手順を踏まえることを考えた。

I. 展開の中心を求める。

II. l 次の階層成分まで考慮した摂動を与え、解を求める。

III. l を逐次増し、II の手順を繰り返す。

次に、上述の個々の手順について、詳しく述べる。

4.1.1 展開の中心の決定

3.2 で述べたように、非線形システムを考える場合、展開の中心の選択は重要である。目標値に収束あるいは漸近する近似解を展開の中心にとるのが妥当である。近似解を得る手法としては、逐次最適化法、逐次線形化法等が知られている。しかし、両者とも簡便な手法であるが、その適用範囲には限界がある。また、システムが次の形をしているとき、線形解を基本として目標値に漸近する解を得ることが考えられる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{h}(\mathbf{x}(k)) \quad (21)$$

ただし、 $\mathbf{h}(\cdot)$ はシステムの実非線形部分である。まず、 $\mathbf{h}(\cdot)$ を除いたシステムを考え、その解を $(\mathbf{x}_a(k), \mathbf{u}_a(k))$ とすれば、この $\mathbf{x}_a(k)$ を解とするような入力 $\mathbf{u}_b(k)$ を (21) 式を用いて求める。

$$\mathbf{x}_b(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_b(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}_b(k) + \mathbf{h}(\mathbf{x}_a(k)) \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{B}\mathbf{x}_a(k) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_a(k)) + \mathbf{B}\mathbf{u}_b(k) \\ \mathbf{x}_b(k) = \mathbf{x}_a(k) \end{array} \right. \quad (23)$$

$$(24)$$

ここで、(23) 式において、 $\mathbf{u}_b(k)$ についての逆変換が可能と仮定する。

また、有限整定の手法を用いて近似解を求めることも考えられる。

4.1.2 階層的摂動

l 次の階層成分まで考慮した摂動を与え、解を求める。このときの解を $(\mathbf{x}_{(l)}(k), \mathbf{u}_{(l)}(k))$ 、前段の解を $(\mathbf{x}_{(l-1)}(k), \mathbf{u}_{(l-1)}(k))$ とし、次式を考える。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{(l)}(k) = \mathbf{u}_{(l-1)}(k) + \Delta\mathbf{u}_{(l)}(k), \quad \mathbf{u}_{(0)}(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \mathbf{x}_{(0)}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} \mathbf{x}_i(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{h=1}^i \left\{ \frac{i!}{h!} T_h(k) \sum_{\substack{h \\ \sum_{q=1}^h j_q = i}} \prod_{q=1}^h \left[\mathbf{x}_{j_q}(k), \mathbf{u}_{(l)}(k) \delta_{j_q 1} \right] \frac{1}{j_q!} \right\} \end{array} \right. \quad (25)$$

ここでは、システムに対して摂動を行なっているので、 $\Delta\mathbf{u}_{(l)}(k)$ の2次以上の項は無視できるものとする。この近似を行なった後でも、 $\mathbf{x}_{(l)}(k), \mathbf{u}_{(l-1)}(k)$ については非線形性を考慮している。さらに、システムを次式のような $\Delta\mathbf{u}_{(l)}(k)$ について線形な表現に書き改めることができる。

$$\mathbf{x}_{(l)}(k+1) = \mathbf{A}_l(k)\mathbf{x}_{(l)}(k) + \mathbf{B}_l(k)\Delta\mathbf{u}_{(l)}(k) + \mathbf{C}_l(k) \quad (26)$$

ここで、行列 $\mathbf{A}_l(k), \mathbf{B}_l(k), \mathbf{C}_l(k)$ は $\mathbf{u}_{(l-1)}(k)$ および階層成分 $\mathbf{x}_1(k) \sim \mathbf{x}_{l-1}(k)$ を含んでいる。

次に、これらの行列を具体的に表わそう。 $l=1$ のとき、(25) 式より次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{(1)}(k) = \mathbf{u}_{(0)}(k) + \Delta\mathbf{u}_{(1)}(k), \quad \mathbf{u}_{(0)}(k) = \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \mathbf{x}_{(1)}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{x}_1(k), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1(k+1) = T_1(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(1)}(k)] \end{array} \right. \quad (27)$$

(26) 式のように書き改めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{(1)}(k+1) &= T_0(k) + T_1(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(1)}(k)] \\ &= \mathbf{A}_1(k)\mathbf{x}_{(1)}(k) + \mathbf{B}_1(k)\Delta\mathbf{u}_{(1)}(k) + \mathbf{C}_1(k) \end{aligned} \quad (28)$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_1(k) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \\ \mathbf{B}_1(k) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))}{\partial \mathbf{u}(k)} \\ \mathbf{C}_1(k) = T_0(k) \end{array} \right. \quad (29)$$

である。同様にして、 $l=2$ のときには次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_{(2)}(k) = \mathbf{u}_{(1)}(k) + \Delta\mathbf{u}_{(2)}(k) \\ \mathbf{x}_{(2)}(k) = \bar{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{x}_1(k) + \frac{1}{2!} \mathbf{x}_2(k) \\ \mathbf{x}_1(k+1) = T_1(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(2)}(k)] \\ \mathbf{x}_2(k+1) = T_1(k)[\mathbf{x}_2(k), \mathbf{0}] + T_2(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(2)}(k)]^2 \end{array} \right. \quad (30)$$

(30) 式を書き改めると、次式となる。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(k+1) &= T_0(k) + T_1(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(2)}(k)] \\ &\quad + \frac{1}{2!} \{ T_1(k)[\mathbf{x}_2(k), \mathbf{0}] + T_2(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(2)}(k)]^2 \} \\ &= \mathbf{A}_2(k)\mathbf{x}_{(2)}(k) + \mathbf{B}_2(k)\Delta\mathbf{u}_{(2)}(k) + \mathbf{C}_2(k) \end{aligned} \quad (31)$$

ただし、

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_2(k) = \mathbf{A}_1(k) \\ \mathbf{B}_2(k) = \mathbf{B}_1(k) + T_2(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(1)}(k)] \\ \mathbf{C}_2(k) = \mathbf{C}_1(k) + \frac{1}{2!} T_2(k)[\mathbf{x}_1(k), \mathbf{u}_{(1)}(k)]^2 \end{array} \right. \quad (32)$$

である。

一般に、(25)、(26) 式に対応して、行列 $\mathbf{A}_l(k), \mathbf{B}_l(k), \mathbf{C}_l(k)$ は次のように表わされる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_l(k) = \mathbf{A}_1(k) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \\ \mathbf{B}_l(k) = \mathbf{B}_{l-1}(k) + \sum_{h=2}^l \left\{ \frac{1}{(h-1)!} T_h(k) \sum_{\substack{h \\ \sum_{q=1}^h j_q = l-1}} \prod_{q=1}^{h-1} \left[\mathbf{x}_{j_q}(k), \mathbf{u}(k) \delta_{j_q 1} \right] \frac{1}{j_q!} \right\}, \quad l \geq 2, \\ \mathbf{B}_1(k) = \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k))}{\partial \mathbf{u}(k)} \\ \mathbf{C}_l(k) = \mathbf{C}_{l-1}(k) + \sum_{h=2}^l \left\{ \frac{1}{h!} T_h(k) \sum_{\substack{h \\ \sum_{q=1}^h j_q = l}} \prod_{q=1}^h \left[\mathbf{x}_{j_q}(k), \mathbf{u}(k) \delta_{j_q 1} \right] \frac{1}{j_q!} \right\}, \quad l \geq 2, \\ \mathbf{C}_1(k) = T_0(k) = f(\bar{\mathbf{x}}(k), \bar{\mathbf{u}}(k)) \end{array} \right. \quad (33)$$

(25), (26), (33) 式を考えると, 従来からこのような最適化問題に対して, DP 法, MP 法等が知られている. ここでは便宜上 DP 法を用いて $\Delta \mathbf{u}_{(l)}(k)$ を得よう.

4.2 DP法を用いた準最適制御

(26) 式を用いて評価関数 (6) 式を最小とするような, 最適制御入力を具体的に求めよう. ここでは, (26) 式が $\Delta \mathbf{u}_{(l)}(k)$ について線形な式で表現されていることに注目し, 最適制御入力 $\mathbf{u}_{(l)}(k)$ を DP 法を形式的に用いて求める. 表記上の煩わしさを避けるため, 前節における $\mathbf{x}_{(l)}(k)$, $\mathbf{u}_{(l)}(k)$, $\mathbf{u}_{(l-1)}(k)$, $\Delta \mathbf{u}_{(l)}(k)$, $A_i(k)$, $B_i(k)$, $C_i(k)$ を単に $\mathbf{x}(k)$, $\mathbf{u}(k)$, $\mathbf{u}'(k)$, $\Delta \mathbf{u}(k)$, $A(k)$, $B(k)$, $C(k)$ とする.

最終段 (N 段) を考えると, 評価 (6) 式を最小とする制御入力は以下のようにして求めることができる. まず, 次式を定義しよう.

$$g_1(\mathbf{x}(N-1)) \triangleq (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_d(k))^T Q (\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}_d(k)) + \mathbf{u}(k-1)^T R \mathbf{u}(k-1) \quad (34)$$

$\mathbf{x}(k)$ に (26) 式を用いれば, 次の評価を得る.

$$g_1(\mathbf{x}(N-1)) = (A(N-1)\mathbf{x}(N-1) + B(N-1)\Delta \mathbf{u}(N-1) + C(N-1) - \mathbf{x}_d(N))^T Q (A(N-1)\mathbf{x}(N-1) + B(N-1)\Delta \mathbf{u}(N-1) + C(N-1) - \mathbf{x}_d(N)) + (\mathbf{u}'(N-1) + \Delta \mathbf{u}(N-1))^T R (\mathbf{u}'(N-1) + \Delta \mathbf{u}(N-1)) \quad (35)$$

$g_1(\mathbf{x}(N-1))$ を最小とする $\Delta \mathbf{u}(N-1)$ を $\Delta \mathbf{u}^*(N-1)$ とすると, (35) 式の最適条件より次式を得る.

$$\frac{\partial g_1(\mathbf{x}(N-1))}{\partial \Delta \mathbf{u}(N-1)} = 2\{(A(N-1)\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{x}_d(N) + B(N-1)\Delta \mathbf{u}^*(N-1) + C(N-1))^T Q B + (\mathbf{u}'(N-1) + \Delta \mathbf{u}^*(N-1))^T R\} = \mathbf{0}^T \quad (36)$$

したがって, 次式を得る.

$$\Delta \mathbf{u}^*(N-1) = P_{N-1}(A(N-1)\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{x}_d(N) + G_{N-1}) \quad (37)$$

ただし,

$$\begin{cases} P_{N-1} \triangleq -(B(N-1)^T Q B(N-1) + R)^{-1} B(N-1)^T Q \\ G_{N-1} \triangleq P_{N-1} C(N-1) - (B(N-1)^T Q B(N-1) + R^{-1} R \mathbf{u}'(N-1)) \end{cases}$$

である. この $\Delta \mathbf{u}^*(N-1)$ を用いれば, (35) 式の $g_1(\mathbf{x}(N-1))$ は次のように書き改められる.

$$g_1(\mathbf{x}(N-1)) = (A(N-1)\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{x}_d(N) + S_{N-1}^{-1} W_{N-1})^T S_{N-1} (A(N-1)\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{x}_d(N) + S_{N-1}^{-1} W_{N-1}) + \dots \quad (38)$$

ただし,

$$\begin{cases} S_{N-1} \triangleq (I + B(N-1)P_{N-1})^T D_N (I + B(N-1)P_{N-1}) + P_{N-1}^T R P_{N-1} \\ W_{N-1} \triangleq (I + B(N-1)P_{N-1})^T D_N (B(N-1)G_{N-1} + C(N-1) + P_{N-1}^T R (G_{N-1} + \mathbf{u}'(N-1))) \end{cases}$$

である.

次に, 第 ($N-1$) 段を考えると, 同様にして次の評価を得る.

$$g_2(\mathbf{x}(N-4)) = (\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{x}_d(N-1))^T Q (\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{x}_d(N-1)) - \mathbf{x}_d(N-1) + \mathbf{u}(N-2)^T R \mathbf{u}(N-2) + g_1(\mathbf{x}(N-1)) = (\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{Z}_d(N-1))^T D_{N-1} (\mathbf{x}(N-1) - \mathbf{Z}_d(N-1)) + \mathbf{u}(N-2)^T R \mathbf{u}(N-2) + \dots \quad (39)$$

ただし,

$$\begin{cases} D_{N-1} \triangleq Q + A(N-1)^T S_{N-1} A(N-1) \\ \mathbf{Z}_d(N-1) \triangleq D_{N-1}^{-1} \{Q \mathbf{x}_d(N-1) + A(N-1)^T S_{N-1} \mathbf{x}_d(N) - A(N-1)^T W_{N-1}\} \end{cases}$$

である. (39) 式は (34) 式と同じ形となっている. したがって第 N 段を考えた場合と同様にして $\Delta \mathbf{u}^*(N-2)$ を求めることができる.

この操作を順次続けると, 一般に, 第 ($N-j$) 段では次の関数系となる.

$$\Delta \mathbf{u}^*(N-j) = P_{N-j}(A(N-j)\mathbf{x}(N-j) - \mathbf{Z}_d(N-j+1) + G_{N-j}) \quad (40)$$

ただし,

$$P_{N-j} \triangleq -(B(N-j)^T Q B(N-j) + R)^{-1} B(N-j)^T Q \quad (41)$$

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_d(N-j) \triangleq D_{N-j}^{-1} \{Q \mathbf{x}_d(N-j) - A(N-j)^T S_{N-j} \mathbf{x}_d(N-j+1) - A(N-j)^T W_{N-j}\}, \\ \mathbf{Z}_d(N) = \mathbf{x}_d(N) \end{cases} \quad (42)$$

$$G_{N-j} \triangleq P_{N-j} C(N-j) - (B(N-j)^T Q B(N-j) + R)^{-1} u'(N-j) \quad (43)$$

$$S_{N-j} \triangleq (I + B(N-j) P_{N-j})^T D_{N-j+1} (I + B(N-j) P_{N-j}) + P_{N-j}^T R P_{N-j} \quad (44)$$

$$D_{N-j} \triangleq Q + A(N-j)^T S_{N-j} A(N-j), \quad D_N = Q \quad (45)$$

$$W_{N-j} \triangleq (I + B(N-j) P_{N-j})^T D_{N-j+1} (B(N-j) G_{N-j} + C(N-j)) + P_{N-j}^T R (N-j + u'(N-j)) \quad (46)$$

である。

この計算を順次行なえば、準最適制御入力 $u^*(k)$ を求めることができる。

5. デジタル・シミュレーション

本手法の有効性を確認するため、非線形性の強い不安定な系を対象とし、10段階過程を考えた。状態 $x(k)$ を2次元ベクトル、入力 $u(k)$ をスカラーとし、目標値 $x_d(k)$ を零とした。また(6)式の評価 J の重み Q, R として次の値を用いた。

$$Q = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad R = 1.0$$

1) 双線形システム

双線形システムは原子核反応炉や熱交換機などの工学システムをはじめ、生物、経済システムについて有用である。ここでは、次のシステムについてシミュレーションを行なった。

$$\begin{cases} x^1(k+1) = x^2(k) \\ x^2(k+1) = x^1(k) - 1.5x^2(k) + 0.1u(k) \\ \quad + x^1(k)u(k) - 1.5x^2(k)u(k), \end{cases}$$

Table 1 Trajectory of $X^2(K)$ with $U(K)=0$ in case 1

K	L=0 $J=0.223696 \times 10^2$	
	U(K)	$X^2(K)$
0	0.0	0.10000×10^1
1	0.0	-0.50000×10^0
2	0.0	0.17500×10^1
3	0.0	-0.31250×10^1
4	0.0	0.64375×10^1
5	0.0	-0.12781×10^2
6	0.0	0.25609×10^2
7	0.0	-0.51195×10^2
8	0.0	0.10240×10^3
9	0.0	-0.20480×10^3
10	0.0	0.40960×10^3

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

制御入力 $[u(k)] = \mathbf{0}$ としたときの状態 $x^2(k)$ を Table 1 に示す。このシステムについては、展開の中心を零とし、階層成分の次数を10次としたときのシミュレーション結果を Table 2 に示す。また、そのときの解軌跡を Fig. 1~2 に示す。比較のため、逐次最適化法、逐次線形化法により解を求めた。その結果を Table 3 Table 4 に示す。また、階層成分を順次10次まで上げたときの評価 J の値を Table 5 に示す。

Table 2 Trajectory of $X(K), U(K)$ with proposed method in case 1

K	L=10 $J=0.309439 \times 10^1$	
	U(K)	$X^2(K)$
0	-0.38956×10^0	0.10000×10^1
1	-0.93154×10^0	-0.34418×10^0
2	-0.12426×10^1	0.10656×10^{-1}
3	-0.35509×10^0	-0.36887×10^{-1}
4	0.19664×10^0	0.70463×10^{-2}
5	-0.27380×10^0	-0.37124×10^{-1}
6	0.44406×10^{-1}	0.18177×10^{-1}
7	-0.16302×10^0	-0.62808×10^{-1}
8	-0.43391×10^{-1}	0.77766×10^{-1}
9	-0.11044×10^0	-0.17601×10^0
10	0.0	0.29299×10^0

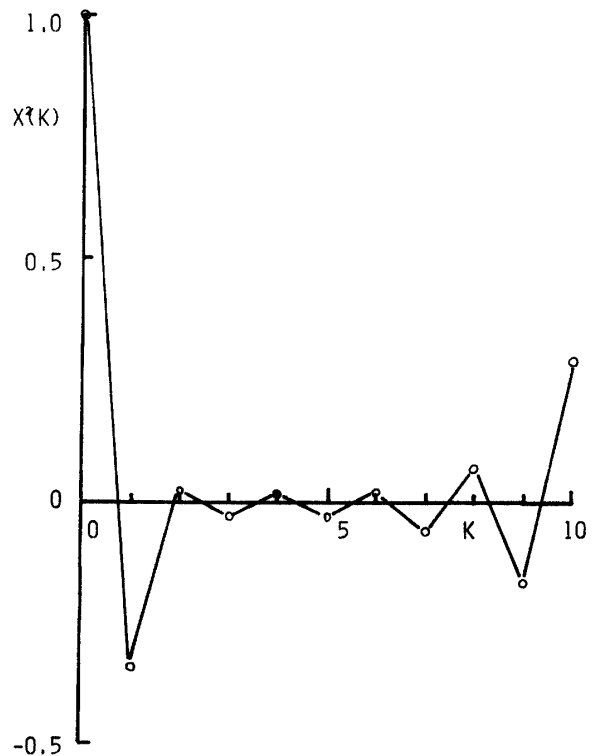


Fig. 1 Trajectory of $x^2(k)$ in case 1.

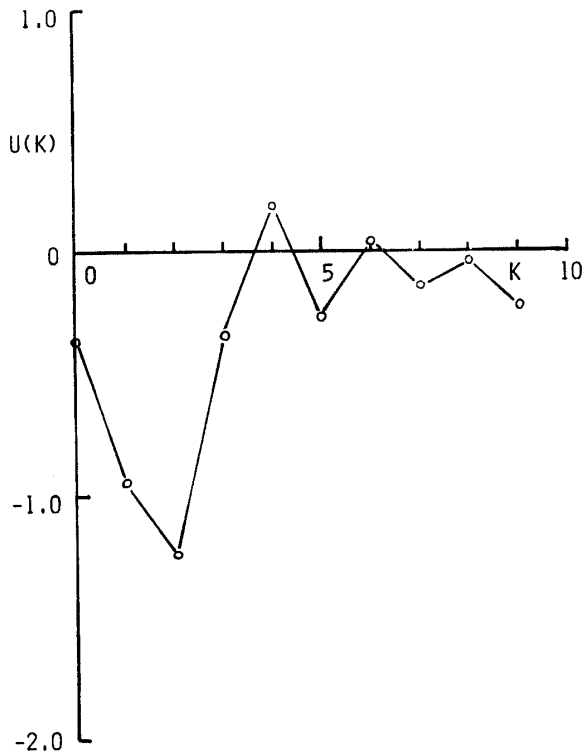


Fig. 2 Trajectory of $U(k)$ in case 1.

Table 3 Trajectory of $X^2(K)$, $U(K)$ with sequential optimization in case 1

$J=0.180682 \times 10^2$		
K	$U(K)$	$X^2(k)$
0	-0.51724×10^0	0.10000×10^1
1	-0.20083×10^0	-0.29310×10^0
2	-0.70120×10^0	0.11304×10^1
3	-0.37239×10^0	-0.66435×10^0
4	-0.66910×10^0	0.12977×10^1
5	-0.44300×10^0	-0.93084×10^0
6	-0.65266×10^0	0.14562×10^1
7	-0.48040×10^0	-0.11473×10^1
8	-0.64262×10^0	0.16028×10^1
9	-0.50344×10^0	-0.13335×10^1
10	0.0	0.17388×10^1

2) Duffing 形システム

非線形システムを記述する Duffing の方程式について、シミュレーションを行なった。

$$\begin{aligned}
 \text{a). } \begin{cases} x^1(k+1) = x^2(k) \\ x^2(k+1) = -x^1(k) + 2x^2(k) + u(k) \\ \quad + 0.4[x^2(k)]^2 + 0.4[x^2(k)]^3, \end{cases} \\
 x_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (48)
 \end{aligned}$$

Table 4 Trajectory of $X^2(K)$, $U(K)$ with recursive linearization in case 1

$J=0.644395 \times 10^{17}$		
K	$U(K)$	$X^2(k)$
0	0.45306×10^1	0.10000×10^1
1	-0.11511×10^4	-0.23122×10^1
2	0.97668×10^2	-0.52542×10^4
3	-0.64269×10^1	0.77741×10^6
4	0.21418×10^1	0.63570×10^7
5	-0.16676×10^1	-0.27516×10^8
6	0.96152×10^0	-0.31798×10^8
7	-0.51820×10^0	0.39584×10^8
8	0.24723×10^0	-0.43927×10^8
9	-0.15226×10^0	0.13155×10^9
10	0.0	-0.20452×10^9

Table 5 Criterion J in case 1

Degree of power series	Criterion J
0	0.2237×10^6
1	0.2000×10^{10}
2	0.1277×10^5
3	0.1640×10^4
4	0.4894×10^3
5	0.5315×10^2
6	0.1877×10^2
7	0.3900×10^1
8	0.3173×10^1
9	0.3125×10^1
10	0.3094×10^1
Sequential optimization	0.1807×10^2
Recursive linearization	0.6444×10^{17}

$$\begin{aligned}
 \text{b). } \begin{cases} x^1(k+1) = x^2(k) \\ x^2(k+1) = -x^1(k) + 2x^2(k) + u(k) \\ \quad + 2[x^2(k)]^2 + 2[x^2(k)]^3, \end{cases} \\
 x_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix} \quad (49)
 \end{aligned}$$

a) は12段目、b) は10段目で発散する非線形性の強い系である。このシステムについては、展開の中心として次の4組を考えた。

- ①. $(0, 0)$
- ②. 逐次最適化法による近似解
- ③. 逐次線形化法による近似解
- ④. 線形解を基本として求めた近似解 (参4, 1)

この4組の展開の中心のもとに、本方法と逐次線形化法を用いて解を求め比較した。それぞれの場合の評価 J の値を a) Table 6, b) Table 7 に示す。また、a) のシステムで、展開の中心を $(0, 0)$ とし、本方法で求めた準最適解の軌跡を Fig. 3~4 に示す。

Table 6 Criteria in case 2-a

Nominal solution	(0, 0)	Sequential optimization 0.6407×10^1	Finite setting time method 0.4280×10^1	Quasilinearization 0.3619×10^1
Optimization method				
Proposed method	0.3523×10^1	0.3523×10^1	0.3523×10^1	0.3523×10^1
Recursive linearization	0.5520×10^6	0.3523×10^1	0.3523×10^1	0.3523×10^1

Table 7 Criteria in case 2-b

Nominal solution	(0, 0)	Sequential optimization 0.7237×10^{76}	Finite setting time method 0.3500×10^2	Quasilinearization 0.3657×10^2
Optimization method				
Proposed method	0.3360×10^2	0.1002×10^{71}	0.3360×10^2	0.3360×10^2
Recursive linearization	0.1012×10^{71}	0.1048×10^{73}	0.3360×10^2	0.3360×10^2

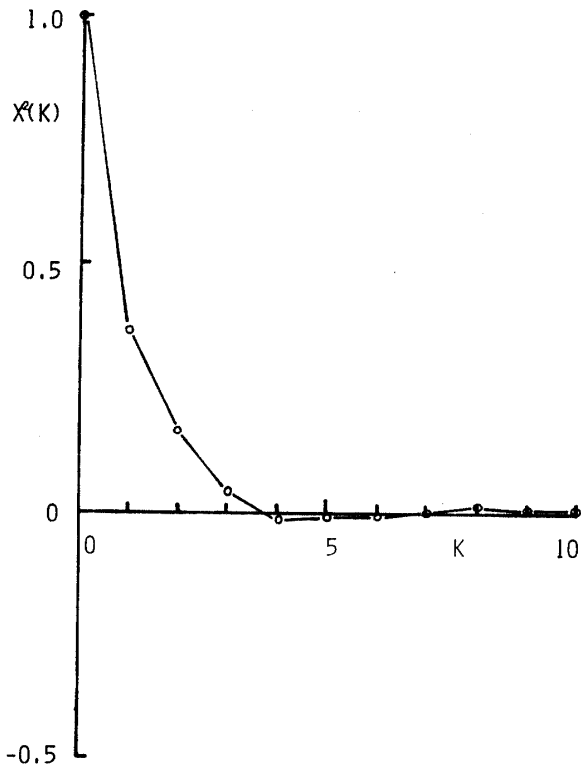


Fig. 3 Trajectory of $x^2(k)$ in case 2-a.

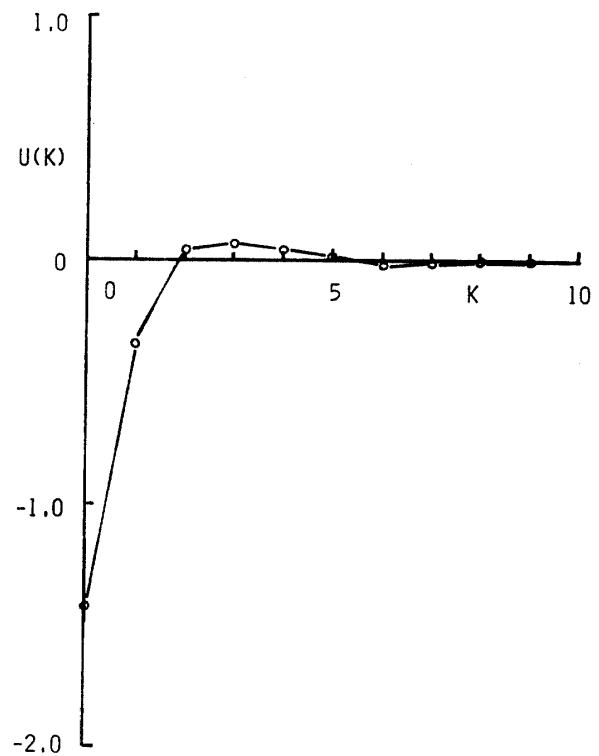


Fig. 4 Trajectory of $u(k)$ in case 2-a.

双線形システムでは、階層成分の次数を順次上げることによって、モデルをシステムに近づけ、準最適解が最適解に収束する傾向を確認している。(47)式のシステムにおいて10段過程を考える。3.3の考察から必要な階層成分の次数を求めると、次のようになる。双線形システムでは $P=2$ で、しかも $\partial^2 f(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) / \partial x(k) \partial x(k) = 0, \partial^2 f(\bar{x}(k), \bar{u}(k)) / \partial u(k) \partial u(k) = 0$ である。したがって、そのことを考慮すれば、必要な階層成分

の次数は11となる。よって、階層成分の次数を11次までとれば、システムを完全に表現できる。ここでは、階層成分の次数を10次まで順次上げて行き、その影響を確認した。(Table 5)この例では、階層成分の次数を8次以上とれば、ほぼ収束している。逐次最適化法、逐次線形化法と比較してもその優位性がうかがえる。

Duffing 形システムについては、4組の展開の中心のもとで、階層成分による摂動法と逐次線形化法とに

より制御方策を求め、それぞれの場合について比較検討した。Case 2-a では、展開の中心を②, ③, ④にとった場合、これらは有効な近似解となっており、準最適解を求める際の収束を速めることができた。本方法では、展開の中心を① ($\mathbf{0}, \mathbf{0}$) とした場合でも同等の解を得ているが、逐次線形化法では展開の中心が最適解とかけ離れているため、収束する傾向が見られなかった。

Case 2-b では、さらに非線形性の強い系について考察した。展開の中心を②にとった場合は有効な近似解になっておらず、準最適解を求めることができなかった。展開の中心を① ($\mathbf{0}, \mathbf{0}$) とした場合、もはや逐次線形化法では適応することができず、発散した。しかし、本方法によれば解は収束し、準最適解を求めることができた。

考察の対象としたシステムについては展開の中心を ($\mathbf{0}, \mathbf{0}$) も含めて適切にとり、階層的に摂動を与えることにより準最適解を得られることが確認された。また、有効な展開の中心を用いれば、解の収束を速めることができた。なお、本方法の適用範囲についてはさらに考察する必要がある。

6. 結 言

本論では、非線形システムの汎関数展開の一般表示を導出し、その表現に基づいて階層的な摂動を与えることにより、新たな制御方策を与えた。

まず、汎関数展開の一般表示を与え、さらにシステムの初期条件を展開項ほ付与する方法について考察した。

次に、汎関数展開表示に基づいて、入力階層性に着目した摂動法を適用することにより、新たな制御方策を与えた。システムの非線形性に適合した高次の階層成分まで考察することにより、最適解に収束する準

最適解を得ることが可能である。また、展開の中心を適切に与えれば、より広範な非線形システムに対しても適用可能となり、解の収束性を高めることができる。ここでは、最適化の手法として DP 法を用いたが、離散形最大原理の適用も考えられる。これについては、今後もさらに検討を進める必要がある。最後に、御討論いただいた小林康秀助手に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) J. T. Tou: 現代制御理論, コロナ社 (1964)
- 2) R. Bellman: Introduction to the mathematical theory of control processes, Academic Press, New York, (1971) p.
- 3) P. K. R. Rajagopalan and D. S. Naidu: A singular perturbation method for discrete control systems, Int. J. Control, **132**, 925/936 (1980)
- 4) M. Ardema: Nonlinear singularly perturbed optimal control problem with singular arcs, Automatica **19**, 99/104 (1980)
- 5) V. Volterra: Theory of functionals, Blackie, London, (1930) p.
- 6) E. G. Gilbert: Functional expansions for the response of nonlinear differential systems, IEEE, Trans. Automat. Contr. AC-**22**, 909/921 (1977)
- 7) D. Gabor and W. P. L. Wilby: Proc. Instn. Elect. Engrs., B. **108**, 422 (1961)
- 8) 清水: 非線形振動論, 培風館 (1965)
- 9) 山口: 非線形現象の数学, 朝倉書店 (1972)
- 10) 安田, 平井: 線形状態フィードバックによる双線形システムの安定化と漸近安定領域の評価, 計測自動制御学会論文誌, **16**, 852/857 (1980)
- 11) 沖田他: 汎関数展開に基づく非線形系の一般表示, 昭和 55 年度電気四学会中国支部連合大会 (1980)
- 12) 沖田他: 汎関数展開に基づく非線形系の準最適制御, 第 23 回自動制御連合講演会 (1980)

(昭和 56 年 4 月 1 日 受理)