

強い高周波電界中のプラズマの運動

蛭原健治*

The Motion of the Plasma in the Strong High-Frequency Electric Field

Kenji EBIHARA

Abstract

A charged particle in the high-frequency field oscillates sinusoidally and the time-average external force by the field will not affect the motion of the particle. But when we consider the plasma in the uniform high-frequency field, the existence of the plasma distorts the field and plays the important part in the macroscopic motion of the plasma. The conservative force produced by the inhomogeneity of the field occurs the drift motion of the plasma.

Under the condition that the field frequency is greater than the plasma frequency and that thermal pressure can be neglected, the non-steady motion of the plasma is investigated. The simultaneous equation of, equation of motion, equation of continuity and Maxwell's equations are solved by the method of finite differences and the velocity and plasma density profiles are shown graphically.

1. 緒言

高周波放電現象の研究は古くから行なわれているが、その初期の研究は実験的な結果に基いた統計的法則の確立に主に重点がおかれていた。しかし高エネルギーが工業的に各方面で要求されている現在、高周波放電によって発生されるプラズマに対しても非常な関心が注がれて、いかなる外部的条件（例えば周波数、発生管径、発振器入力等）のもとで放電プラズマを最も効果的に加熱できるかということが一つの問題になっている。

また1950年代より本格的に始まった核融合の研究に刺激されてこの分野の研究は更に進められるにいたった。高周波放電の発生プロセス等の放電機構についての研究ではなく、すでに発生されているプラズマに高周波電磁界を印加し、プラズマの運動状態を研究しようとするものである。プラズマの安定化 (Dynamic Stabilization¹⁾), プラズマの高周波閉じ込め、プラズマの加熱 (イオンサイクロロン共鳴, エレクトロンサイクロロン共鳴, パラメトリック共鳴²⁾) などが重要な問題になっている。

これらの問題で共通していることは高周波場とプラズマの間に複雑な結合現象が生じ、状態解析が極めて困難になってくることである。場の周波数、衝突周波

数、プラズマ周波数間の大小関係、方程式の非線形性などにより、多種多様なプラズマ現象が現われ、未解決の問題も多い。この分野においては高周波電磁場中における荷電粒子の微視的運動および巨視的な統計的運動を理解することが基礎的な要求である。

1個の電子が均一な高周波電界中におかれた場合には、この粒子はある点を中心とした正弦波的な振動運動をするだけで、高周波の1周期について時間平均すると、電子にはみかけ上外力は作用していないと見なされる。ただし、この時に電子の運動によって発生される電界や磁界の摂動は無視されている。ところが、荷電粒子集団からなるプラズマに空間的に均一な高周波電界を印加した場合には、電界や磁界の摂動による効果がプラズマの運動にきわめて重要な役割を果たす。プラズマに一樣電界 E_0 を加えると、高周波の周期よりも短い時間内で現象を考える場合、電子は電界の力を受けて運動し、巨視的な速度が電子集団に生ずる。その結果電荷が移動し、電子電流が流れることになる。ただし、この時イオンの運動は考えず、静止しているものと仮定する。従ってこの空間的な電荷の変化にともなう電界、および電子電流による磁界が発生する。1個の荷電粒子の運動による摂動電界は外部平等電界に比較して無視できる程度に小さいが、プ

* 電気工学科

ラズマの場合にはこの振動電界 E_1 は無視することができない。この電界は誘電体における分極のようものである。すなわち、プラズマ中の電界 E は、

$$E = E_0 + E_1 \quad (1)$$

で表わされる。 E_0 は空間的に一様な高周波場であるが、プラズマの存在するために発生する電界 E_1 は空間的に大きさが異なり、不均一電界である。従って高周波電界 E は不均一になり、この性質のためにプラズマはゆっくりとしたドリフト運動をする。本論においては熱圧力が無視できるという条件のもとで、この非定常運動の解析を行なう。

2. 荷電粒子に作用する高周波電界による力³⁾

不均一な高周波電界中にある荷電粒子に作用する時間平均力を一次元の場合に求めてみる。電界を $E(r) \cdot \cos \omega t$ で示せば、電子(電荷 e , 質量 m) に対する運動方程式は

$$r = \frac{e}{m} E(r) \cos \omega t \quad (2)$$

となる。ここで r を時間的にゆっくりとした変位 X と高周波による振動 ρ の和で近似する。

$$r = X + \rho. \quad (3)$$

式(3)を(2)式に代入し、 ρ による展開を行なえば、

$$\ddot{X} + \ddot{\rho} = \frac{e}{m} E(X) \cos \omega t + \frac{e}{m} \frac{dE}{dX} \rho \cos \omega t. \quad (4)$$

この方程式でオーダーの比較をすれば、

$$\ddot{\rho} = \frac{e}{m} E(X) \cos \omega t, \quad (5)$$

$$\ddot{X} = \frac{e}{m} \frac{dE}{dX} \rho \cos \omega t. \quad (6)$$

式(5)より、

$$\rho = -\frac{e}{m\omega^2} E(X) \cos \omega t. \quad (7)$$

従って(6)式は、

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -\frac{e^2}{m^2\omega^2} \frac{dE(X)}{dX} E(X) \cos^2 \omega t, \\ &= -\frac{e^2}{2m^2\omega^2} \frac{d}{dX} (E(X)^2) \cos^2 \omega t. \end{aligned} \quad (8)$$

この式を高周波の一周期にわたって時間平均すると、

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -\frac{e^2}{4m^2\omega^2} \frac{d}{dX} \langle E(X)^2 \rangle \\ &= \frac{f}{m}. \end{aligned} \quad (9)$$

$$f = -\frac{e^2}{4m\omega^2} \frac{d}{dX} \langle E(X)^2 \rangle. \quad (10)$$

記号 $\langle \rangle$ は高周波一周期についての時間平均を意味する。力 f は場中の荷電粒子の電荷の正負にかかわらず、その方向は電界の不均一性のみに依存する。すな

わち、プラズマに対しては電子、イオンの別なく、この力がプラズマのドリフト運動を支配する。

この力の導出の過程においては多くの仮定がなされている。式(4)がなりたつたのは、高周波の一周期間の電子の飛行距離 S は電界の特性長 L に比較し極めて小さくなければならない。すなわち、

$$S \sim \left| \frac{eE(X)}{m\omega^2} \right| \ll L.$$

また電子の平均自由行程 λ_e は S よりずっと大きくなければならない ($S \ll \lambda_e$)。これは低密度プラズマを仮定することにもなり、 $\omega \gg \omega_p$ の条件でもある。 ω_p はプラズマ周波数である。更に粒子間の衝突効果は考慮していない。

3. 高周波電磁界中のプラズマの運動

3.1 基礎方程式

プラズマに一様な外部高周波電界を印加したとき、プラズマの存在により生ずる振動電界 E_1 および振動磁界 B_1 は Maxwell の方程式で次の様に示される。

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } B_1 &= \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j, \\ \text{rot } E_1 &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B_1}{\partial t}, \\ \text{div } E_1 &= 4\pi\sigma. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

電流密度 j と電荷密度 σ は零次近似で考えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial t} &= \frac{e}{m} E_0, \\ j &= en_e V_0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \text{div } j &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

n_e は電子密度、 V_0 はプラズマの速度であるが、イオン電流を無視しているため、電子の速度になる。強い高周波電界の場合には $v \ll E^2 \sim 2v \ll E_0 E_1$ と近似的に示すことができる。電荷密度 $\sigma (= -Zn_i e + n_e e)$ は高周波で時間的に変動している量であり、準中性は保たれていない。しかし準静近似を適応して、 $\sigma(r) = \sigma_0(X) + \sigma_1(\rho)$ で示し、高周波一周期にわたる平均をとると、 $\langle \sigma(r) \rangle = \langle \sigma_1(\rho) \rangle = 0$ となり、準中性は成り立っている。従ってプラズマに対する方程式は高周波の一周期について時間平均した量について考えることにする。

$$Z \langle n_i \rangle = \langle n_e \rangle = n. \quad (13)$$

プラズマに対する運動方程式は、熱圧力無視の条件下で、

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V = -\frac{Ze^2}{2mm_i\omega^2} \nabla \langle E_0 E_1 \rangle. \quad (14)$$

連続の方程式は,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(nV) = 0. \quad (15)$$

m_i, Z はイオンの質量, 価電数であり, V はプラズマ速度で,

$$V = \frac{\langle n_e \rangle m V_e + \langle n_i \rangle m_i V_i}{\langle n_e \rangle m + \langle n_i \rangle m_i}.$$

式(11), (12)より,

$$\text{rot rot } E_1 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 E_1 = -\frac{4\pi e^2 n}{m c^2} E_0, \quad (16)$$

$$\text{div } E_1 = \frac{4\pi e^2 E_0}{m \omega^2} (\nabla n), \quad (17)$$

となり, 電界 E_1 は電子密度の傾きに関係してくる. 方程式(14)~(17)を使えば, 熱圧力を無視した場合, 強い高周波場におけるプラズマの運動に対する解析を行なうことができる.

3.2 高周波電磁場によるプラズマの膨張現象

外部電界 E_0 は x 成分だけを持ち, y 方向に伝播する平面波であり, 電子密度は x 方向に変化しているとする. この場合に起こるプラズマの非定常運動 (膨張現象) について調べる.

$$\left. \begin{aligned} n &= n(x, t), \\ E_0 &= [E_0 e^{i(\omega t - ky)}, 0, 0], \\ V &= [u(x, t), 0, 0]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

この条件の場合には $\text{rot rot } E_1 = 0$ であり, (16)式から,

$$E_1 = \frac{4\pi e^2 n(x, t)}{m \omega^2} E_0 \quad (19)$$

となるから, プラズマに対する方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\gamma \frac{\partial n}{\partial x}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + n \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial n}{\partial x} = 0. \quad (21)$$

ただし, ここで

$$\gamma = \frac{4\pi Z e^2}{2 m_i \omega^2} u_s^2, \quad u_s = \frac{|e| E_0}{m \omega},$$

u_s は $\dot{\rho}$ の振巾であり, 摂動速度である.

無次元量

$$\tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{n_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \xi = \frac{x}{x_0}$$

を用いれば,

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = -\beta \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \xi}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tau} + \tilde{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{n}}{\partial \xi} = 0 \quad (23)$$

となる. ただし, \tilde{u}, \tilde{n} を u, n で示しており, $\beta = \gamma t_0^2 n_0 / x_0^2$ である. また $t_0 n_0 = x_0$ なる関係がある. 境界条件は $\xi = \pm 1.5$ にて $u = 0, n = 0$, また

$\xi = 0$ において $du/d\xi = 0, dn/d\xi = 0$ とする. 方程式(22)と(23)を連立に解く場合, 初期条件として,

$$n = f(\xi), \quad u = g(\xi) \quad (24)$$

を与える. 連立方程式の解は差分法 (附録) を用いて

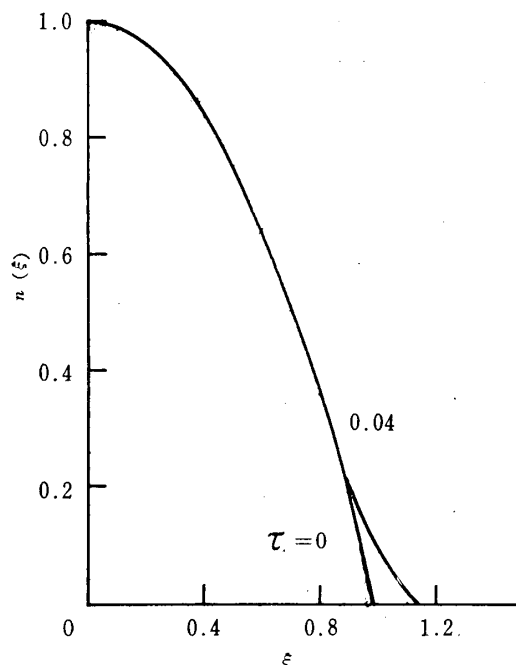


Fig. 1A Variation of Plasma density with the values of the normalized time τ . The initial condition for density is parabolic distribution, but that for velocity is zero

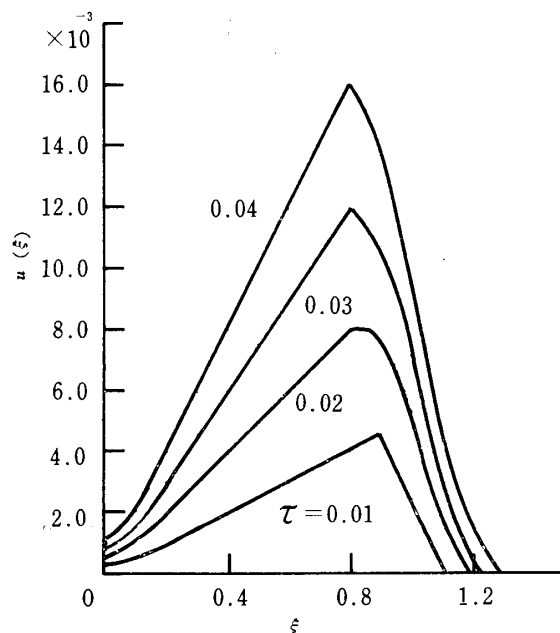


Fig. 1B Development of the plasma velocity with the variation of the time τ

求めた。 $f(\xi) = 1 - \xi^2$, $g(\xi) = 0$ の場合の計算結果を Fig. 1 に、また $f(\xi) = 1 - \xi^2$, $g(\xi) = 1 - \xi^2$ の初期条件に対する結果を Fig. 2 に示す。いずれも β は 0.25 である。前者の初期条件に対しては、速度は周辺部において急激な増加を示すが、中心付近ではほとんど変化は見られない。最高速度の点は時間の経過にともない、次第に中心の方向に移動してゆく。密度分布については周辺部でわずかに密度が増えていることが分かるが、この計算におけるような時間範囲では変化がきわめて小さいものと思われる。そのため、十分な時間が経過し、速度分布も密度分布も放物型の分布になったと仮定し、その後の両者の変動の様子を計算したものが Fig. 2 である。両分布については傾向は同じで、周辺部において速度分布も密度分布も増加し、時間的にプラズマが膨張して行くことが示されている。

4. 検 討

プラズマについての運動方式において熱圧力を無視していることは、プラズマの温度が零であること、すなわち、冷たいプラズマを仮定することになる。その場合の保存的な高周波ポテンシャル

$$U(X) = \frac{e^2}{2 m \omega^2} E(X)^2 \tag{25}$$

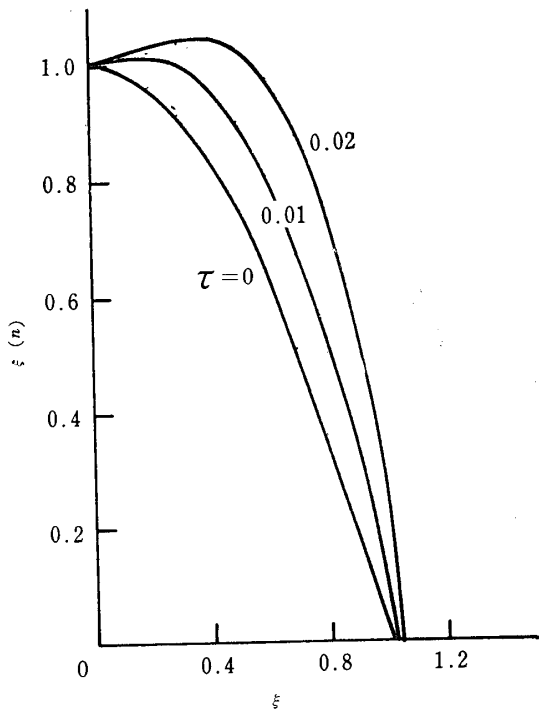


Fig. 2A Variation of Plasma density with the values of the normalized time τ

The initial condition for the density and velocity is parabolic distribution

の力学的効果を調べた。同種の問題に対し Gorbunov⁴⁾ は解析解をえているが、初期条件に特定の分布しか用いられず、また複雑な解になっている。本論文においては任意の初期条件に対するプラズマの運動を知る目的で、差分法による解析を行なった。

プラズマは高周波電界に対しては透明とみなしており、プラズマ層の厚さ x_0 は $1/k$ よりずっと小でなければならず、パラメーター

$$a \sim \frac{k |e| E(X)}{m \omega^2} \ll 1$$

の条件を満足していなければならない。ここで取り扱った、高周波の周波数 ω が電子プラズマ振動数 ω_p

($= \sqrt{4 \pi n e^2 / m}$) より大きいときの現象は解析は容易であるが、低密度プラズマを対象としたものである。外場周波数が ω_p より小さく、イオンプラズマ振動数より大きい場合 ($\omega_{pi} < \omega < \omega_p$)、プラズマは多くの興味ある現象²⁾を示すが、理論的な解析はきわめて複雑になってくる。しかし高エネルギープラズマの発生という立場から活発な研究が行なわれている分野である⁵⁾。

終りに、本研究に関し九州大学助教授村岡克紀氏、

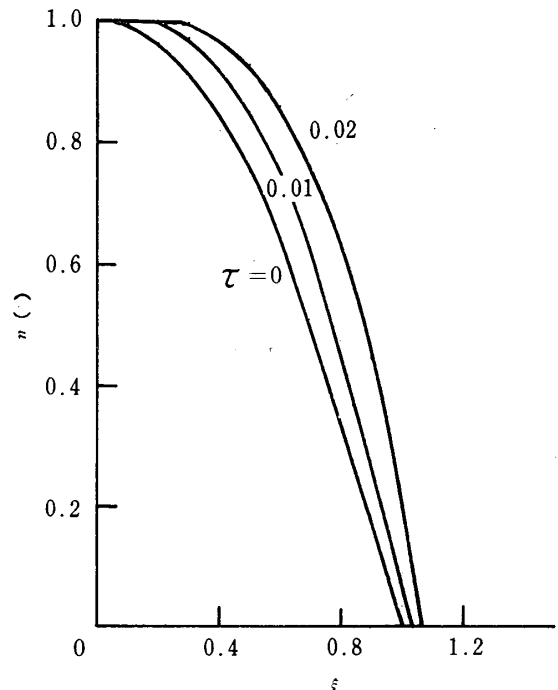


Fig. 2B Development of the plasma velocity with the variation of the time τ

九州大学講師渡辺征夫氏より有益な助言をいただいた。また信州大学大路通雄教授、本学佐伯節夫助教授、九州大学赤崎正則教授より終始懇切なる御指導を賜った。ここに感謝の意を表する。

本研究には文部省科学研究費の補助を受け、論文の内容の一部は1970年日本物理学会秋の大会で発表した。

参 考 文 献

- 1) V. P. Gordienko, et al., Sov. Phys.-JETP, **27**, 185 (1968)
A. A. Ivanov, et al., Sov. Phys.-JETP, **26**, 968 (1968)
- 2) V. P. Silin, Sov. Phys.-JETP, **21**, 137 (1965)
- 3) Ya. M. Pinskii, Sov. Phys.-Tech. Phys., **11**, 865 (1967), V. I. Perel and Ya. M. Pinskii, Sov. Phys.-Tech. Phys., **11**, 752 (1966), Sov. Phys.-Tech. Phys., **8**, 197 (1963)
- 4) L. M. Gorbunov, Sov. Phys.-JETP, **29**, 907 (1969)
- 5) V. P. Silin, Sov. Phys.-JETP, **30**, 165 (1970), Ya. B. Fainberg and V. D. Shapiro, Sov. Phys.-JETP, **25**, 189 (1967)

(昭和46年4月15日受理)

附 録

連立方程式(2)と(3)を差分法で解く時以下の様に行なった。(2)(3)式を次のように書く。

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -u \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial n}{\partial \xi}, \quad (\text{A. 1})$$

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = -u \frac{\partial n}{\partial \xi} - n \frac{\partial u}{\partial \xi}. \quad (\text{A. 2})$$

時間 (τ), 空間 (ξ) の微小量をそれぞれ, k と h で表わすと,

$$\tau = kj, \quad \xi = h(i-1). \quad (\text{A. 3})$$

ただし $j = 0, 1, 2, \dots, \infty$, $i = 1, 2, \dots, 16$.

そこで ξ に対して中心差分, τ に対して前進差分をとれば,

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}, \quad \frac{\partial n}{\partial \tau} = \frac{n_{i,j+1} - n_{i,j}}{k},$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2h} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}),$$

$$\frac{\partial n}{\partial \xi} = \frac{1}{2h} (n_{i+1,j} - n_{i-1,j}).$$

これは $i = 1, 16$ については除外されねばならない。

$i = 1$ については ξ に関する前進差分を, $i = 16$ については後退差分をとった。

従って(A.1), (A.2)に対する差分方程式は, $i = 1$ のとき

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{h} \left\{ u_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) + \beta (n_{i+1,j} - n_{i,j}) \right\}, \quad (\text{A. 4})$$

$$n_{i,j+1} = n_{i,j} - \frac{k}{h} \left\{ u_{i,j} (n_{i+1,j} - n_{i,j}) + n_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i,j}) \right\}. \quad (\text{A. 5})$$

$i = 2 \sim 15$ のとき

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{2h} \left\{ u_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + \beta (n_{i+1,j} - n_{i-1,j}) \right\}, \quad (\text{A. 6})$$

$$n_{i,j+1} = n_{i,j} - \frac{k}{2h} \left\{ u_{i,j} (n_{i+1,j} - n_{i-1,j}) + n_{i,j} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) \right\}. \quad (\text{A. 7})$$

$i = 16$ のとき

$$u_{i,j+1} = u_{i,j} - \frac{k}{h} \left\{ u_{i,j} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \beta (n_{i,j} - n_{i-1,j}) \right\}, \quad (\text{A. 8})$$

$$n_{i,j+1} = n_{i,j} - \frac{k}{h} \left\{ u_{i,j} (n_{i,j} - n_{i-1,j}) + n_{i,j} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) \right\}, \quad (\text{A. 9})$$

境界条件は

$$\left. \begin{aligned} u_{1,j} &= u_{2,j}, \quad n_{1,j} = n_{2,j}, \\ u_{16,j+1} &= 0, \quad n_{16,j+1} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 10})$$

本計算においては $h = 0.1$, $k = 0.0001$ にとっている。また $\beta = 0.25$ にした。