導体平板に対向した矩形断面円形コイルとその鏡像コイルとの相互誘導係数の計算 （第2報）

戸 田 圭 一*・長 島 弘 修**

Calculation of Mutual Inductance between a Circular Coil with a Rectangular Cross Section in front of a Conductor Plate and its Image Coil (2nd report)

Keiichi TODA and Hironobu NAGASHIMA

Abstract

Calculation of the main and the 1st correction term of mutual inductance between a circular test coil with a rectangular cross section, being faced to a metal plate, and its image coil was shown on the 1st report. This report is continued from the 1st report and describes the calculation of the 2nd correction term and its numerical tabulation.

1. 緒 言

この報告は第1報[1]に引続くものであるので，できる限り重複を避けて説明をする．第1報第1図のように充分に厚くて広い平板導体に対向した矩形断面円形コイルCと，その導体表面に対して持つ鏡像コイルC′との間の相互誘導係数は，コイルCの実効インピーダンスの解析などにおいて重要な定数となる．第1報においてはこの相互誘導係数の近似の第1項とそれに対する補正第1項を完全楕円積分であらわした．当時補正の第2項は近似を用いなければ計算し易い形にあらわせないと考えていたが，この補正項も近似計算をすることなく完全楕円積分であらわされることが証明された．従って表題の相互誘導係数の計算においてその適用範囲も広まり，かつ近似度も向上することになった．この報告では第2補正項の導出について述べる．

1.1 第1報の概要

第2補正項の計算に必要な式を第1報の中から拾い出しておく．精しくは第1報を参照されたい．

記　号

ζ ；ハンケル変換のための実数変数

z_0 ；導体表面とコイル面との距離（第1報第1図参照）

τ ；コイルの軸方向の厚み

a_0 ；コイルの内半径，$\sqrt{1-\alpha}\,a$

a_1 ；コイルの外半径 $\sqrt{1+\alpha}\,a$

a ；平均半径，ただし

$$a^2=(a_1{}^2+a_0{}^2)/2 \tag{1}$$

α ；$\alpha=(a_1{}^2-a_0{}^2)/(a_1{}^2+a_0{}^2)$ (2)

M ；コイルCとその鏡像C′との間の相互誘導係数

μ_0 ；真空の透磁率

N ；コイルの巻数

M_3；第2補正項までを含むMの近似値

I_a ；(4)式を参照されたい

$I_{ap}(m)$；(4)式の第m項のうちの $p=p$ の総和

y ；$y=a\zeta$

x ；$x=z/a$ ただし z は導体表面からの距離

$G_3'(k)$；(8)式を参照されたい

$G_3''(k)$；(35)式を参照されたい

$G_3(k)$ ；(37)式を参照されたい

$G_1(k)$，$G_2(k)$；第1報を参照されたい

k ；完全楕円積分の母数 $k=\{1+(x/2)^2\}^{-\frac{1}{2}}$

k_1，k_2，k_3；夫々 x が $2z_0/a$，$(2z_0+\tau)/a$，$2(z_0+\tau)/a$ になった時の k の値

Mは第1報(22)式により

$$M=\frac{N^2\mu_0\pi}{\tau^2a^2(\sqrt{1+\alpha}-\sqrt{1-\alpha})^2}$$

* 電気工学科

** 大学院工学研究科電気工学専攻（旭光学KK）

$$\times \int_0^\infty (e^{-2z_0\zeta}+e^{-2(z_0+\tau)\zeta}-2e^{-(2z_0+\tau)\zeta})$$

$$\times \zeta^{-2} I_a{}^2 \, d\zeta \qquad (3)$$

ここで I_a は第1報20式で与えられる．

$$I_a=\frac{a}{\zeta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{8n(\alpha\zeta/2)^{2p+1}}{(2p+1)!(4n^2-1)}J_{2(n+p)+1}(a\zeta)\right.$$

$$\left.-\frac{4n\alpha(\alpha a\zeta/2)^{2p}}{(2p)!(2n-1)}J_{2(n+p)}(a\zeta)\right\}$$

$$+\frac{a}{\zeta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{n\alpha^2(\alpha a\zeta/2)^{2p+1}}{(2p+1)!}J_{2(n+p)+1}(a\zeta)\right.$$

$$\left.-\frac{n\alpha^3(2n-3)(\alpha a\zeta/2)^{2p}}{(2p)!\times 6}J_{2(n+p)}(a\zeta)\right\}$$

$$+\frac{a}{\zeta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\left\{\frac{\alpha^4 n(2n-3)(2n-5)}{48}\right.$$

$$\times\frac{(\alpha a\zeta/2)^{2p+1}}{(2p+1)!}J_{2(n+p)+1}(a\zeta)$$

$$-\frac{\alpha^5 n(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{480}$$

$$\left.\times\frac{(\alpha a\zeta/2)^{2p}}{(2p)!}J_{2(n+p)}(a\zeta)\right\}+\cdots\cdots\cdots \qquad (4)$$

(4)式の右辺のうち第1項，第2項，第3項，………第m項，…を夫々 $\sum_{p=0}^{\infty} I_{ap}(1)$，$\sum_{p=0}^{\infty} I_{ap}(2)$，$\sum_{p=0}^{\infty} I_{ap}(3)$，……$\sum_{p=0}^{\infty} I_{ap}(m)$．……であらわす．これらの一般項，$\sum_{p=0}^{\infty} I_{ap}(m)$ の中の例えば $p=1$ だけのものを $I_{a1}(m)$ のように表示することにする．このような分類をすれば I_a の中で α を係数とするものは $I_{a0}(1)$，α^3 を係数とするものは $I_{a1}(1)+I_{a0}(2)$，α^5 を係数とするものは $I_a(1)+I_{a1}(2)+I_{a0}(3)$，になる．(3)式左辺の被積分関数の中には I_{a2} として存在するので

$$I_{a2}=\{I_{a0}(1)\}^2+2I_{a0}(1)\{I_{a1}(1)+I_{a0}(2)\}+[\{I_{a1}(1)$$
$$+I_{a0}(2)\}^2+2I_{a0}(1)\{I_{a2}(1)+I_{a1}(2)+I_{a0}(3)\}+$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad (5)$$

のようにあらわせる．(5)式の右辺の第1項，第2項，第3項は夫々 α^2，α^4，α^6 の係数を持つことになる．第1報では第1項および第2項を $I_a{}^2$ の近似値として計算した．本報では(5)式の第3項を追加することが目的になる．

2. $\{I_{a1}(1)+I_{a0}(2)\}^2$ に関する積分の計算

第1報(41)式および(43)式から，$y=a\zeta$ とおき

$$I_{a1}(1)+I_{a0}(2)=\frac{\alpha^3 a^2}{24}\{2yJ_0(y)+(y^2-3)J_1(y)\} \quad (6)$$

したがって

$$\{I_{p1}(1)+I_{a0}(2)\}^2$$
$$=\frac{\alpha^6 a^4}{576}\{(9-6y^2+y^4)J_1{}^2(y)+(4y^3$$
$$-12y)J_1(y)J_0(y)+4y^2J_0{}^2(y)\} \qquad (7)$$

(7)式を用いたつぎの積分を $G_3'(k)$ とおく

$$G_3'(k)=\frac{\pi}{576}\int_0^\infty e^{-xy}\left\{\left(y^2-6+\frac{9}{y^2}\right)J_1{}^2(y)\right.$$
$$\left.+\left(4y-\frac{12}{y}\right)J_1(y)J_0(y)+4J_0{}^2(y)\right\}dy \qquad (8)$$

ここで各項毎に積分をすれば[2)3)4)]

$$\pi\int_0^\infty e^{-xy}y^2J_1{}^2(y)dy$$
$$=\frac{k^3}{4}\left\{K(k)-\frac{(1-2k^2)}{1-k^2}E(k)\right\} \qquad (9)$$

$$-6\pi\int_0^\infty e^{-xy}J_1{}^2(y)dy$$
$$=6\left\{\frac{2}{k}E(k)-\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k)\right\} \qquad (10)$$

$$9\pi\int_0^\infty e^{-xy}y^{-2}J_1{}^2(y)dy$$
$$=\frac{12}{k^3}\{(2k^2-1)E(k)+(1-k^2)K(k)\}-\frac{9\pi x}{2} \qquad (11)$$

$$4\pi\int_0^\infty e^{-xy}yJ_1(y)J_0(y)dy$$
$$=2k\{K(k)-E(k)\} \qquad (12)$$

$$-12\pi\int_0^\infty e^{-xy}y^{-1}J_1(y)J_0(y)dy$$
$$=\frac{-24}{k}E(k)+6\pi x \qquad (13)$$

$$4\pi\int_0^\infty e^{-xy}J_0{}^2(y)dy$$
$$=4kK(k) \qquad (14)$$

ただし $K(k)$ および $E(k)$ は k を母数とする第1種および第2種完全楕円積分をあらわし，母数 k は次式のようになる．

$$k^2=\{1+(x/2)^2\}^{-1} \qquad (15)$$

したがって

$$G_3'(k)=\frac{1}{576}\left[\left(\frac{k^3}{4}+12k-\frac{24}{k}+\frac{12}{k^3}\right)K(k)\right.$$
$$+\left\{\frac{-k^3}{4}+\frac{k^5}{4(1-k^2)}-2k+\frac{12}{k}-\frac{12}{k^3}\right\}E(k)$$
$$\left.+\frac{3}{2}\pi x\right] \qquad (16)$$

となる．

3.1 $I_{a2}(1)$ の計算

(4)式より

$$\frac{y}{a^2}I_{a2}(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{8n\alpha^5y^5}{5!(4n^2-1)2^5}J_{2n+5}(y)\right.$$
$$\left.-\frac{4n\alpha^5y^4}{4!(2n-1)2^4}J_{2n+4}(y)\right\}$$
$$=\frac{\alpha^5y^5}{5!\,2^5}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8n}{4n^2-1}J_{2n+5}(y)\right.$$

$$-\frac{10n\{J_{2n+3}(y)+J_{2n+5}(y)\}}{(2n-1)(n+2)}\Big]$$

$$=\frac{\alpha^5 y^5}{5!\,2^5}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{8n}{4n^2-1}J_{2n+5}(y)-\frac{2}{3}J_5(y)$$

$$-\Big\{\frac{10n}{(2n-1)(n+2)}+\frac{10(n+1)}{(2n+1)(n+3)}\Big\}J_{2n+5}(y)\Big] \tag{17}$$

ここで

$$\frac{8n}{4n^2-1}=\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n+1} \tag{18}$$

$$\frac{10n}{(2n-1)(n+2)}=\frac{2}{2n-1}+\frac{4}{n+2} \tag{19}$$

$$\frac{10(n+1)}{(2n+1)(n+3)}=\frac{2}{2n+1}+\frac{4}{n+3} \tag{20}$$

となるから

$$\frac{4!\,2^5}{\alpha^5 y^4 a^2}I_{a2}(1)+\frac{2}{3}J_5(y)$$

$$=-\frac{4}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{(n+2)(n+3)}J_{2n+5}(y)$$

$$=-\frac{4}{5}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}J_{2n+1}(y)-\frac{3}{2}J_3(y)$$

$$-\frac{5}{6}J_5(y)\Big\} \tag{21}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}J_{2n+1}(y)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y}{n(n+1)}\Big\{J_{2n}(y)+J_{2n+2}(y)\Big\}$$

$$=y\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2(n+1)}(y)}{n(n+2)}+\frac{y}{4}J_2(y) \tag{22}$$

第1報(40)式より

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2(n+1)}(y)}{n(n+2)}$$

$$=\frac{2}{y^2}-\frac{J_0(y)}{2}-\frac{2J_0(y)}{y^2}-\frac{3J_2(y)}{4} \tag{23}$$

(21)，(22)，(23)式から

$$I_{a2}(1)=\frac{\alpha^5 y^4 a^2}{1920}\Big\{\frac{-4}{y}+\Big(y+\frac{4}{y}\Big)J_0(y)$$

$$+yJ_2(y)+3J_3(y)\Big\} \tag{24}$$

となる．

3.2 $I_{a1}(2)$

(4)式より

$$\frac{y}{a^2}I_{a1}(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{n\alpha^5y^3}{3!\,2^3}J_{2n+3}(y)$$

$$-\frac{\alpha^5 n(2n-3)y^2}{2!\times 6\times 2^2}J_{2n+2}(y)\Big\}$$

$$=\frac{\alpha^5y^3}{48}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{nJ_{2n+3}(y)-\frac{n(2n-3)}{y}J_{2n+2}(y)\Big\}$$

$$=\frac{\alpha^5y^3}{384}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[8nJ_{2n+3}(y)-\frac{n(2n-3)}{4(n+1)}\Big\{J_{2n+1}(y)$$

$$+J_{2n+3}(y)\Big\}\Big]$$

$$=\frac{\alpha^5y^3}{384}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[8nJ_{2n+3}(y)-J_3(y)$$

$$-2J_{2n+3}(y)\Big\{\frac{(n+1)(2n-1)}{n+2}-\frac{n(2n-3)}{n+1}\Big\}\Big]$$

$$=\frac{\alpha^5y^3}{384}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{2(8n^2+14n+1)}{(n+1)(n+2)}J_{2n+3}(y)-J_3(y)\Big\}$$

$$=\frac{\alpha^5y^3}{384}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{16J_{2n+3}(y)-\frac{10(2n+3)}{(n+1)(n+2)}J_{2n+3}(y)$$

$$-J_3(y)\Big\} \tag{25}$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}J_{2n+3}(y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}J_{2n+1}(y)-\frac{3}{2}J_3(y) \tag{26}$$

となるので，(22)式の計算結果を参照することによって

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}J_{2n+3}(y)$$

$$=\frac{2}{y}-\Big(\frac{y}{2}+\frac{2}{y}\Big)J_0(y)-\frac{y}{2}J_2(y)-\frac{3}{2}J_3(y)$$

故に

$$I_{a1}(2)=\frac{\alpha^5y^2a^2}{384}\Big\{14J_3(y)+5yJ_2(y)$$

$$+\Big(5y+\frac{20}{y}\Big)J_0(y)-\frac{20}{y}+16\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n+3}(y)\Big\} \tag{27}$$

となる．

3.3 $I_{a0}(3)$ の計算

$$\frac{y}{a^2}I_{a0}(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{\alpha^5yn(2n-3)(2n-5)}{96}J_{2n+1}(y)$$

$$-\frac{\alpha^5n(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{480}J_{2n}(y)\Big\}$$

$$=\frac{\alpha^5y}{480}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[5n(2n-3)(2n-5)J_{2n+1}(y)$$

$$-\frac{(2n-3)(2n-5)(2n-7)}{4}\Big\{J_{2n-1}(y)+J_{2n+1}(y)\Big\}\Big]$$

$$=\frac{\alpha^5y}{1920}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[20n(2n-5)(2n-3)J_{2n+1}(y)+15J_1(y)$$

$$-(2n-3)(2n-5)\Big\{(2n-7)+(2n-1)\Big\}J_{2n+1}(y)\Big]$$

$$=\frac{\alpha^5y}{1920}\Big\{15J_1(y)+\sum_{n=1}^{\infty}8(2n+1)(2n-3)(2n-5)$$

$$\times J_{2n+1}(y)\Big\} \tag{27}$$

ここで

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)(2n-3)(2n-5)J_{2n+1}(y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(2n+1)^3-2(20n^2-4n-7)\right\}J_{2n+1}(y)$$

$$=\frac{y+y^3}{2}-J_1(y)-2\sum_{n=1}^{\infty}(20n^3-4n-7)J_{2n+1}(y) \tag{28}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(20n^2-4n-7)J_{2n+1}(y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-7(2n+1)J_{2n+1}(y)+10n(2n+1)J_{2n+1}(y)\right.$$

$$=\frac{-7y}{2}+7J_1(y)+10\sum_{n=1}^{\infty}n(2n+1)J_{2n+1}(y) \tag{29}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(2n+1)J_{2n+1}(y)$$

$$=\frac{y}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left\{J_{2n}(y)+J_{2n+2}(y)\right\}$$

$$=\frac{y}{2}\left[J_2(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(2n+1)J_{2n+2}(y)\right\}\right]$$

$$=\frac{y}{2}\left[J_2(y)-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{J_{2n+2}(y)+(2n+2)J_{2n+2}(y)\right\}\right]$$

$$=\frac{y}{2}\left[J_2(y)-\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}J_0(y)-J_2(y)\right\}\right.$$

$$\left.+\frac{y}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{J_{2n+1}(y)+J_{2n+3}(y)\right\}\right]$$

$$=\frac{y}{4}\left\{4J_2(y)-1+J_0(y)-yJ_3(y)+2y\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n+1}(y)\right.$$

$$=\frac{y}{4}\left\{yJ_1(y)-1+J_0(y)+2y\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n+1}(y)\right\} \tag{30}$$

(27), (28), (29), (30)式から

$$I_{a0}(3)=\frac{\alpha^5a^2}{1920}\left\{100y+4y^3-40yJ_0(y)-105J_1(y)\right.$$

$$\left.-40y^2J_1(y)-80y^2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n+1}(y)\right\} \tag{31}$$

3.4 $2I_{a0}(1)\{I_{a2}(1)+I_{a1}(2)+I_{a0}(3)\}$ に関する積分

(24), (27), (31)式のように $I_{a2}(1)$, $I_{a1}(2)$, $I_{a0}(3)$ が求まったから

$$1920\ \{I_{a2}(1)+I_{a1}(2)+I_{a0}(3)\}/\alpha^5a^2$$

$$=(y^5+29y^3+60y)J_0(y)-(105+40y^2)J_1(y)$$

$$+(y^5+25+25y^3)J_2(y)+3y^4J_3(y)$$

$$+80y^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{J_{2n+3}(y)-J_{2n+1}(y)\right\} \tag{32}$$

(32)式の最終項は $-80y^2J_3(y)$ になるので，ベッセル関数を0次および1次にまとめると．

$$I_{a2}(1)+I_{a1}(2)+I_{a0}(3)$$

$$=\frac{\alpha^5a^2}{1920}\left\{(100y-8y^3)J_0(y)\right.$$

$$\left.-(y^4-44y^2+185)J_1(y)\right\} \tag{33}$$

一方第1報(26)式により

$$I_{a0}(1)=-\alpha a^2J_1(y) \tag{34}$$

となるので次式の積分を $G_3''(k)$ とおけば(9), (10), (11), (12), (13)を用いて完全楕円積分であらわせる．

$$G_3''(k)=\frac{\pi}{960}\int_0^{\infty}e^{-xy}\left\{\left(8y-\frac{100}{y}\right)J_1(y)J_0(y)\right.$$

$$\left.+\left(y^2-44+\frac{185}{y^2}\right)J_1{}^2(y)\right\}dy \tag{35}$$

$$=\frac{K(k)}{960}\left(\frac{k^3}{4}+48k-\frac{1004}{3k}+\frac{740}{3k^3}\right)$$

$$-\frac{E(y)}{960}\left\{\frac{k^3}{4}+4k-\frac{1144}{3k}+\frac{740}{3k^3}+\frac{k^5}{4(1-k^2)}\right\}$$

$$-\frac{17}{384}\pi x \tag{36}$$

4. 第2補正項

$$G_3(k)=G_3'(k)+G_3''(k)+\frac{\pi x}{24} \tag{37}$$

$$=\frac{1}{1440}\left\{K(k)\left(k^3+102k-\frac{562}{k}+\frac{400}{k^3}\right)\right.$$

$$\left.-E(k)\left(k^3+11k-\frac{672}{k}+\frac{400}{k_3}-\frac{k^5}{1-k^2}\right)\right\} \tag{38}$$

上式の $G_3(k)$ は第1報における $G_1(k)$, $G_2(k)$ と同じ意味を持っている．また πx についての項を消去した理由は $G_3(k)$ は必ずつぎの式の形で用いるのでこの項は常に消滅する．

$$M\fallingdotseq M_3=\frac{\mu_0a^3N^2\alpha^2}{2\tau(1-\sqrt{1-\alpha^2})}\left[G_1(k_1)+G_2(k_3)\right.$$

$$-2G_1(k_2)+\alpha^2\left\{G_2(k_1)+G_2(k_3)-2G_2(k_2)\right\}$$

$$\left.+\alpha^4\left\{G_3(k_1)+G_3)-2G_3(k_2)\right\}\right] \tag{39}$$

ただし M_3 は第2補正項までを用いた M の近似値をあらわし，k_1, k_2, k_3, は x の値が夫々 $2z_0/a$ $(2z_0+\tau)/a$, $2(z_0+\tau)/a$ になった時の k を意味する．

$G_3(k)$ を x をパラメーターとして数表にすれば Table 1 のようになる．

Table 1 $G_3(k)$ *for the normalized distance* x

x	$G_3(k)$	x	$G_3(k)$	x	$G_3(k)$
0.01	27.636	0.35	0.042032	0.69	0.080657
0.02	6.8318	0.36	0.042640	0.70	0.081989
0.03	2.9904	0.37	0.043326	0.71	0.083323
0.04	1.6519	0.38	0.044079	0.72	0.084660
0.05	1.0362	0.39	0.044893	0.73	0.085999
0.06	0.70438	0.40	0.045761	0.74	0.087340
0.07	0.50619	0.41	0.046676	0.75	0.088682
0.08	0.37904	0.42	0.047634	0.76	0.090027
0.09	0.29304	0.43	0.048630	0.77	0.091373
0.10	0.23249	0.44	0.049661	0.78	0.092720
0.11	0.18851	0.45	0.050722	0.79	0.094069
0.12	0.15576	0.46	0.051810	0.80	0.095418
0.13	0.13087	0.47	0.052924	0.81	0.096769
0.14	0.11166	0.48	0.054060	0.82	0.098121
0.15	0.096635	0.49	0.055216	0.83	0.099473
0.16	0.084761	0.50	0.056391	0.84	0.10082
0.17	0.075305	0.51	0.057582	0.85	0.10218
0.18	0.067733	0.52	0.058788	0.86	0.10353
0.19	0.061646	0.53	0.060008	0.87	0.10489
0.20	0.056747	0.54	0.061241	0.88	0.10624
0.21	0.052807	0.55	0.062485	0.89	0.10760
0.22	0.049649	0.56	0.063739	0.90	0.10895
0.23	0.047135	0.57	0.065002	0.91	0.11031
0.24	0.045155	0.58	0.066274	0.92	0.11167
0.25	0.043621	0.59	0.067554	0.93	0.11302
0.26	0.042462	0.60	0.068841	0.94	0.11438
0.27	0.041621	0.61	0.070134	0.95	0.11574
0.28	0.041050	0.62	0.071433	0.96	0.11710
0.29	0.040710	0.63	0.072738	0.97	0.11845
0.30	0.040569	0.64	0.074048	0.98	0.11981
0.31	0.040600	0.65	0.075362	0.99	0.12117
0.32	0.040779	0.66	0.076681	1.00	0.12253
0.33	0.041088	0.67	0.078003		
0.34	0.041510	0.68	0.079328		

5. 結　　言

(33)式で示される$G_3(k)$が第1報で計算した$G_1(k)$, $G_2(k)$と著るしく異なる点は$(1-k^2)^{-1}$の項を含んでいることである．さらに第3補正項でも$(1-k^2)^{-1}$のより高次の項が含まれることが推定される．従ってxが小さく，かつαが1に近い場合にはもっと高次の補正項まで含めなければ重大な誤りを生じる恐れがある．第3補正項を計算してみなければ明確なことは云えないが，xが0.1よりも小さい所ではこの危険が大きい．しかし逆にαが小さくしかもxが余り小さくなければ第1補正項で充分であり，第2補正項は近似の誤差の目安となる程度である．

参　考　文　献

1）戸田圭一，長島弘修：山口大学工学部研究報告，21，255 (1971)

2）G. N. Watson : "A Treatise on Theory of Bessel Functions" Cambridge University Press (1962) p. 389

3）森口繁一他：数学公式Ⅲ，岩波書店 (1968) p.198

4）H. Hancock : "Elliptic Integrals" Dover Publications (1958) p.61

（昭和46年4月15日受理）