

平行な有限長矩形断面導体間の電磁力

武 平 信 夫*

The Electromagnetic Force between Two Finite Parallel Rectangular Conductors

Nobuo TAKEHIRA

Abstract

Increasing the loads of power station, electric furnace, electric welder, the counterplan for short-circuit forces on busses and bus supports is necessary. Rectangular conductors are used frequently in above mentioned apparatus, for they are electrical and mechanical advantageous. There are many investigations on the electromagnetic force between two parallel busses. For infinite length, Dwight and Higgins research and for finite length Ramamoorthy et al. do.

Using their formulas, force per unit length of the bus may be calculated. Nevertheless the distribution of forces cannot be obtained by them. With a view of this point, the electromagnetic forces are analyzed and a formula for the distribution of forces is obtained. For the numerical example, the distribution of force is shown.

1. ま え が き

発電所, 電気炉, 溶接用電源などにおける機器の容量増大に伴い, それらの母線の電流は定常状態においても増加しており, 特に短絡時においては強大である。それに伴う電磁力に対する母線および母線支持物の機械的強度の検討が要求される。ところで短絡時対策の前提として定常状態での電磁力をまず求めておく必要がある¹⁾。

さて上記の各機器における母線形状として電氣的, 機械的に有利なために矩形断面導体が好んで用いられている^{2),3)}。平行な矩形断面導体間の電磁力に関しては古く1917年に Dwight 氏⁴⁾が無限長の場合について解析している。氏は二つの電流素片間に働く電磁力の基礎式から出発して, これを導体断面について積分することにより電磁力を求めている。Dwight 氏は得られた公式から单相および多相導体間の電磁力に関するいわゆる形状係数の基礎的グラフを提案している。この形状係数は今日でもなお多数の文献に採用されている⁵⁾。また Higgins 氏⁶⁾は無限長矩形断面導体間に保有される電磁エネルギーから電磁力を導びき, 導体の一部が中空な場合についても求めている。以上

Dwight, Higgins 両氏は共に無限長導体であって電流分布は一様という仮定のもとに解析されたものであった。最近 Ramamoorthy 氏ら⁷⁾は矩形断面導体の長さを有限長とし, かつ表皮効果を考慮した解析例を発表しているが, 導体長無限大で電流の周波数を零 (すなわち直流) とした場合には上記二氏とわずかに食い違いをみせている。

ところで上記の各解析によれば単位長さ当りの電磁力は求まるが, 導体上で電磁力がどのように分布しているかを知ることはできない。このことは工学上重要であって, 電磁力分布が明確になってはじめて母線支持物などの適正な配置が可能となる。筆者はこの点に主眼を置いて解析を行い平行な矩形断面導体上の電磁力分布を求め得る公式を得たので以下に報告する。解析を容易にするために用いた仮定は Dwight, Higgins 両氏ら^{8),9)}と同様に導体は非磁性材料とし, 電流分布は導体中において一様とする。すなわち表皮効果, 近接効果等は無視する。これらの仮定の妥当性については Higgins 氏が詳述しているので言及しないが商用周波数程度では誤差は問題とならない。

なお以上と類似の考えから Charles 氏¹⁰⁾が円形導体の場合について解析していることを付言しておく。

* 電気工学科

また本文では特に断わらない限り MKS 単位を用いるものとする。

2. 磁界の解析¹⁾

座標系としてFig. 1に示すように直線直交座標を採用する。二導体 C_1, C_2 は対称に配置されていてその長さを l , 厚さを a , 幅を b とする。導体 C_1 を流れる電流を I_1 とする。電流 I_1 による空間の任意の一点 $P(x, y, z)$ におけるベクトルポテンシャルは x 成分のみで

$$A_x = \frac{I_1 \times 10^{-7}}{ab} \int_0^a \int_0^b \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \quad (1)$$

となる。ベクトルポテンシャル A_x を用いて、磁束密度の y, z 成分 B_y, B_z が求まるのであるが Fig. 1 の

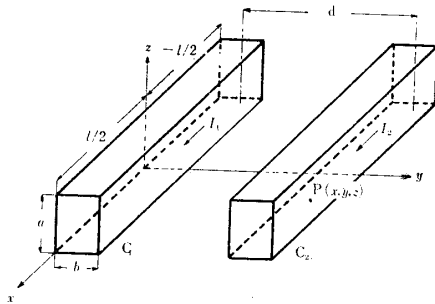


Fig. 1 Arrangement of two parallel rectangular conductors

ように導体が対称に配置されている場合には、電磁力の計算には B_z のみが必要となる。さて

$$B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{I_1 \times 10^{-7}}{ab} \int_0^a \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}} \right]_{y_1=0}^{y_1=b} dx_1 dz_1 \quad (2)$$

(2)式の右辺の分母、分子を l^3 で割って $(x-x_1)/l=K, (y-y_1)/l=L, (z-z_1)/l=M$ と変数変換し積分を実行すると

$$B_z = \frac{I_1 \times 10^{-7}}{a\eta} \left(\left(G_0(K, L, M) \right)_{K=\frac{x}{l}-\frac{1}{2}, L=\frac{y}{l}-\eta, M=\frac{z}{l}-\lambda}^{K=\frac{x}{l}+\frac{1}{2}, L=\frac{y}{l}, M=\frac{z}{l}} \right) \quad (3)$$

となる。ただし $\lambda=a/l, \eta=b/l$ であって関数 $G_0(K, L, M)$ は次式となる。

$$G_0(K, L, M) = K \log \varepsilon | M + \sqrt{K^2 + L^2 + M^2} | + M \log \varepsilon | K + \sqrt{K^2 + L^2 + M^2} |$$

$$-L \tan^{-1} \frac{KM}{L\sqrt{K^2 + L^2 + M^2}} \quad (4)$$

(3)式を用いれば空間の任意の一点 P における磁束密度 B_z が求まる。次章では(3)式を用いて電磁力を解析する。

3. 電磁力の計算

前章で磁束密度 B_z が求まったのでこれを用いて、 x 方向の単位長さなりに働き、 y 方向を向く電磁力 F を求めてみる。電磁力は B_z を y, z に関して積分することにより得られる。すなわち

$$F = \frac{I_2}{ab} \int_0^a \int_a^{a+b} B_z dy dz = \frac{I_1 I_2 \times 10^{-7}}{a\lambda\eta^2} \int_0^\lambda \int_\xi^{\xi+\eta}$$

$$\times \left(\left(G_0(K, L, M) \right)_{K=x'-\frac{1}{2}, L=y'-\eta, M=z'-\lambda}^{K=x'+\frac{1}{2}, L=y', M=z} \right) dy' dz' \quad (5)$$

となる。ただし $\zeta=d/l$ とし、 $x/l=x', y/l=y', z/l=z'$ とおいた。(5)式の積分を進めると

$$F = \frac{I_1 I_2 \times 10^{-7}}{a\lambda\eta^2} \int_\xi^{\xi+\eta} dy' \times \left(\left(G_1(K, L, M) \right)_{M=-\lambda}^{M=0} - \left(G_1(K, L, M) \right)_{M=0}^{M=\lambda, K=x'-\frac{1}{2}, L=y'-\eta, M=z} \right) \quad (6)$$

となる。ただし関数 G_1 は

$$G_1(K, L, M) = KM \log \varepsilon | M + \sqrt{K^2 + L^2 + M^2} | + \frac{M^2 - L^2}{2} \log \varepsilon | K + \sqrt{K^2 + L^2 + M^2} | - LM \tan^{-1} \frac{KM}{L\sqrt{K^2 + L^2 + M^2}} - \frac{(K + \sqrt{K^2 + L^2 + M^2})^2}{4} \quad (7)$$

である。(6)式の積分をさらに進めると

$$F = \frac{I_1 I_2 \times 10^{-7}}{a\lambda\eta^2}$$

$$\begin{aligned} & \times [4G_2(x-0.5, \zeta, 0.0) - 2G_2(x'-0.5, \zeta-\eta, 0.0) \\ & - 2G_2(x'-0.5, \zeta+\eta, 0.0) - 2G_2(x'-0.5, \zeta, -\lambda) \\ & + G_2(x'-0.5, \zeta-\eta, -\lambda) + G_2(x'-0.5, \zeta+\eta, -\lambda) \\ & - 2G_2(x'-0.5, \zeta, \lambda) + G_2(x'-0.5, \zeta-\eta, \lambda) \\ & + G_2(x'-0.5, \zeta+\eta, \lambda) - 4G_2(x'+0.5, \zeta, 0.0) \\ & + 2G_2(x'+0.5, \zeta-\eta, 0.0) + 2G_2(x'+0.5, \zeta+\eta, 0.0) \\ & + 2G_2(x'+0.5, \zeta, -\lambda) - G_2(x'+0.5, \zeta-\eta, -\lambda) \\ & - G_2(x'+0.5, \zeta+\eta, -\lambda) + 2G_2(x'+0.5, \zeta, \lambda) \\ & - G_2(x'+0.5, \zeta-\eta, \lambda) - G_2(x'+0.5, \zeta+\eta, \lambda)] \end{aligned} \quad (8)$$

となる。ただし関数 $G_2(K, L, M)$ は

(i) $K=0$ の場合

$$\begin{aligned} G_2(K, L, M) = & \left(\frac{LM^2}{4} - \frac{L^3}{12} \right) \log \varepsilon | L^2 + M^2 | \\ & + \frac{4M^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{M}{L + \sqrt{L^2 + M^2}} \right) \\ & - \frac{11LM^2}{12} - \frac{L^3}{36} \end{aligned} \quad (9)$$

(ii) $K \neq 0$ の場合

$$\begin{aligned} G_2(K, L, M) = & -\frac{S_2^4}{2K} \log \varepsilon \left| \frac{S_1 + S_2 + L}{S_1 + S_2 - L} \right| \\ & + \frac{L}{2} \left(M^2 - \frac{L^2}{3} \right) \log \varepsilon | K + S_1 | \\ & + \left(\frac{3KM^2}{2} + \frac{K^3}{12} + \frac{M^4}{4K} \right) \log \varepsilon | L + S_1 | \\ & - \frac{K^4 + M^4}{4K} \log \varepsilon | L - S_1 | \\ & + KLM \log | M + S_1 | \\ & - \frac{L^2M}{2} \tan^{-1} \frac{KM}{LS_1} + \frac{K^2M}{2} \tan^{-1} \frac{LM}{KS_1} \\ & + \frac{M^3}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{MS_1}{KL} \right) \\ & + \frac{4M^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{M}{K + L + S_1} \right) \\ & + 2K^2M \tan^{-1} \frac{M + L + S_1}{K} \\ & - \frac{KLS_1}{3} - KLM - \frac{11LM^2}{12} - \frac{L^3}{36} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。(10)式における S_1, S_2 は次式である。

$$\begin{cases} S_1 = \sqrt{K^2 + L^2 + M^2} \\ S_2 = \sqrt{K^2 + M^2} \end{cases} \quad (11)$$

(8)式は計算機で計算容易な形にまとめてあるので、本式を用いれば導体上 x 方向任意の位置における電磁力が計算できる。

4. 特別な場合の電磁力の計算

特別な場合として導体の幅が、厚さ a に比して無視できる場合、あるいは逆に導体の厚さが幅 b に比して無視できる場合の電磁力について以下解析を行っ

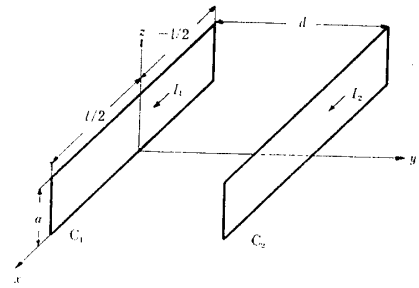


Fig. 2 Arrangement of two parallel thin tapes

てみよう。

4・1 導体の幅が厚さに比して無視できる場合

本節では Fig. 2 に示すように導体がテープ状をなし、平行に相対する場合を扱う。Fig. 2 の導体 C_1 を流れる電流による磁束密度 B_{zt} は、先に求めた(3)式において $\eta (=b/l)$ を無限小にとることによって得られ、この B_{zt} を z に関して積分することにより電磁力 F_t が求まる。すなわち

$$\begin{aligned} F_t = & \frac{I_2}{a} \int_0^a B_{zt} dx \\ = & \frac{I_1 I_2 \times 10^{-7}}{a \lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [2G_t(x'-0.5, \zeta, 0.0) - G_t(x'-0.5, \zeta, -\lambda) \\ & - G_t(x'-0.5, \zeta, \lambda) - 2G_t(x'+0.5, \zeta, 0.0) \\ & + G_t(x'+0.5, \zeta, -\lambda) + G_t(x'+0.5, \zeta, \lambda)] \end{aligned} \quad (12)$$

ただし

$$\begin{aligned} G_t(K, L, M) = & M \tan^{-1} \frac{KM}{L\sqrt{K^2 + L^2 + M^2}} \\ & + L \tan^{-1} \frac{\sqrt{K^2 + L^2 + M^2} + K}{\sqrt{L^2 + M^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

上式を用いれば、この場合の導体上の任意の場所に働く電磁力が求まる。(12)式の特別な場合として、導体が無限長である場合の電磁力 $F_{t\infty}$ を求めてよう。

(12)式において $l \rightarrow \infty$ とすれば

$$\begin{aligned} F_{t\infty} = & I_1 I_2 \times 10^{-7} \left\{ \frac{a}{4} \tan^{-1} \frac{a}{d} \right. \\ & \left. - \frac{2d}{a^2} \log \varepsilon \left(1 + \frac{a^2}{d^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。これは Dwight 氏が文献(4)において、既に求めている結果と一致する。

4・2 導体の厚さが幅に比して無視できる場合

本節では Fig. 3 に示すように導体がテープ状をなしており、縁と縁とが接している場合を取扱う。導体 C_1 を流れる電流によって C_2 上に発生する磁束密度 B_{zf} は、先に求めた(3)式において $\lambda (=a/l)$ を無限小

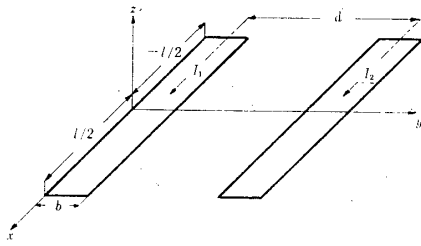


Fig. 3 Arrangement of two parallel thin tapes

にとることによって得られ、この B_{zf} を y に関して積分することにより電磁力 F_f が求まる。すなわち

$$F_f = \frac{I_2}{b} \int_a^{d+b} B_{zf} dy$$

$$= -\frac{I_1 I_2 \times 10^{-7}}{b \eta}$$

$$\times [2G_f(x'-0.5, \zeta) - G_f(x'-0.5, \zeta-\eta) - G_f(x'-0.5, \zeta+\eta) - 2G_f(x'+0.5, \zeta) + G_f(x'+0.5, \zeta-\eta) + G_f(x'+0.5, \zeta+\eta)]$$

(15)

ただし

$$G^f(K, L) = L \log \varepsilon |K + \sqrt{K^2 + L^2}| - L + K \log \varepsilon | \frac{\sqrt{K^2 + L^2} + L}{K} |$$

(16)

上式を用いれば、この場合の導体上の任意の場所に働く電磁力が求まる。(15)式の特別な場合として導体が無限長である場合の電磁力 $F_{f\infty}$ を求めてみよう。(12)式において $l \rightarrow \infty$ とすれば

$$F_{f\infty} = I_1 I_2 \times 10^{-7} \left\{ \frac{d+b}{b^2} \log \varepsilon \frac{d+b}{d} + \frac{d-b}{b^2} \log \varepsilon \frac{d-b}{d} \right\}$$

(17)

上式もまた Dwight 氏が文献(4)において求めている結果と一致する。

第3章および第4章において導体上に分布する電磁力の解析を行ったが、力の方向は当然のことながら、電流 I_1, I_2 の方向が同一ならば吸引力、反対ならば反発力として作用する。

5. 数 値 例

Fig. 4 に平行な矩形断面導体において、導体の長さを変化させた場合の中心から導体端までの電磁力分布の様子を示す。電磁力は導体の形状および導体間の距離に関係するから直ちにこれから結論を出すことはできないが、大体導体長の長いものほど導体長の短いものは端部に近づくにしたがって電磁力は漸減しており、最大値を示す中心部においても無限長の場合に比して数%~数10%小さい。

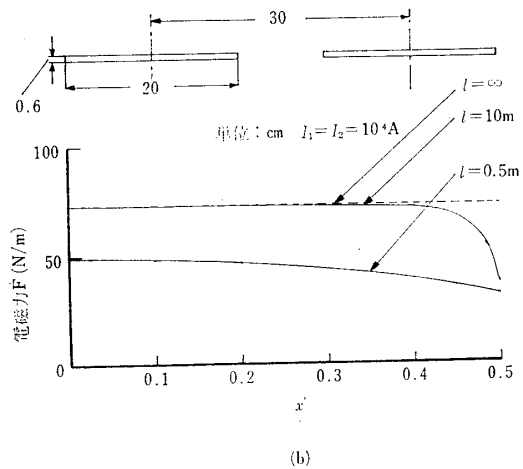
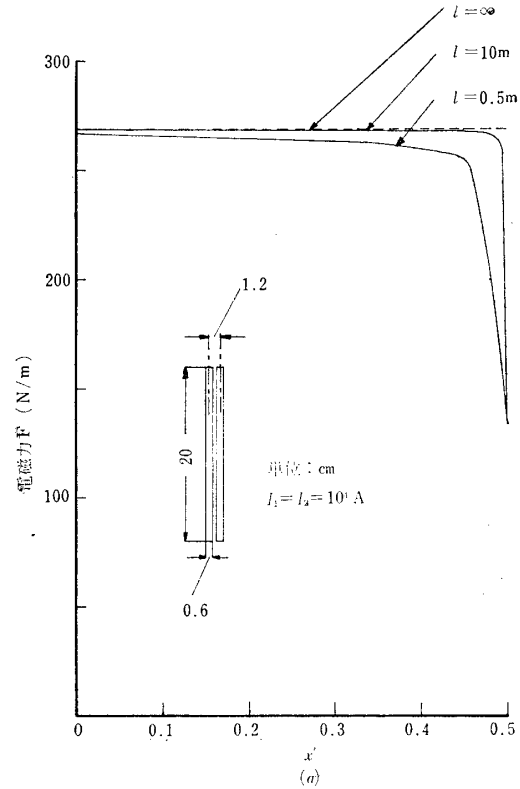


Fig. 4 Distribution of electromagnetic force

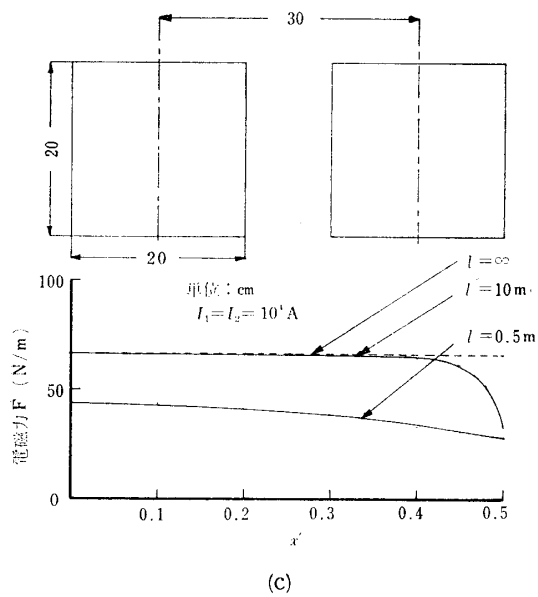


Fig. 4 Distribution of electromagnetic force

6. むすび

平行な有限長矩形断面導体間の電磁力分布を求める公式を示した。一部数値計算を行い電磁力分布の様子も示した。本法を拡張すれば、多相導体の場合、およ

び中空導体の場合についても計算できるがこれについては別に報告したい。

日頃御指導いただく戸田圭一講師に深謝します。

参 考 文 献

- 1) 電気協同研究会：電気協同研究, 20 (1964)
- 2) 日本電熱工学委員会：工業電気加熱ハンドブック 79 (1968) 電気書院
- 3) P. Silvester : Proc. IEEE, 54, 1147 (1966)
- 4) H.B. Dwight : Electrical World, 70, 522 (1917)
- 5) 例えば文献 (1)
- 6) T.J. Higgins : Trans Amer. Inst. Elect. Engrs., 62, 659 (1943)
- 7) Ramamoorty et al : IEEE Conference Paper, CP 117 -PWR (1970)
- 8) 文献(4)
- 9) 文献(6)
- 10) E.D. Charles : Proc. Instn Elect. Engrs., 110, 1671 (1963)
- 11) 小山, 大月, 等々力 : 昭42電気四学会連大 No. 215

(昭和48年9月14日受理)