複素係数代数方程式の数値解法

岡 田 敏 彦*

A Method for solving Polynomial Equation with Complex Coefficients

Toshihiko OKADA

Abstract

On the complex plane we examine if a given polynomial $f(z)$ has all roots inside a given circle of radius R. If it has not, then we double the radius and examine similarly. Soon we find the circle containing all roots of $f(z)$. Assuming that there are all roots of $f(z)$ inside the circle of radius $2R$, the largest root of an absolute value exists at least in an annulus $R<|z|<2R$. Here we put $R_{in}=R$ and $R_{ex}=2R$. We examine if $f(z)$ has all roots inside a circle of radius R_m which is equal to $(R_{in}+R_{ex})/2$. If it has, then we narrow an annulus to $R_{in}<|z|<R_m$, if not, then to $R_m<|z|<R_{ex}$. Continuing this procedure, finally we are able to lay a root on the circle of radius R_m such that $R_{in}=R_m=R_{ex}$. Then R_m is equal to an absolute value of the root. Next, for finding a place where the root on the circle lies, we transform z to $R_m z$, then the circle of radius R_m is replaced by the unit circle Γ whose radius is equal to one, construct a sequence of Lehmer's polynomials so that $f_0(R_m z)=f(R_m z)$, $f_1(R_m z)$, $\cdots$, $f_h(R_m z)$, f_{h+1} where $f_{h+1}=0$, $f_h(R_m z)$ has all roots on Γ. Here we put $p(z)=f_h(R_m z)$, and consider finding all roots of $p(z)$ on Γ. Now we move the center of coordinate to a point $ce^{i\theta}$ outside Γ so that z is replaced by $z'+ce_{i\theta}$. As before we examine if $p(z')$ has all roots inside a circle of radius r. If it has not, then we double r. Soon we find an annulus $r<|z'|<2r$ which contains at least the largest root of an absolute value. Here we put $r_{in}=r$ and $r_{ex}=2r$. We examine if $p(z')$ has all roots inside a circle of radius r_m which is equal to $(r_{in}+r_{ex})/2$. If it has, then we narrow an annulus to $r_{in}<|z'|<r_m$, if not, then to $r_m<|z'|<r_{ex}$. Continuing as far as possible this procedure, finally a root lies on the circle Γ' of radius r_m such that $r_{in}=r_m=r_{ex}$. Then Γ and Γ' cross each other. Thus a root exists in either of two crossing places so that z_1' and z_2'. If $|p(z_1')|<|p(z_2')|$, then z_1' is a root of $p(z')$, if, instead, $|p(z_1')|>|p(z_2')|$, then z_2' is so. Hence we find a root of $f(z)$ so that $z=(z'+ce^{i\theta})R_m$.

1. まえがき

本論文は複素係数代数方程式の新しい数値解法について述べたものである．そのあらましは，次のようなものである．複素平面上で与えられた代数方程式のすべての根を含む円とこれよりも少い数の根を含む同心の円を描く．すると，二つの円にはさまれた円環には少くとも絶対値最大の根が含まれることになる．この円環に根をはさみながら円環の内，外径をしだいに接近させていく．そして最終的に一致させれば絶対値最大の根を円上にのせることができ，その円の半径は根の絶対値に等しくなる．次に円上の根の位置を定めるには，円を単位円に変換して Lehmer の関数列をつくれば，関数列中に単位円上のすべての根をもつ関数が生ずるので，それをとり出して解けばよい．その方法については後に詳述するが，これと先に求めた根の絶対値との積が求める根となる．この方法は Lehmer 法[1]にヒントを得ている．Lehmer 法は複素平面上に円を描き，その円内に根が存在するかどうかの判定法を使って根を含む円をしだいに小さくしていき，最終的に円の中心座標を根の位置とみなす．この方法は理

* 共通科

論的には円をどこまでも小さくしていけるが，計算機にそれを実行させると，計算過程でアンダーフローが生じ，高い精度で根を求められない欠点がある．しかしながら，この Lehmer 法については筆者等が研究した結果，Lehmer が見いだしたところの円内の根の有無判定法は，単に根の有無ばかりか根の数を判定することに発展させられることがわかった．この新しい円内の根の数判定法を使い，Lehmer 法とは別の方法で代数方程式を解く方法についてはすでに発表し[2]，根の精度をいちぢるしく向上させることができた．しかし，根の偏角を求める過程に複雑さがあり，プログラム化するのにわずらわしさがあった．本論文でそれらの問題点を解決し，根の絶対値を求める過程，根の偏角を求める過程を理論的に一貫した．

2. 単位円内の根の数

複素係数代数方程式を

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0 \qquad (1)$$

とする．これに対する逆数方程式を

$$f^*(z)=\bar{a}_nz^n+\bar{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+\bar{a}_0 \qquad (2)$$

と定義する．この $f(z)$ と $f^*(z)$ は $|z|=1$ において $|f(z)|=|f^*(z)|$ となる性質をもっている．また，$f(z)$ と $f^*(z)$ の根がすべて等しいとき，$f(z)=0$ を相反方程式と呼ぶことにする．

$f(z)$ と $f^*(z)$ より，

$$f_1(z)=\bar{a}_nf(z)-a_0f^*(z)$$

をつくる．$f_1(z)$ は z^n の項を含まない．すなわち，$f_1(z)$ はふつう $n-1$ 次となる．さらに $f_1(z)$ と $f_1^*(z)$ より同様な方法で $f_2(z)$ を，$f_2(z)$ と $f_2^*(z)$ より $f_3(z)$ をというように次々につくっていく．このようにして関数列，

$$f_0(z),\ f_1(z),\ f_2(z),\ \cdots,\ f_h(z),\ f_{h+1} \qquad (3)$$

ここに，$f_0(z)=f(z)$，$f_{h+1}=$ 定数

を得ることができる．そしてこれらの関数列より次のような定理が成立する．

定理1. $f_{h+1}\neq 0$ ならば $f_k(z)$ が $|z|<1$ 内でもつ根の数を μ_k とすれば，漸化式，

$$\mu_k=\mathbf{1}(-f_{k+1}(0))n_k+\mathbf{sgn}(f_{k+1}(0))\mu_{k+1}$$

ここに，$k=h,\ h-1,\ \cdots\cdots,\ 0$，$\mu_{h+1}=0$，

n_k：$f_k(z)$ の次数，$\mathbf{1}(x)$：単位関数，$\mathbf{sgn}(x)$：符号関数 が成立する（証明文献2）．

定理2. $f_1(0)f_2(0)\cdots f_h(0)\neq 0$ で，かつ $f_{h+1}=0$ ならば $f_k(z)$ が $|z|<1$ 内でもつ根の数を μ_k とすれば，漸化式，

$$\mu_k=\mathbf{1}(-f_{k+1}(0))(n_k-n_h+2\mu_h)+\mathbf{sgn}(f_{k+1}(0))\mu_{k+1}$$

ここに，$k=h,\ h-1,\ \cdots,\ 0$

が成立する．また，$f_h(z)$ と $f_h'^*(z)$ は単位円内で同数の根をもつ（証明文献2）．

定理3. 関数列(3)において $f_k(z)$ と $f_k^*(z)$ ($k=0,\ 1,\ \cdots,\ h$) が互いに素であるための必要十分条件は $f_{h+1}\neq 0$ である．また，$f_1(0)f_2(0)\cdots f_h(0)\neq 0$ で，かつ $f_{h+1}=0$ ならば $f(z)$ と $f^*(z)$ の最大公約数は $f_h(z)$ である（証明文献2）．

定理1，定理2は z 平面上で任意の円を描くとき，その円内に $f(z)$ の根がいくつあるか判定する方法を示している．また，定理3は根が円上にあるとき，その根だけをもつ多項式をとり出せることを示唆している．これらの定理を使って代数方程式の根を求めていく過程を次に述べる．

3. 根を求める方法

根への収束過程は，まず根の絶対値を求め，次にその偏角を求めるという二つの過程よりなる．

3・1 根の絶対値

z 平面上に半径 R の円を描き，その円内に $f(z)$ の根がいくつ存在するかしらべる．その方法は変換 $z\to Rz$ により半径 R の円を単位円に変換し，$f(Rz)$ が単位円内 $|z|<1$ においていくつ根をもつか，定理1あるいは定理2によってしらべることができる．もし n 個なければ，半径を $R\to 2R$ とし，変換 $z\to 2Rz$ により $f(2Rz)$ が $|z|<1$ 内にいくつ根をもつか同様にしらべる．このようにして $f(z)$ の n 個の根をすべて含む円をすぐに見い出すことができる．

仮に，半径 $2R$ の円内に $f(z)$ のすべての根が存在するとしよう．すると，円環 $R<|z|<2R$ 内に少くとも絶対値最大の根が存在することになる．ここで，

$$R_{in}=R \qquad R_{ex}=2R$$

とおくことする．Fig. 1 に示すように二分法により半径を，

$$R_m=(R_{in}+R_{ex})/2$$

とし，$|z|<R_m$ 内に n 個根があるかどうかしらべる．もしあれば，円環を

$$R_{in}<|z|<R_m$$

に，なければ，

$$R_m<|z|<R_{ex}$$

にせばめる．これをくり返していけば絶対値最大の根が存在する円環の幅はいくらでもせばめていくことができる．そして最終的に $R_{in}=R_m=R_{ex}$ となり，半径 R_m の円上に絶対値最大の根をのせることができ，

R_m は根の絶対値に等しい.

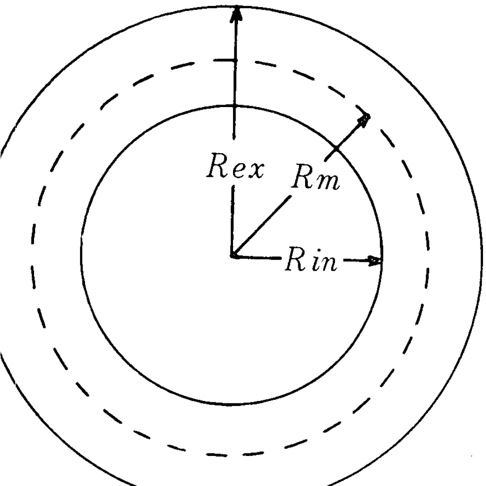

Fig. 1 The process for laying the largest root of an absolute value on a circle of radius R_m which is equal to $(R_{in}+R_{ex})/2$

また，このとき変換 $z \to R_m z$ により，半径 R_m の円を単位円に変換し Lehmer の関数列，

$f_0(R_m z),\ f_1(R_m z),\ \cdots\cdots,\ f_h(R_m z),\ f_{h+1}$

をつくれば，単位円上の根は $f_0(R_m z)$ と $f_0{}^*(R_m z)$ 共通根となるので，$f_0(R_m z)$ と $f_0{}^*(R_m z)$ は公約数をもつことになる．いまの場合半径 R_m の円外には $f(z)$ の根は存在しないので，最大公約数は定理 3 により単位円上の すべて の根をも つ $f_h(R_m z)$ である．一方，$f_h(R_m z)$ と $f_h{}^*(R_m z)$ の根は同じであるから $f_h(R_m z)=0$ は相反方程式といえる．

結局 $f_h(R_m z)$ の根を求め，それと先に求めた根の絶対値との積が求める $f(z)$ の根となる．ここで，新たに $P(z)=f_h(R_m z)$ とおき，$P(z)$ の根を求める方法について以下述べる．

3・2 $P(z)$の根を求める方法

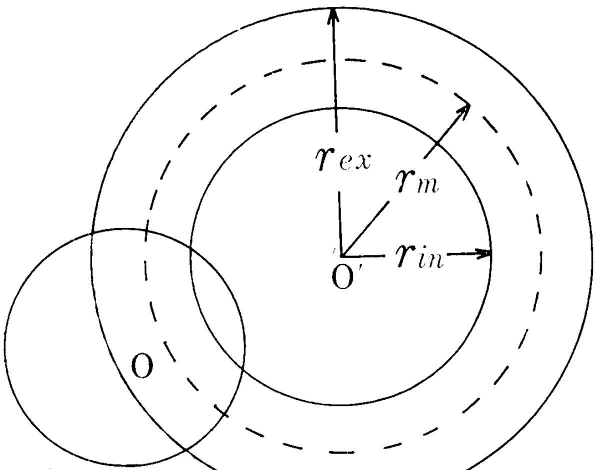

Fig. 2 The Process for finding a root on the unit circle

Fig. 2 に示すように z平面上に単位円を描く．$P(z)$ の根はすべてこの円上に存在している．ここで中心座標 O を円外の O' (座標 $ce^{i\theta}$) に移し，変数変換 $z \to z'+ce^{i\theta}$ を行なう．

前のように O' を中心に半径 r の円を描き，円内に $P(z')$ の根がすべてあるからどうかしらべ，なければ半径を $r \to 2r$ として同様にしらべる．これをくり返せば，まもなくすべての根を含む円を見い出すことができる．仮に半径 $2r$ の円内にすべての根が存在するとしよう．すると，円環 $r<|z'|<2r$ 内に少くとも絶対値最大の根が存在することになる．ここで，

$$r_{in}=r \qquad r_{ex}=2r$$

とおき，二分法により半径

$$r_m=(r_{in}+r_{ex})/2$$

の円を描き，円内に根がすべてあるか どうかし らべる．もしあれば円環を，

$$r_{in}<|z'|<r_m$$

なければ，

$$r_m<|z'|<r_{ex}$$

にせばめる．これをくり返していけば最終的に $r_{in}=r_m=r_{ex}$ となり，半径 r_m の円上に絶対値最大の根をのせることができる．円上の根の位置はOを中心とする単位円と半径 r_m の円の交点となる．交点は 2 個所できるが，幾何学的に定まる．どちらの交点に根があるかは，交点座標を z_1', z_2' とすれば $|P(z_1')|$ と $|P(z_2')|$ の大小関係によって決まる．もし $|P(z_1')|<|P(z_2')|$ ならば z_1' に，逆ならば z_2' に存在する．このようにして $P(z)$の根が求められ，結局 $f(z)$ の根は，

$$z=(z'+ce^{i\theta})R_m$$

として求められる．

4. 実 験 結 果

Table 1 に実験結果を示す．根の収束判定定数は 10^{-14}として行なった．アンダーラインは誤差を示す．

代数方程式の根がすべて単根の場合は理論通り精度よく求められるが，多重根をもつ場合はむずかしい問題がいろいろ生じてくる．円が根の近傍に近づくと，Lehmer の関数列が正しく求まらなくなる．これは関数列作成過程で異常な桁落ちが生ずることと，計算機の演算桁数の制限があることに起因している．どこで大きな桁落ちが生ずるかつかみ，その対策をプログラム上で講ずることはある程度可能である．Table 1 中の多重根の例などがそれである．しかしながら，多重根と近接根との識別はなかなかむずかしく，プログラムテクニックによる対策にも当然限界がある．

Table 1　Experimental results

Degree	Coefficients	Results
4	1, −8, 39, −62, 50	0.2999999999999986D01＋ 0.3999999999999990D01 *i*
		0.2999999999999986D01− 0.3999999999999990D01 *i*
		0.1000000000000014D01＋ 0.1000000000000013D01 *i*
		0.1000000000000014D01− 0.1000000000000013D01 *i*
9	1, 0.2+0.1*i*, 10*i*,	0.1414213562373098D01− 0.1414213562373098D01 *i*
	−1+2*i*, −35, −7−3.5*i*,	−0.1414213562373098D01＋ 0.1414213562373098D01 *i*
	−50*i*, 5−10*i*, 24,	0.1224744871391573D01− 0.1224744871391573D01 *i*
	4.8+2.4*i*	−0.1224744871391573D01＋ 0.1224744871391573D01 *i*
		0.1000000000000023D01− 0.1000000000000023D01 *i*
		−0.1000000000000023D01＋ 0.1000000000000023D01 *i*
		0.7071067811865390D00− 0.7071067811865390D00 *i*
		−0.7071067811865390D00＋ 0.7071067811865390D00 *i*
		−0.1999999999999989D00− 0.9999999999999907D−1 *i*
10	1, 55*i*, −1320,	0.1000000000000082D02 *i*
	18150*i*, 157773,	0.8999999999994227D01 *i*
	−902055*i*, −3416930,	0.8000000000018985D01 *i*
	8409500*i*,	0.6999999999961558D01 *i*
	12753576,	0.6000000000052339D01 *i*
	−1062840*i*,	0.4999999999951073D01 *i*
	−3628800	0.4000000000036916D01 *i*
		0.2999999999987438D01 *i*
		0.2000000000002944D01 *i*
		0.9999999999996982D00 *i*
11	1, −11, 55, −165,	0.1000000000000002D01
	330, −462, 462,	0.1000000000000002D01
	−330, 165, −55, 11,	0.1000000000000002D01
	−1	0.1000000000000002D01
		0.1000000000000002D01
		0.1000000000000002D01
		0.1000000000000002D01
		0.1000000000000002D01
		0.1000000000000002D01
		0.1000000000000002D01
		0.1000000000000002D01

5. むすび

本論文で Lehmer 法[1]およびそれを発展させた筆者等の方法[2]の問題点を洗い直し，新しい手法を加えた結果，根の精度の悪さ，根の偏角を求める過程のまずさなどが大きく改められた．そして根を求める理論が首尾一貫し，プログラム化する上でも簡略になった．

今後の問題としては代数方程式が多重根をもつ場合の理論的方策とプログラムテクニック上の方策を併わせ研究することであろう．このことは他の代数方程式の数値解法にも共通する課題である．最後に本方法を実験するのに九州大学大型計算センターの FACOM 230−60 を使用した．

参　考　文　献

1) D. H. Lehmer : JACM, **8**, 151～162 (1961)

2) 鳥居達生，岡田敏彦：情報処理，**8**, 10—17 (1967)

(昭和47年12月15日受理)