

# 走行従動荷重を受ける梁の動的応答

會田 忠義\*・小松 茂生\*\*

Dynamic Response of Beams under Travelling Follower Loads

Tadayoshi AIDA and Shigeo KOMATSU

## Abstract

An analytical example of dynamic problems of a simple beam under travelling follower load which mean follower load moving along the axis of beam has not been reported up to this time, but it is important to analysis of dynamic response for design of beam under travelling follower load due to linear motor car. In this paper, dynamic characteristic of beams under a single travelling follower load or travelling follower load system were investigated and following statements were clarified; displacements of maximum response due to a single travelling follower load are larger than maximum displacements due to unidirectional one and parametrically excited vibration occurs in a beam under travelling load system.

## 1. まえがき

橋上を走行する鉄道車両のピッチングなどにもなう軌道に及ぼす周期力は橋面に垂直に作用しながら移動する。これらは橋のねじり回転にもなってその作用方向がねじり回転に追従する成分をもつことが予想される。特に、超電導反発形磁気浮上式鉄道では、車両と軌道間の磁気反発力は常に橋面に垂直に作用することから、橋梁のねじり回転にもなう走行従動荷重を梁に与えることとなる。

これまでの一般の走行荷重は重力による鉛直荷重(一定方向力)が支配的であることから、現在までに多くの詳細にわたる研究がなされてきた。しかし、磁気浮上式鉄道車両による走行従動荷重を受ける梁の問題は、荷重が非保存力であることから、これまでに解析された例はなく、極めて興味深い問題である。

本研究は、上記の問題をモデル化して走行する集中従動荷重を受ける梁の問題に置換し、その動的挙動を調査したものである。解析に当たって、荷重の従動に対してのみ梁の変形の影響を考慮し、梁の運動に対しては微小変形理論を適用した。運動方程式は荷重の質量を考慮し、集中従動荷重が連続走行する場合について求

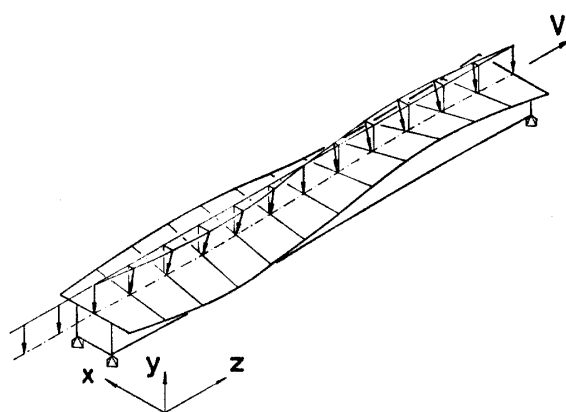


Fig. 1 Beam under travelling follower load system.

め、単一の走行従動荷重による梁の挙動、荷重質量の影響および連行荷重による動的挙動も示した。

## 2. 走行従動荷重作用時の梁の運動方程式

### 2.1 運動方程式

Fig. 2 に示すように、薄肉断面の重心  $G$  に原点を置く座標を設ける。  $x$  および  $y$  軸は断面の主軸に、  $z$  軸は梁軸に一致させる。荷重は鉛直荷重  $q_v(z)$  のみを考慮する。 Fig. 2 に示すように、せん断中心  $S$  の変位を  $(u_s, v_s, w_s)$ 、重心の変位を  $(u_G, v_G, w_G)$ 、ねじり角を  $\theta$  とする。

\* 建設工学科

\*\* 大学院 土木工学専攻

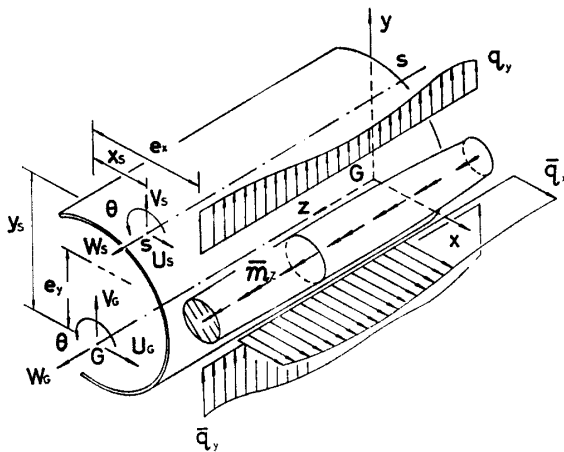


Fig. 2 Displacements of thin-walled member with open cross-section.

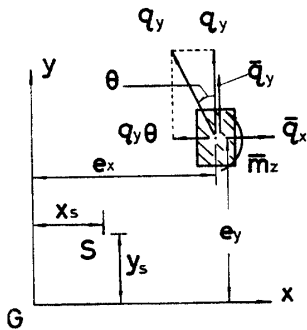


Fig. 3 Follower loads and inertia forces.

$q_y(z)$  は梁のねじり回転とともにその作用方向を変えるだけであると仮定すると、梁のねじりによって、 $q_y(z)$  は次のように変化する。(Fig. 3 参照)

$x$  方向…… $-q_y\theta$ ,  $y$  方向…… $q_y$

さらに、荷重が梁とともに運動するので、荷重の質量による慣性力  $\bar{q}_x, \bar{q}_y$  および慣性偶力  $\bar{m}_z$  が生じる。

したがって、せん断中心に作用する力は

$x$  方向…… $-q_y\theta + \bar{q}_x$

$y$  方向…… $q_y + \bar{q}_y$

モーメント…… $q_y\theta(e_y - y_s) + q_y(e_x - x_s) + \bar{m}_z - \bar{q}_x(e_y - y_s) + \bar{q}_y(e_x - x_s)$

となり、梁の運動方程式は次式で表わされる。

$$m\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} + y_s \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}\right) + EI_{xx} \frac{\partial^4 u_s}{\partial z^4} + q_y \theta - \bar{q}_x = 0, \quad \dots (2.1)$$

$$m\left(\frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^3}\right) + EI_{yy} \frac{\partial^4 v_s}{\partial z^4} - q_y - \bar{q}_y = 0, \quad \dots (2.2)$$

$$\begin{aligned} \mu I_{ps} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + m\left(y_s \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - x_s \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2}\right) + EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GK \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \\ - q_y \theta (e_y - y_s) - q_y (e_x - x_s) - \bar{m}_z + \bar{q}_x (e_y - y_s) \\ - \bar{q}_y (e_x - x_s) = 0, \quad \dots (2.3) \end{aligned}$$

$$m \frac{\partial^2 w_G}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 w_G}{\partial z^2} = 0, \quad \dots (2.4)$$

ここで、

$m$ : 梁の単位長さ質量、

$\mu I_{ps}$ : 梁の断面のせん断中心に関する質量の慣性モーメント、

$EI_{xx}, EI_{yy}$ :  $y$  および  $x$  軸に関する曲げ剛性、

$GK$ : ねじり剛性、

$EI_w$ : 曲げねじり剛性、

$EA$ : 伸縮剛性。

式 (2.4) より明らかなように、材軸方向の運動は、曲げおよびねじりの運動と分離されるので、以下の考察では省く。

Fig. 1 に示すように、単純梁上を従動荷重が連続走行する場合を対象とし、連行荷重および付加慣性力を次に示す。

### 2.2 連行荷重

荷重の走行位置は断面の重心より  $(e_x, e_y)$  の、 $z$  軸に平行な線上である。荷重は集中荷重  $P \cos \omega t$  ( $\omega$ : 荷重振動数、 $t$ : 時刻、 $P$ : 荷重振幅) からなる荷重列で、集中荷重間隔  $a$ 、荷重走行速度  $V$  をもつ。

荷重間隔  $a$  と支間長  $l$  との関係から、連行荷重  $q_y$  は周期  $T_p = a/V$  をもつ関数となり、次式で表わされる。

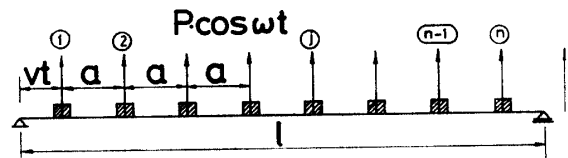


Fig. 4 Travelling follower load system.

$$q_y = \begin{cases} P \cos \omega t \sum_{j=1}^n \delta(z - \xi(t, j)) \dots 0 \leq t < T_s \\ P \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} \delta(z - \xi(t, j)) \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \quad \dots (2.5)$$

上式中、 $\xi(t, j) = Vt + (j-1)a$ ,  $T_s = \{l - (n-1)a\}/V$ ,  $\delta$  は Dirac の  $\delta$  関数である。

ここで、荷重振動周期  $T = 2\pi/\omega$  が荷重移動周期  $T_p = a/V$  の整数分の 1 である。すなわち、 $T_p$  が  $T$  の整数倍である場合を想定する。

$$\omega = \alpha\omega_0, \quad \omega_0 = 2\pi V/a, \quad \alpha: \text{整数} \dots\dots (2.6)$$

$\omega_0$  を荷重移動振動数と呼ぶ。

2.3 荷重質量にともなう付加慣性力

荷重質量の慣性力は従動荷重の作用位置に作用するものとする。単一の荷重質量にともなう付加慣性力は、質量の重心位置の  $x$  および  $y$  方向の変位  $u$  および  $v$  が

$$\left. \begin{aligned} u &= u_s - (e_y - y_s)\theta \\ v &= v_s + (e_x - x_s)\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.7)$$

で表わされることから、Fig. 5 に示す値となる。図中、 $\mathfrak{M}_0$  は単一荷重の質量、 $J_0$  は質量の慣性モーメントである。

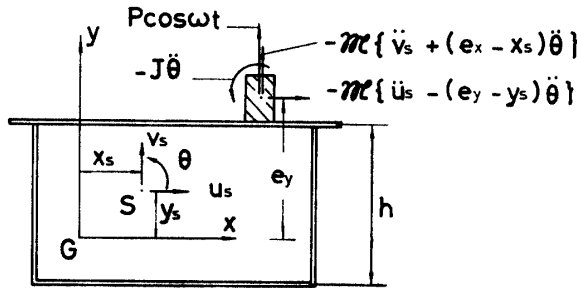


Fig. 5 Inertia forces acting on mass of a single load.

荷重が Fig. 4 に示す連行荷重であることより、荷重質量にともなう付加慣性力  $\bar{q}_x$ ,  $\bar{q}_y$  および慣性偶力  $\bar{m}_z$  はそれぞれ次式で表わされる。

$$\bar{q}_x = \begin{cases} -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_y - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots 0 \leq t < T_s \\ -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_y - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots T_s \leq t \leq T_p \\ \dots\dots (2.8) \end{cases}$$

$$\bar{q}_y = \begin{cases} -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^n \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_x - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots 0 \leq t < T_s \\ -\mathfrak{M}_0 \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_x - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - \xi(t, j)) & \dots T_s \leq t \leq T_p \\ \dots\dots (2.9) \end{cases}$$

$$\bar{m}_z = \begin{cases} -J_0 \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z - \xi(t, j)) \dots 0 \leq t < T_s \\ -J_0 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z - \xi(t, j)) \dots T_s \leq t \leq T_p \\ \dots\dots (2.10) \end{cases}$$

3. 連成振動の解析

運動方程式 (2.1), (2.2) および (2.3) の振動変位を次の級数式で表わす。

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k(t) u_{sk}(z) \\ v_s &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(t) v_{sk}(z) \\ \theta &= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k(t) \theta_k(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.1)$$

ここで、 $\rho_k(t)$ ,  $\sigma_k(t)$  および  $\tau_k(t)$  は時間に関する未知関数である。 $u_{sk}(z)$  および  $v_{sk}(z)$  はそれぞれ  $y$  および  $x$  軸に関する曲げ自由振動の  $k$  次の固有関数であり、 $\theta_k(z)$  はねじりの自由振動の  $k$  次の固有関数である。単純梁の場合、これらは次式で表わされる。

$$u_{sk} = v_{sk} = \theta_k = \sin \frac{k\pi z}{l} \dots\dots (3.2)$$

式 (3.1) および (3.2) を運動方程式 (2.1), (2.2), (2.3), 荷重質量による付加慣性力 (2.8), (2.9), (2.10) に代入し、固有関数の直交性を利用して整理すると、運動方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho_k}{dt^2} + \frac{2\mathfrak{M}_0}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_{ki}(t) \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} + y_s \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} \\ - \frac{2\mathfrak{M}_0(e_y - y_s)}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_{ki}(t) \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \omega_{uk}^2 \rho_k \\ + \frac{2P}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki}(t) \tau_i = 0 \end{aligned} \dots\dots (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_k}{dt^2} + \frac{2\mathfrak{M}_0}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_{ki}(t) \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} - x_s \frac{d^2 \tau_k}{dt^2} \\ + \frac{2\mathfrak{M}_0(e_x - x_s)}{lm} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_{ki}(t) \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \omega_{vk}^2 \sigma_k \\ - \frac{2P}{lm} g_k(t) = 0 \end{aligned} \dots\dots (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{m y_s}{\mu I_{ps}} \frac{d^2 \rho_k}{dt^2} - \frac{2\mathfrak{M}_0(e_y - y_s)}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_{ki}(t) \frac{d^2 \rho_i}{dt^2} \\ - \frac{m x_s}{\mu I_{ps}} \frac{d^2 \sigma_k}{dt^2} + \frac{2\mathfrak{M}_0(e_x - x_s)}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_{ki}(t) \frac{d^2 \sigma_i}{dt^2} \\ + \frac{d^3 \tau_k}{dt^3} + \frac{2}{\mu I_{ps} l} \{J_0 + \mathfrak{M}_0(e_y - y_s)^2 \\ + \mathfrak{M}_0(e_x - x_s)^2\} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}_{ki}(t) \frac{d^2 \tau_i}{dt^2} + \omega_{zk}^2 \tau_k \\ - \frac{2P(e_y - y_s)}{\mu I_{ps} l} \sum_{i=1}^{\infty} f_{ki}(t) \tau_i \\ - \frac{2P(e_x - x_s)}{\mu I_{ps} l} g_k(t) = 0 \quad k=1, 2, \dots \end{aligned} \dots\dots (3.5)$$

上式中,  $\omega_{uk}$  および  $\omega_{vk}$  はそれぞれ  $y$  および  $x$  軸に関する  $k$  次の曲げ固有円振動数,  $\omega_{\theta k}$  は  $k$  次のねじりの固有円振動数である. 単純梁の場合, 各値は次の通りである.

$$\omega_{uk} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_{xx}}{m}}, \quad \omega_{vk} = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_{yy}}{m}},$$

$$\omega_{\theta k} = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{EI_{\theta}}{\mu I_{ps}} + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{GK}{\mu I_{ps}}}. \quad \dots\dots (3.6)$$

$f_{ki}$  および  $g_k$  はそれぞれ次の値をとる.

$$f_{ki} = \begin{cases} \cos \omega t \sum_{j=1}^n \sin \frac{k\pi\xi(t, j)}{l} \cdot \sin \frac{i\pi\xi(t, j)}{l} & \dots 0 \leq t < T_s \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi\xi(t, j)}{l} \cdot \sin \frac{i\pi\xi(t, j)}{l} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \quad \dots\dots (3.7)$$

$$g_k = \begin{cases} \cos \omega t \sum_{j=1}^n \sin \frac{k\pi\xi(t, j)}{l} & \dots 0 \leq t < T_s \\ \cos \omega t \sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi\xi(t, j)}{l} & \dots T_s \leq t \leq T_p \end{cases} \quad \dots\dots (3.8)$$

$\bar{f}_k$  は  $f_i$  において,  $\omega=0$  とおいたときの値である.

式 (3.3), (3.4) および (3.5) は無限連立方程式となるが, 振動変位 (3.1) を  $N$  項からなる有限級数で近似すると, 有限連立方程式となり, 次のようにマトリックス表示される.

$$(A + A_M(t)) \frac{d^2 f}{dt^2} + (B + PC(t)) f + d = 0 \quad \dots\dots (3.9)$$

ここで,

$$f = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N\}^T \quad \dots\dots (3.10)$$

$$A = \begin{pmatrix} [A_{1rs}] & [A_{2rs}] & [A_{3rs}] \\ [A_{4rs}] & [A_{5rs}] & [A_{6rs}] \\ [A_{7rs}] & [A_{8rs}] & [A_{9rs}] \end{pmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N$$

$$A_{1rs} = A_{5rs} = A_{9rs} = \delta_{rs}$$

$$A_{3rs} = y_s \delta_{rs}, \quad A_{6rs} = -x_s \delta_{rs}$$

$$A_{7rs} = \frac{m y_s}{\mu I_{ps}} \delta_{rs}, \quad A_{8rs} = -\frac{m x_s}{\mu I_{ps}} \delta_{rs}$$

$$A_{2rs} = A_{4rs} = 0, \quad \delta_{rs}: \text{Kronecker の記号}$$

$$\dots\dots (3.11)$$

$$A_M = \begin{pmatrix} [A_{M1rs}] & [A_{M2rs}] & [A_{M3rs}] \\ [A_{M4rs}] & [A_{M5rs}] & [A_{M6rs}] \\ [A_{M7rs}] & [A_{M8rs}] & [A_{M9rs}] \end{pmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N$$

$$A_{M1rs} = \frac{2\mathfrak{M}_0}{lm} \bar{f}_{rs}, \quad A_{M2rs} = 0,$$

$$A_{M3rs} = -\frac{2\mathfrak{M}_0(e_y - y_s)}{lm} \bar{f}_{rs}, \quad A_{M4rs} = 0,$$

$$A_{M5rs} = \frac{2\mathfrak{M}_0}{lm} \bar{f}_{rs}, \quad A_{M6rs} = \frac{2\mathfrak{M}_0(e_x - x_s)}{lm} \bar{f}_{rs}$$

$$A_{M7rs} = -\frac{2\mathfrak{M}_0(e_y - y_s)}{\mu I_{ps} l} \bar{f}_{rs},$$

$$A_{M8rs} = \frac{2\mathfrak{M}_0(e_x - x_s)}{\mu I_{ps} l} \bar{f}_{rs}$$

$$A_{M9rs} = \frac{2J_s}{\mu I_{ps} l} \bar{f}_{rs}$$

$$J_s = \{J_0 + \mathfrak{M}_0(e_y - y_s)^2 + \mathfrak{M}_0(e_x - x_s)^2\}$$

$$\dots\dots (3.12)$$

$$B = \begin{pmatrix} [B_{1rs}] & [B_{2rs}] & [B_{3rs}] \\ [B_{4rs}] & [B_{5rs}] & [B_{6rs}] \\ [B_{7rs}] & [B_{8rs}] & [B_{9rs}] \end{pmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N$$

$$B_{2rs} = B_{3rs} = B_{4rs} = B_{6rs} = B_{7rs} = B_{8rs} = 0,$$

$$B_{1rs} = \omega_{ur}^2 \delta_{rs}, \quad B_{5rs} = \omega_{\theta r}^2 \delta_{rs}$$

$$B_{9rs} = \omega_{\theta r}^2 \delta_{rs}.$$

$$\dots\dots (3.13)$$

$$C = \begin{pmatrix} [C_{1rs}] & [C_{2rs}] & [C_{3rs}] \\ [C_{4rs}] & [C_{5rs}] & [C_{6rs}] \\ [C_{7rs}] & [C_{8rs}] & [C_{9rs}] \end{pmatrix} \quad r, s = 1, 2, \dots, N$$

$$C_{1rs} = C_{2rs} = C_{4rs} = C_{5rs} = C_{6rs} = C_{7rs} = C_{8rs} = 0,$$

$$C_{3rs} = \frac{2}{lm} f_{rs}, \quad C_{9rs} = -\frac{2(e_y - y_s)}{\mu I_{ps} l} f_{rs}.$$

$$\dots\dots (3.14)$$

$$d = \begin{pmatrix} \{d_{1r}\} \\ \{d_{2r}\} \\ \{d_{3r}\} \end{pmatrix} \quad r = 1, 2, \dots, N$$

$$d_{1r} = 0, \quad d_{2r} = -\frac{2P}{lm} g_r,$$

$$d_{3r} = -\frac{2P(e_x - x_s)}{\mu I_{ps} l} g_r$$

$$\dots\dots (3.15)$$

式 (3.9) を数値解析することにより, 振動変位の時

間的経過が明らかになり、走行従動荷重に対する動的応答が求められる。

4. 動的応答

動的応答に及ぼす影響は、1次の固有振動が支配的であることから、応答の数値解析には1次モードの  $u_{s1}$ ,  $v_{s1}$  および  $\theta_{s1}$  のみを考慮し、運動方程式 (3.9) を無次元表示した次式を用いた。

$$(A + A_M(t)) \frac{d^2 f}{d\phi^2} + (B + C(t)) f + d = 0 \quad \dots\dots (4.1)$$

ここで、

$$\phi = \omega_1 t \quad \omega_1 = \begin{cases} \pi V/l \dots \text{単一荷重の場合} \\ \omega_0 \dots \dots \text{連行荷重の場合} \end{cases}$$

$$f = \{\rho_1/\theta_{s1}h, \sigma_1/\theta_{s1}h, \tau_1/\theta_{s1}\}^T$$

$$A = \alpha^2 \kappa \gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & \bar{y} \\ 0 & 1/\beta & -\bar{x}/\beta \\ \bar{y}/\kappa & -\bar{x}/\kappa & 1/\kappa \gamma \end{pmatrix}$$

$$A_M = 2\bar{f}_{11} \bar{\mathfrak{M}} \alpha^2 \kappa \gamma \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(\bar{e}_y - \bar{y}) \\ 0 & 1/\beta & (\bar{e}_x - \bar{x})/\beta \\ -(\bar{e}_y - \bar{y})/\kappa & (\bar{e}_x - \bar{x})/\kappa & \bar{J}_s/\bar{\mathfrak{M}}\kappa\gamma \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \frac{\theta_{st} f_{11}}{\bar{e}_x - \bar{x}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\bar{e}_y - \bar{y}) \end{pmatrix}$$

$$d = g_1 \{0 \quad -\kappa/\beta(\bar{e}_x - \bar{x}) \quad 1\}^T$$

$$\theta_{st} = \frac{2P(e_x - x_s)/l}{EI_s^s(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2}$$

$\theta_{st}$  は集中荷重  $P$  がスパン中央の  $(e_x - x_s)$  の位置に静的に作用したときのスパン中央のねじり角 (静的ねじり角) を表わす。他の記号は下記に示す無次元量を表わす。

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega_1/\omega_{\theta 1}, \quad \beta = I_{yy}/I_{xx}, \\ \kappa &= \{EI_s^s(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\}/h^2 EI_{xx}(\pi/l)^4, \\ \gamma &= Ah^2/I_{ps}, \quad \bar{x} = x_s/h, \quad \bar{y} = y_s/h, \\ \bar{e}_x &= e_x/h, \quad \bar{e}_y = e_y/h, \quad \bar{h} = h/l, \\ \bar{\mathfrak{M}} &= \mathfrak{M}_0/lm, \quad \bar{J}_s = J_s/\mu I_{ps}l. \end{aligned}$$

Fig. 6 に示す  $\pi$  断面梁を対象とした。梁の諸量は次の通りである。

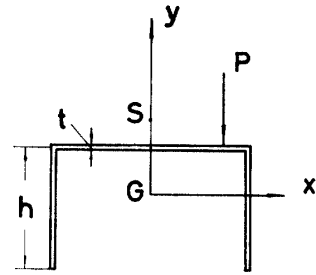


Fig. 6 Cross-section of a simple beam.

$$\begin{aligned} t/h &= 0.02, \quad h/l = 0.05, \quad \bar{x} = 0, \\ \bar{y} &= 0.6857, \quad \bar{e}_y = 0.2956, \quad \beta = 0.2709, \\ \kappa &= 8.9380, \quad \gamma = 0.1020 \end{aligned}$$

応答計算は Runge-Kutta-Gill 法を適用し、積分に当って、時間きざみは最小固有周期の 0.125% を用いた。以下の解析において、鉛直変位の応答については一定方向荷重のそれとほとんど差異がなかったので示さず、水平変位とねじり角の応答についてのみ示した。

4.1 単一走行従動荷重による動的応答

単一の従動荷重が1回だけ梁上を走行する場合の動的応答を以下に示す。この場合、従動荷重 (2.5) および付加慣性力 (2.8), (2.9), (2.10) はそれぞれ次式となる。

$$\begin{aligned} q_y &= \begin{cases} P \cos \omega t \delta(z - Vt) & \dots 0 \leq t < l/V \\ 0 & \dots l/V \leq t < \infty \end{cases} \\ \bar{q}_x &= \begin{cases} -\mathfrak{M}_0 \left\{ \frac{\partial^2 u_s}{\partial t^2} - (e_y - y_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - Vt) & \dots 0 \leq t < l/V \\ 0 & \dots l/V \leq t < \infty \end{cases} \\ \bar{q}_y &= \begin{cases} -\mathfrak{M}_0 \left\{ \frac{\partial^2 v_s}{\partial t^2} + (e_x - x_s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right\} \delta(z - Vt) & \dots 0 \leq t < l/V \\ 0 & \dots l/V \leq t < \infty \end{cases} \\ \bar{m}_z &= \begin{cases} -J_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \delta(z - Vt) & \dots 0 \leq t < l/V \\ 0 & \dots l/V \leq t < \infty \end{cases} \end{aligned}$$

応答計算時間は荷重が梁上を通過するに要する時間の 2.5 倍とし、その間に発する最大応答値  $u_{smax}$  および  $\theta_{max}$  を求めた。これらの最大応答値は計算時間を長くしても変らなかつた。 $u_{smax}$  および  $\theta_{max}$  はスパン中央におけるせん断中心の水平変位およびねじり角で、これらが移動速度  $(\omega_1/\omega_{\theta 1})$  の変化にともない、また、

従動荷重の大きさ、荷重周期、荷重質量の大きさの変化にともないどのような影響を受けるかを以下に示す。

(従動荷重の影響)

Fig. 6 に示すように、荷重作用位置がせん断中心より下 ( $\bar{y}-\bar{e}_y=0.39>0$ ) の場合について、非周期性従動荷重による最大応答の変化状態を Fig. 7 に示す。静的ねじり角 ( $\theta_{st}$ ) の増加により従動荷重による応答 (図中の破線) は一定方向荷重による応答 (図中の実線) に比較して大きくなる。たとえば、ねじり角

の最大応答に注目すると、一定方向荷重の場合、 $\omega_1/\omega_{\theta 1}=0.575$  のとき  $\theta_{max}/\theta_{st}=1.715$  であるのに対して、 $\theta_{st}=-0.5$  なる従動荷重の場合、 $\omega_1/\omega_{\theta 1}=0.525$  のとき  $\theta_{max}/\theta_{st}=2.097$ 、さらに、 $\theta_{st}=-1.0$  なる従動荷重の場合、 $\omega_1/\omega_{\theta 1}=0.425$  のとき  $\theta_{max}/\theta_{st}=2.70$  と  $\theta_{max}/\theta_{st}$  の最大値は漸次大きくなっている。しかし、荷重作用位置がせん断中心より上 ( $\bar{y}-\bar{e}_y=-0.39<0$ ) の場合の最大応答の変化状態は Fig. 8 の通りである。図中の実線 (一定方向荷重による最大応答曲線) は

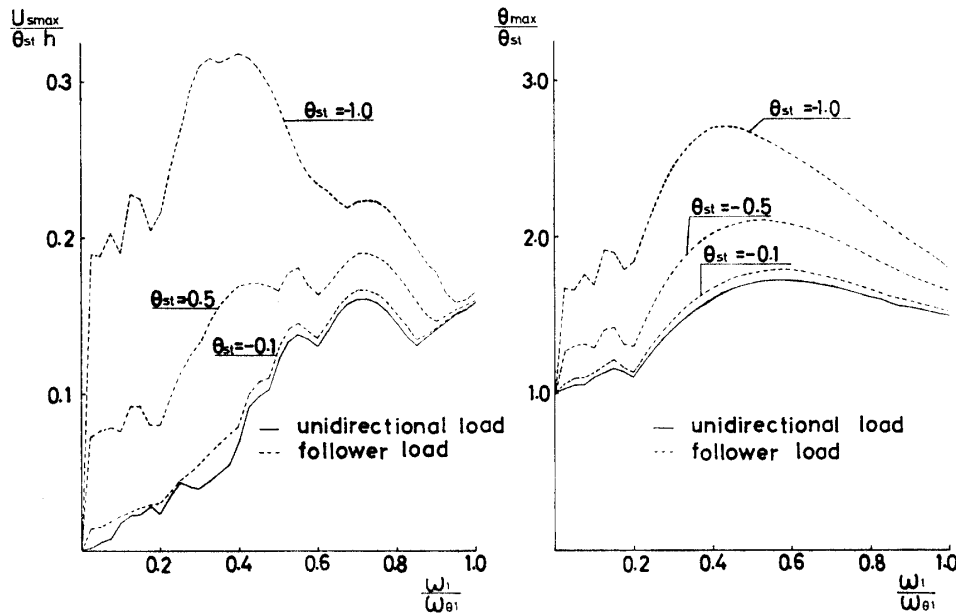


Fig. 7 Maximum response of mid span of a simple beam under a moving non-periodic follower load acting on a point above shear center.

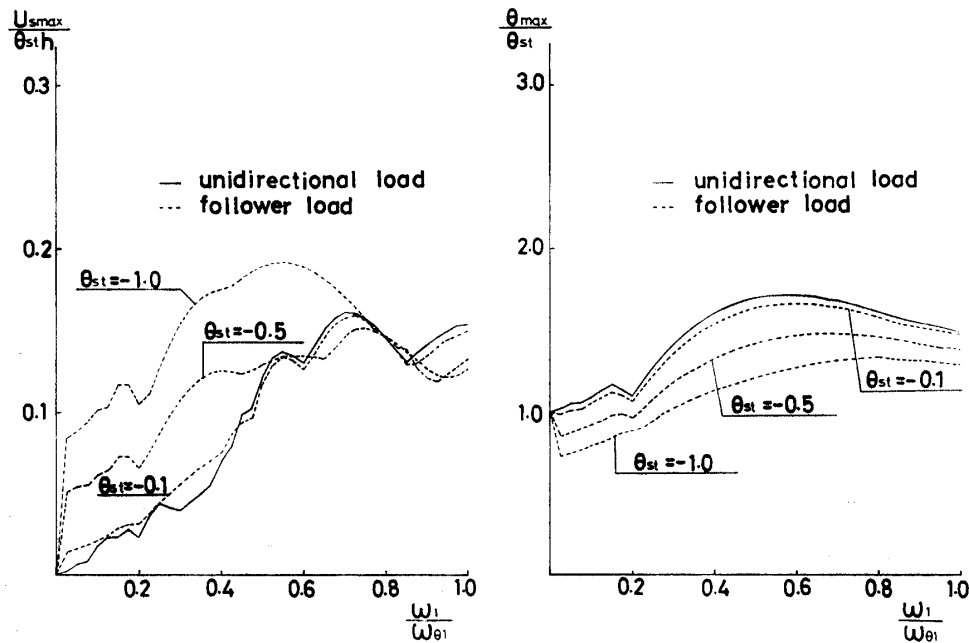


Fig. 8 Maximum response of mid span of a simple beam under a moving non-periodic follower load acting on a point below shear center.

Fig. 7 中の実線と同じである。静的ねじり角  $\theta_{st}$  の増加にしたがって、水平変位は増加するものの、ねじり角は減少し、Fig. 7 と逆の結果である。すなわち、 $\theta_{st} = -0.5$  なる従動荷重に対して  $\omega_1/\omega_{\theta 1} = 0.75$  のとき  $\theta_{max}/\theta_{st} = 1.478$  に、 $\theta_{st} = -1.0$  なる従動荷重に対して、 $\omega_1/\omega_{\theta 1} = 0.800$  のとき  $\theta_{max}/\theta_{st} = 1.332$  に減少している。これより、荷重の作用位置により従動性の影響は大きく異なることが明らかになった。

(荷重振動数の影響)

Fig. 7 に示す結果は荷重振動数  $\omega$  がゼロの場合であるが、荷重振動数がゼロでないとき、どのような応

答を示すか、その一例を Fig. 9 に示す。Fig. 9 は静的ねじり角が  $\theta_{st} = -0.5$  の場合の、 $\omega$  が  $0.2\omega_{\theta 1} \sim 1.0\omega_{\theta 1}$  の値に対する速度変化にともなう最大応答の変化を示す。図中の実線は  $\omega = 0$  のときの最大応答曲線で、Fig. 7 中の  $\theta_{st} = -0.5$  に対する破線に相当する。 $\omega$  が梁のねじり振動数  $\omega_{\theta 1}$  に比べて小さいときは、最大応答は  $\omega = 0$  の場合より小さいが、 $\omega$  が  $\omega_{\theta 1}$  に接近するにしたがって  $\omega_1/\omega_{\theta 1}$  の初期に最大応答は最大に達し、急激に増大する。

(荷重質量の影響)

上記の解析結果は荷重の質量が梁の全質量に比べて

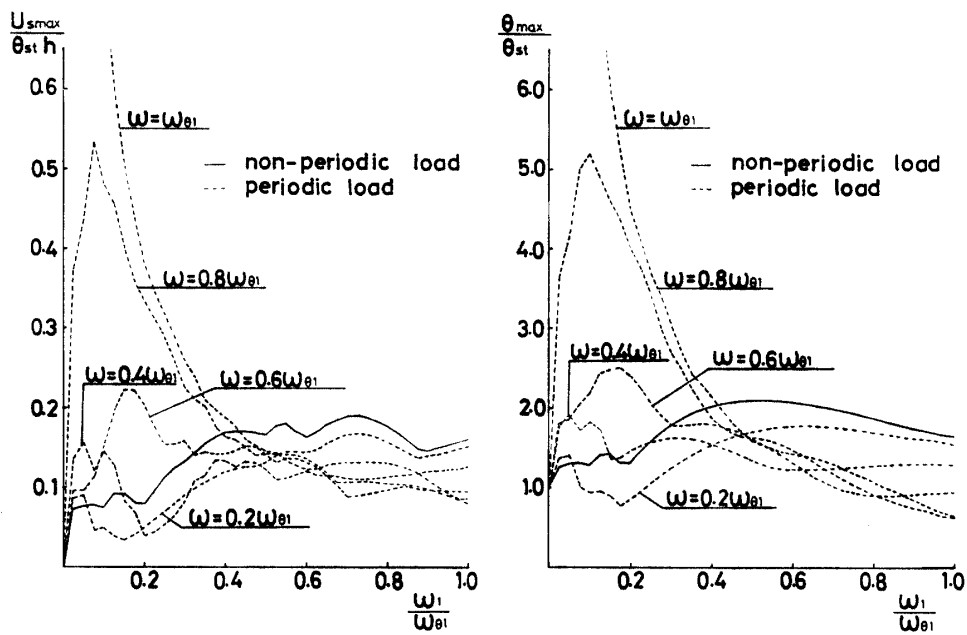


Fig. 9 Maximum response of mid span of a simple beam under a moving periodic follower load ( $\theta_{st} = -0.5$ ) without mass.

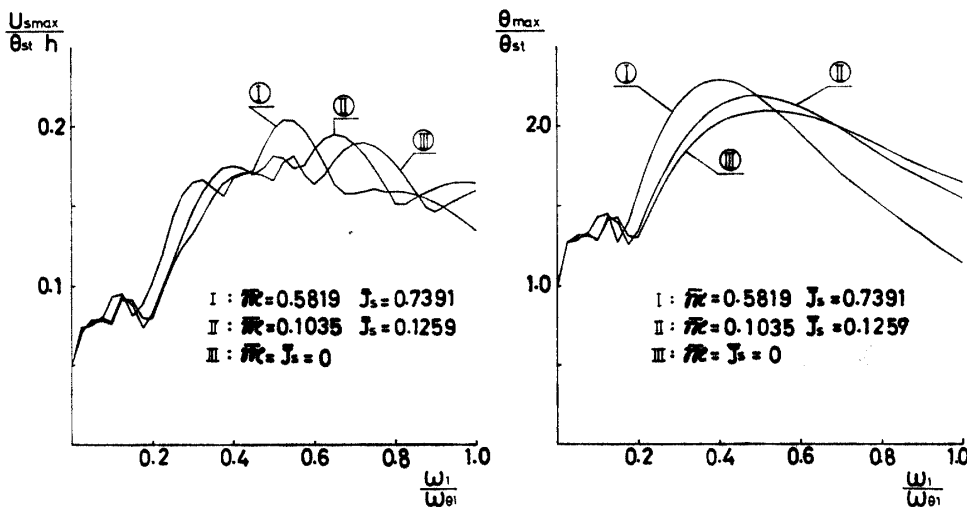


Fig. 10 Effect of mass of load on maximum response of mid span of a simple beam under a moving non-periodic follower load ( $\theta_{st} = -0.5$ ) with mass.

小さく、これを無視した場合のものである。荷重質量を考慮した場合の最大応答を示し、質量の影響を示す。荷重質量の大きさを、荷重質量と梁の全質量の比を  $\bar{m}$  および梁のせん断中心に関する荷重質量の慣性モーメントと梁の全質量の慣性モーメントの比  $\bar{J}_s$  で表わす。静的ねじり角  $\theta_{st} = -0.5$  なる非周期性 ( $\omega = 0$ ) の従動荷重が、 $\bar{m} = 0.1035, \bar{J}_s = 0.1259$  (Case II) ならびに  $\bar{m} = 0.5819, \bar{J}_s = 0.7391$  (Case I) の質量をもつ場合の最大応答曲線を質量を無視した場合 (Case III) のそれとともに Fig. 10 に示した。図中、質量を無視した場合 (III) は Fig. 7 中の  $\theta_{st} = -0.5$  の破線に対応する。最大応答の最大値は質量が大きくなるにしたがって、増大することが明らかである。すなわち、ねじり角の最大応答に注目すると、質量を無視した場合 (Case III),  $\omega_1/\omega_{\theta 1} = 0.525$  で、 $\theta_{\max}/\theta_{st} = 2.097$  なる最大値をとるのに対して、Case II の場合、 $\omega_1/\omega_{\theta 1} = 0.50$  で、 $\theta_{\max}/\theta_{st} = 2.195$ , Case I の場合、 $\omega_1/\omega_{\theta 1} = 0.40$  で  $\theta_{\max}/\theta_{st} = 2.297$  なる最大値となった。

4.2 連行従動荷重による動的応答

式 (3.9) あるいは (4.1) は、連行従動荷重を受ける場合、係数  $C$  が  $a/V$  なる周期をもつ関数になることから Hill 型の方程式に相当することがわかる。したがって、荷重の条件により、安定振動する場合と不安定振動する場合があることが推測される。もちろん、連行荷重が一定方向力である場合、係数  $C$  がゼロに

なるので、Hill 型方程式でなくなり、不安定振動は起らない。以下、荷重の質量を無視した場合と考慮した場合について、二、三の安定振動と不安定振動の例を示す。

解析は、上記単純梁上を無次元荷重間隔  $a/l = 1.05$ , 荷重移動振動数  $\omega_0 = 14.960$  で走行する場合について、

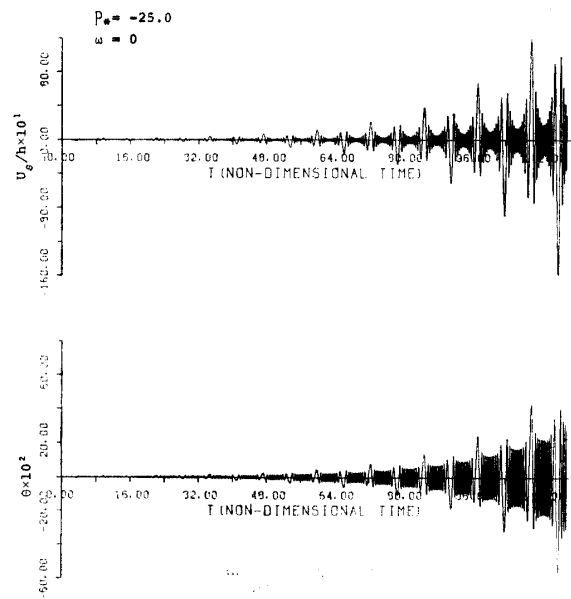


Fig. 12 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -25.0, \omega = 0$ ) without mass.

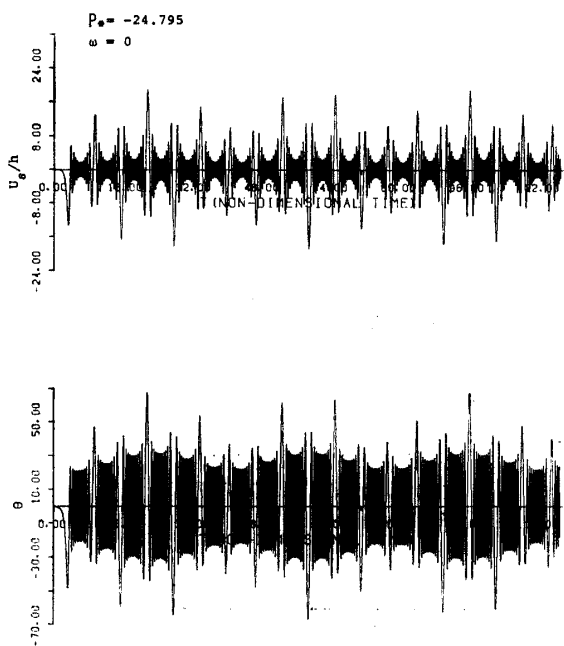


Fig. 11 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -24.795, \omega = 0$ ) without mass.

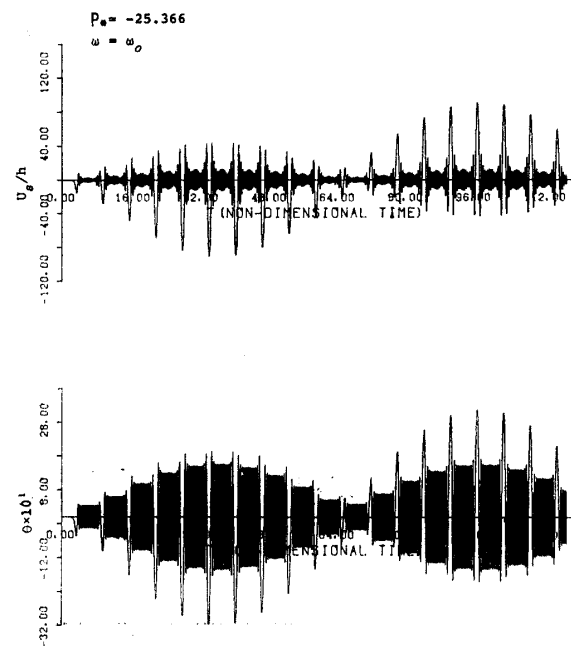


Fig. 13 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -25.366, \omega = \omega_0$ ) without mass.



梁のスパン中央の水平変位  $u_s/h$  とねじり角  $\theta$  の挙動を、荷重移動周期  $T_p = a/V$  の20倍の時間内について求めた。初め、一周期相当時間 ( $a/V$ ) の間だけ  $e_x = 0.5$  の偏心位置を走行させて、水平変位とねじりを生じさせ、その後、 $e_x = 0.0$ 、すなわち、せん断中心

軸上を走行させた。最初に生じた水平変位とねじり角が時間の経過とともに、どのように推移するかを図示したのが、以下に示した Fig. 11~18 である。図中、縦軸は  $u_s/h$  あるいは  $\theta$  であるが、横軸は無次元時間  $\phi = \omega_0 t$  を取っている。

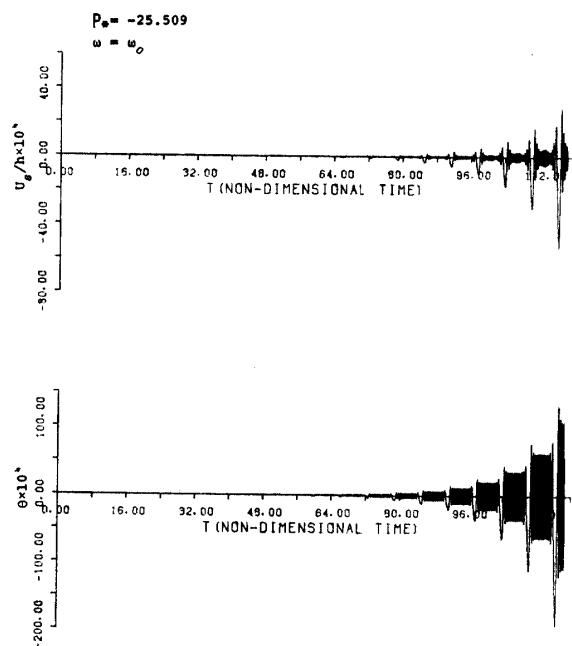


Fig. 14 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -25.509$ ,  $\omega = \omega_0$ ) without mass.

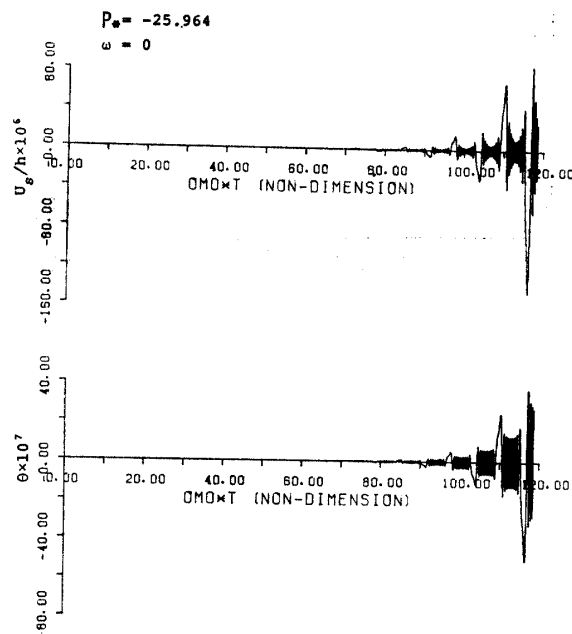


Fig. 16 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -25.964$ ,  $\omega = 0$ ) with mass.

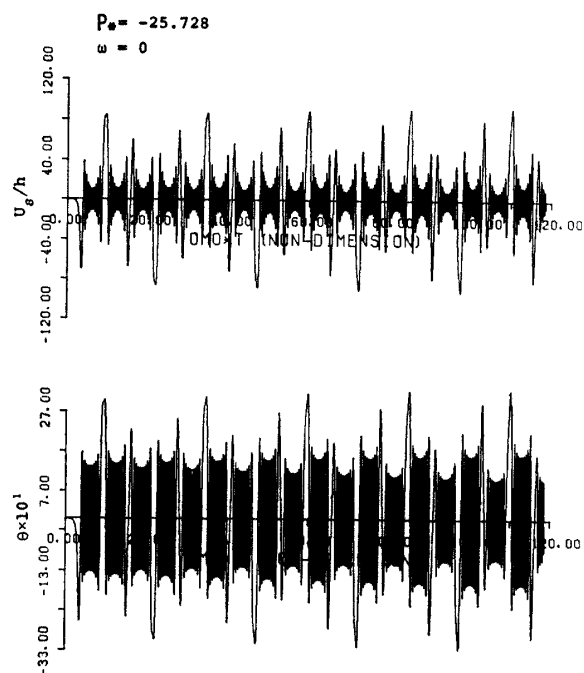


Fig. 15 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -25.728$ ,  $\omega = 0$ ) with mass.

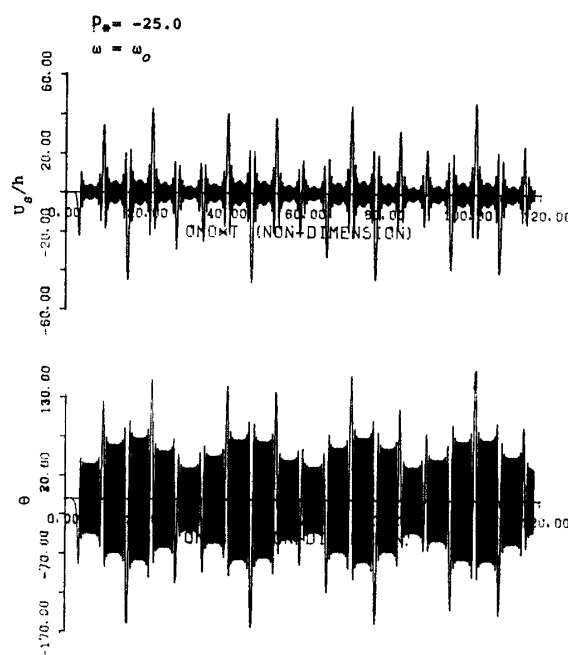


Fig. 17 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -25.0$ ,  $\omega = \omega_0$ ) with mass.

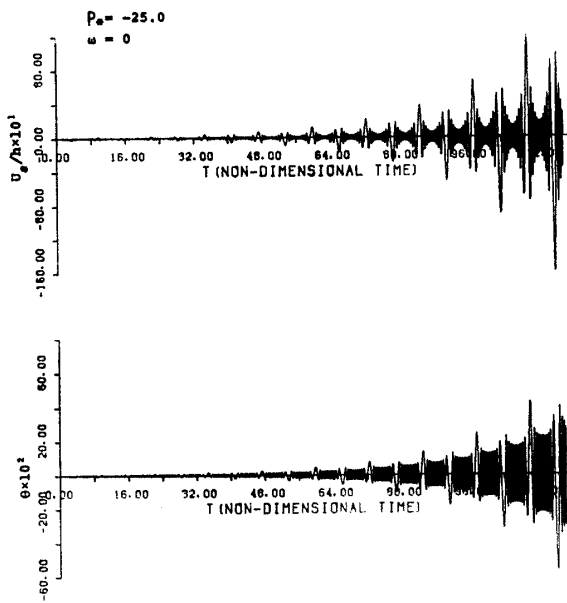


Fig. 18 Dynamic response of a simple beam under travelling follower load system ( $P_* = -25.40$ ,  $\omega = \omega_0$ ) with mass.

(荷重質量を無視した場合)

Fig. 11 は荷重振動数  $\omega = 0$  で,  $P_* = P / \{EI_0^2(\pi/l)^4 + GK(\pi/l)^2\} = -24.795$  で生ずる安定振動状態を示す。同じく,  $P_* = -25.0$  にわずか変化させるとき不安定振動を呈する。(Fig. 12)

荷重振動数  $\omega = \omega_0$  としたとき,  $P_* = -25.366$  で安定振動を Fig. 13 に示し,  $P_* = -25.509$  で生ずる不安定振動を Fig. 14 に示す。

(荷重質量を考慮した場合)

荷重質量として  $\bar{m}l = 0.1035$ ,  $\bar{J}_0 = 0.1259$  を考慮した。Fig. 15 に  $\omega = 0$ ,  $P_* = -25.728$  で生ずる安定振動を, Fig. 16 に  $P_* = -25.964$  にわずか変化させたときに生

ずる不安定振動を示す。

荷重振動数  $\omega = \omega_0$  としたとき,  $P_* = -25.0$  で生ずる安定振動を Fig. 17 に,  $P_* = -25.4$  で生ずる不安定振動を Fig. 18 に示す。

## 5. 結 び

超電導反発形磁気浮上式鉄道の出現により問題となる非保存力に相当する走行する従動荷重を受ける梁の動的応答の基本的特性を明らかにした。

単一走行従動荷重による応答(水平変位およびねじり角)は一定方向荷重によるそれと異なり荷重作用位置により増大することが明らかになった。しかし、鉛直変位応答は、従来一定方向荷重によるそれとほとんど変化はなかった。また、荷重振動数および荷重質量の従動荷重による応答に対する影響の度合は、従来一定方向荷重の応答に対する影響と同じ程度であった。

連行従動荷重による梁の挙動は、運動方程式が Hill 方程式となることから、係数励振振動となりその挙動が確められた。

本研究の数値計算は三浦洋一君(川田工業)、伊藤晴友君(五洋建設)および内野英宏君(青木建設)の協力を得、九州大学大型計算機センターの FACOM M-200 および山口大学計算センターの FACOM 230-28 により行った。また、本研究の一部は昭和54年度の文部省科学研究費(一般研究D)の補助を受けた。ここに記して感謝します。

(昭和56年4月15日 受理)