

リジェクション率と誤まり認識率に関する一考察

瀬 良 豊 士*

The Consideration Related with Rejected Rate And Error Recognition Rate

Toyoshi SERA

Abstract

When input patterns are recognized, the recognized results are classified into three groups. These are rejected group, error recognition group and correct recognition group.

Chow has been studied the relation of these groups. However, in this paper, the author investigates about the case of normal distribution with different mean and variance which are not considered.

1. 緒 言

入力パタンが認識される場合、認識された結果は3つのグループに類別される。これらのグループは拒絶されるグループ、誤まって認識されるグループ、および正しく認識されるグループである。これらのグループ間についての関係は Chow によって研究されてきたが¹⁾、しかし、ここでは Chow によって取りあつかわれていない異なった平均値と分散をもった正規分布の場合を考える。この際、実際の認識で起こりうる可能性のある条件を chow の条件式に付加して考える。

2. 理 論

与えられた誤まり認識率に対して、リジェクション率を最小にする最適認識規則を簡単に記す¹⁾。記号を、

δ : 最適認識規則

n : クラスの数

(P_1, P_2, \dots, P_n)

: 各クラスの先駆確率

$F(v | i)$

: i 番目のクラスでの確率密度関数。

d_i : v と i 番目のクラスと決定する判定

d_0 : v をリジェクトする判定

t : リジェクションいき値 ($0 < t < 1$)。

とすると、パタンベクトル v をいずれかのクラスに判定する決定規則は

$$\delta(d_i | v) = 1 \quad (k \neq 0) \dots \dots \dots (1)$$

となる。ただし、

$$P_k \cdot F(v | k) > P_j \cdot F(v | j) \dots \dots \dots (2)$$

$j = 1, 2, \dots, n.$

かつ

$$P_k \cdot F(v | k) \geq (1-t) \sum_{i=1}^n P_i \cdot F(v | i) \dots \dots \dots (3)$$

のときである。つぎに、パタンベクトル v をリジェクトと判定する決定規則は

$$\delta(d_0 | v) = 1 \dots \dots \dots (4)$$

となる。ただし、

$$\max_i [P_i \cdot F(v | i)] < (1-t) \sum_{i=1}^n P_i \cdot F(v | i) \dots \dots \dots (5)$$

のときである。

3. グループの関係

誤まって認識される割合を $E(t)$ 、リジェクション割合を $R(t)$ および、正しく認識される割合を $C(t)$ とすると¹⁾、

$$E(t) + R(t) + C(t) = 1 \dots \dots \dots (6)$$

ただし、

$$E(t) = \int_V \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta(d_i | v) \cdot P_i \cdot F(v | i) dv$$

$$R(t) = \int_V \delta(d_0 | v) \cdot P_i \cdot F(v | i) dv$$

$$C(t) = \int_V \sum_{i=1}^n \delta(d_i | v) \cdot P_i \cdot F(v | i) dv$$

* 工業短期大学部電気工学科

V: パタン空間

なる関係がなりたつ。また、(3)式、(5)式および $E(t)$, $R(t)$ の単調性から $E(t)$ と $R(t)$ との関係がつぎのように表わされる。

$$E(t) = \int_0^t t \cdot dR/dt \cdot dt = \int_{R(0)}^{R(t)} t(R) dR \dots (7)$$

ただし、 $R(0) = 1$ である。

さらに、(2)式、(5)式から $t > 1 - 1/n$ のときは常に $R = 0$ となる。

4. 確率密度関数が正規分布の場合

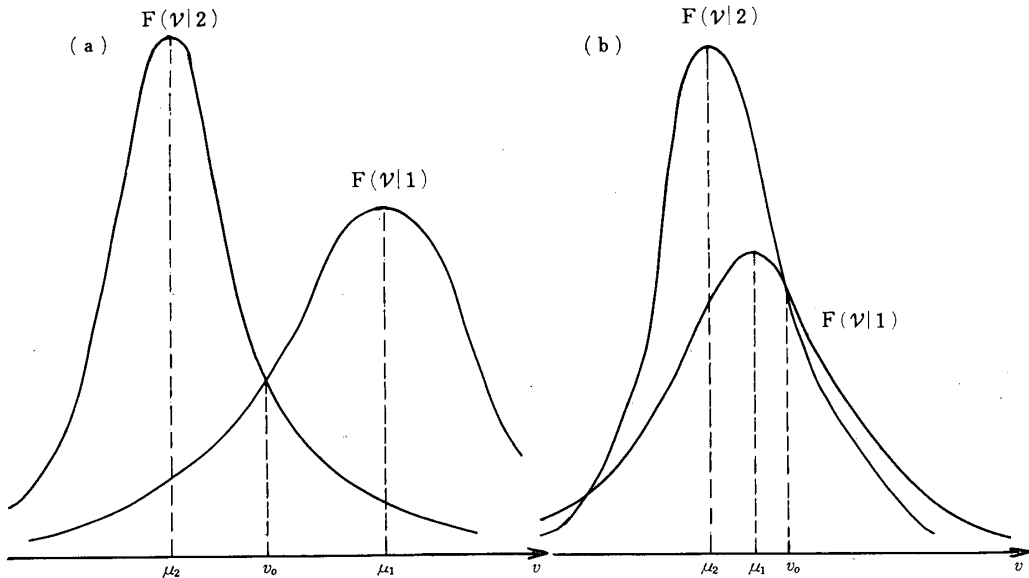


Fig.1 Explanation of condition (I)

この図で(a)の場合は2つのパタンのクラスが存在することを良く示しているが、(b)の場合は2つのパタンクラスが存在するといいたいようすを示している。

(2) 2つの確率密度関数 $F(v | 1)$, $F(v | 2)$ の平均値 μ_1 , μ_2 分散 σ_1 , σ_2 は

(A) $\mu_1 > \mu_2$, $\sigma_1 > \sigma_2$.

であるか

(B) $\mu_1 > \mu_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$.

である。

(3) クラスの先験確率

$$P_1 = P_2 = 1/2$$

である。

4.1 (A)の場合

クラスが2つの場合であるから(5)式から、リジェクションに対する条件は、

$$t/1 - t < P_1 \cdot F(v | 1) / P_2 \cdot F(v | 2) < 1 - t/t \dots \dots \dots (8)$$

2つのパタンのクラスが存在する場合を考える。

$F(v | i)$ の平均値のみが異なる場合は(5)式から $E(t)$, $R(t)$, $C(t)$ の関係を容易に確かめることができる。しかし、分散も異なる場合は多少困難になる^{2),3)}。ここでは、つぎなる条件を満す場合を考える。

(I) 2つの密度関数の交点の v 座標 v_0 は

$$\mu_2 < v_0 < \mu_1$$

である。

この条件は2つのクラスが確かに存在することを保証するものである。これを Fig. 1 に示す。

ともとまる。(8)式の中間の項をMと置き換えて、(2)、(3)の条件を代入すると、

$$M = P_1 \cdot F(v | 1) / P_2 \cdot F(v | 2) = \sigma_2 / \sigma_1 \cdot e^y$$

ただし、

$$y = \{(\sigma_1 / \sigma_2)^2 - 1\} v^2 - 2 \{(\sigma_1 / \sigma_2)^2 \mu_2 - \mu_1\} v + (\sigma_1 / \sigma_2)^2 \mu_2^2 - \mu_1^2 / 2 \sigma_1^2$$

ここで $k = \sigma_1 / \sigma_2 (> 1)$ とすれば、

$$M = 1/k \cdot e^y \dots \dots \dots (9)$$

$$y = (k^2 - 1)v^2 - 2(k^2 \mu_2 - \mu_1)v + (\sigma / \sigma_2)^2 \mu_2^2 - \mu_1^2 / 2 \sigma_1^2$$

となる。したがって、(8)式はつぎのように表わされる。

$$t/1 - t < M < 1 - t/t \dots \dots \dots (10)$$

つぎに、(1)の条件を満足するための必要条件をもとめる $F(v | 1)$, $F(v | 2)$ との交点は

$$F(v | 1) = F(v | 2)$$

からもとまる。これを解いて、

$$(k^2 - 1)v^2 - 2(k^2 \cdot \mu_2 - \mu_1)v + k^2 \cdot \mu_2^2 - \mu_1^2 - 2\sigma_1^2 \cdot \ln k = 0$$

$$(k \neq 1) \dots\dots\dots (11)$$

が導かれる。これから、交点の座標 v_{01} , v_{02} は

$$v_{01} = (k^2 \cdot \mu_2 - \mu_1) + \sqrt{D}/k^2 - 1$$

$$v_{02} = (k^2 \cdot \mu_2 - \mu_1) - \sqrt{D}/k^2 - 1$$

ともとまる。ただし

$$D = k^2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2 + 2\sigma_1^2 \cdot (k^2 - 1)^2 \ln k > 0$$

である。

これを(1)の条件に入れると、

$$e^{-\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2\sigma_2^2}} < k < e^{\frac{k^2(\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \dots\dots (13)$$

なる条件がもとまる。したがって、リジエクシオン領域の満足すべき条件は(10)式と(13)式となる。また、(10)からもとまったリジエクシオン領域を $v_2 < v < v_1$ とすれば、

$$R(t) = \int_{-\infty}^{v_2} F(\mu_2, \sigma_2) dv + \int_{v_1}^{\infty} F(\mu_2, \sigma_2) dv \dots\dots (14)$$

$$E(t) = \int_{v_2}^{v_{02}} F(\mu_2, \sigma_2) dv + \int_{v_{01}}^{v_1} F(\mu_1, \sigma_1) dv + \int_{v_{02}}^{v_{01}} F(\mu_2, \sigma_2) dv \dots\dots(15)$$

となる。以上の関係を Fig. 2 に示す。

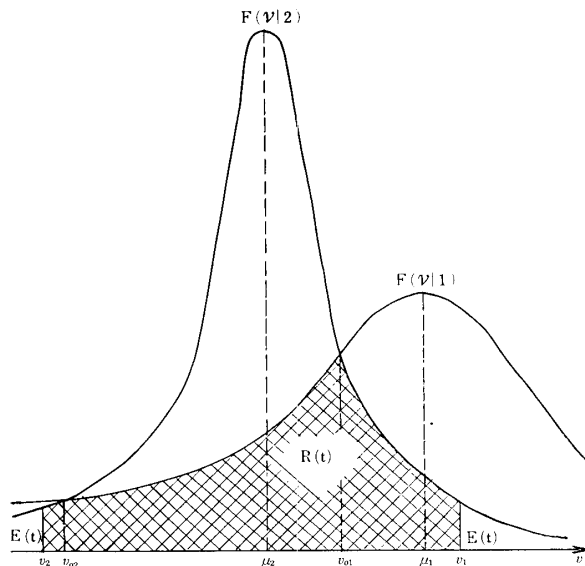


Fig.2 Explanation of case (A)

4.2 (B)の場合

(A)の場合と同じように不等式の中間の項と M' とすると。

$$M' = k' \cdot e^{v'} \dots\dots\dots(16)$$

$$v' = (k'^2 - 1)v^2 - 2(k'^2 \cdot \mu_1 - \mu_2) + k'^2 \cdot \mu_1^2 - \mu_2^2 / 2\sigma_2^2$$

とあら表され、(8)式は

$$t/1 - t < M' < 1 - t/t \dots\dots\dots (17)$$

となる。ただし、 $k' = \sigma_2/\sigma_1 (> 1)$ である。また、交点の座標も(A)の場合と同じようにして、

$$V'_{01} = k'^2 \cdot \mu - \mu_2 + \sqrt{D'}/k'^2 - 1$$

$$V'_{02} = k'^2 \cdot \mu - \mu_2 - \sqrt{D'}/k'^2 - 1$$

ともとまる。ただし、 D' は

$$D' = k'^2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2 + 2\sigma_2^2 (k'^2 - 1) \ln k'$$

である。これを(1)の条件に入れると、

$$e^{-\frac{(\mu_1 - \mu_2)}{2\sigma_2^2}} < k' < e^{\frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \dots\dots(18)$$

なる条件がもとまる。この際、

$$-k'^2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2 / 2\sigma_2^2$$

$$k' < e$$

の式は

$$\ln k' < k'^2 \cdot (\mu_1 - \mu_2)^2 / 2\sigma_2^2$$

となり、Fig. 3 に示されるような範囲を取ることが分かる。したがって、リジエクシオンの満足すべき

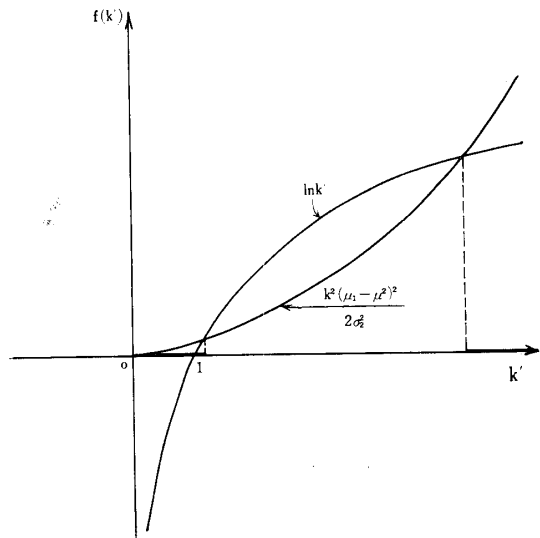


Fig.3 Explanation of $\ln k' < \frac{k'^2(\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_2^2}$

条件は(16)式、(18)式からもとまる。以上の関係をFig. 4 に示す。この図の(a)から $R(t)$, $E(t)$ が、

$$R(t) = \int_{V_{2'}}^{V_{02}'} F(\mu_1, \sigma_1) dv + \int_{V_{02}'}^{V_{01}'} F(\mu_2, \sigma_2) dv + \int_{V_{01}'}^{V_{1}'} F(\mu_1, \sigma_1) dv \dots\dots\dots (19)$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{V_{2}'} F(\mu_1, \sigma_1) dv$$

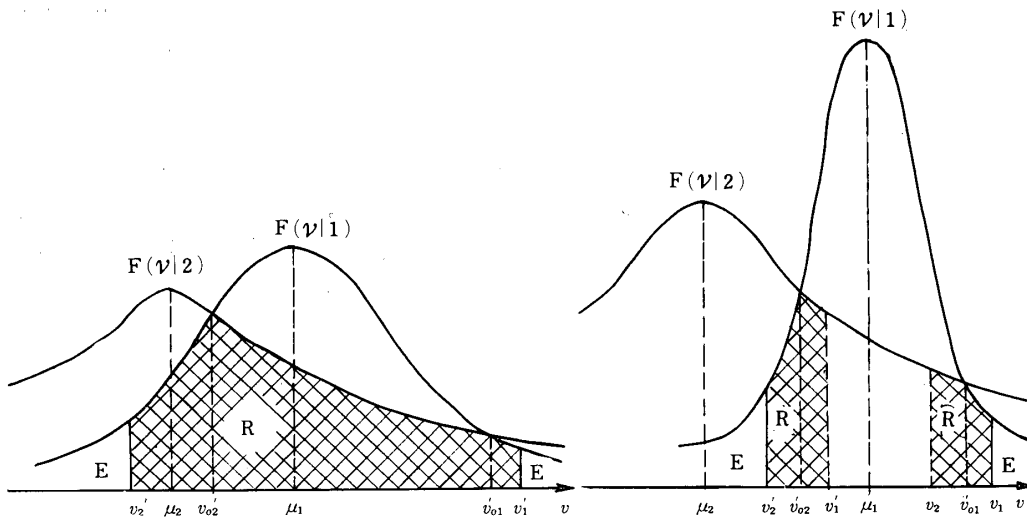


Fig.4 Explanation of case (B)

$$+ \int_{v_1'}^{\infty} F(\mu_1, \sigma_1) dv \dots\dots\dots (20)$$

ともとまる。図(b)から同様に、 $R(t)$ と $E(t)$ が、

$$R(t) = \int_{v_2'}^{v_{02}'} F(\mu_1, \sigma_1) dv + \int_{v_{02}'}^{v_1'} F(\mu_2, \sigma_2) dv + \int_{v_2}^{v_{01}'} F(\mu_2, \sigma_2) dv + \int_{v_{01}'}^{v_1} F(\mu_1, \sigma_1) dv \dots\dots\dots (21)$$

$$E(t) = \int_{-\infty}^{v_2} F(\mu_1, \mu_1) dv + \int_{v_1'}^{v_2} F(\mu_2, \sigma_2) dv + \int_{v_1}^{\infty} F(\mu_1, \sigma_1) dv \dots\dots\dots (22)$$

ともとまる。

5. 数 値 例

(A), (B) の場合の数値例を示す。まず、(A) の場合を考える。リジエクシオンいき値 t , 平均値 μ_1, μ_2 および、分散 σ_1, σ_2 がつぎのような値をとるものとする。

$$t = 1/4, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 1.5, \sigma_2 = 1$$

これから $k = 3/2$ がもとまる。以上より、(10)式と(13)式を用いてリジエクシオン領域、交点の座標は

$$-2.42 < v < 2.82, v_{02} = -1.49, v_{01} = 1.89$$

ともとまる。 $R(t), E(t), E(t)$ は(14)式、(15)からつぎのようにもとまる。

$$R(t) = 0.241$$

$$E(t) = 0.039$$

つぎに、(B) の場合を考える。

$$t = 1/4, \mu_1 = 2, \mu_2 = 1, \sigma_1 = 0.5, \sigma_2 = 2$$

の値をとるものとする。これから、 $k = 4$ がもとまる。したがって、(16)式、(18)式からリジエクシオン領域、交点の座標は

$$0.884 < v < 1.39, 2.54 < v < 3.25, v_{02} = 1.17, v_{01} = 2.97$$

ともとまる。 $R(t), E(t)$ は(20)式、(22)式からつぎのようにもとまる。

$$R(t) = 0.228, E(t) = 0.221$$

以上の関係を Fig. 5, Fig. 6 に示す。

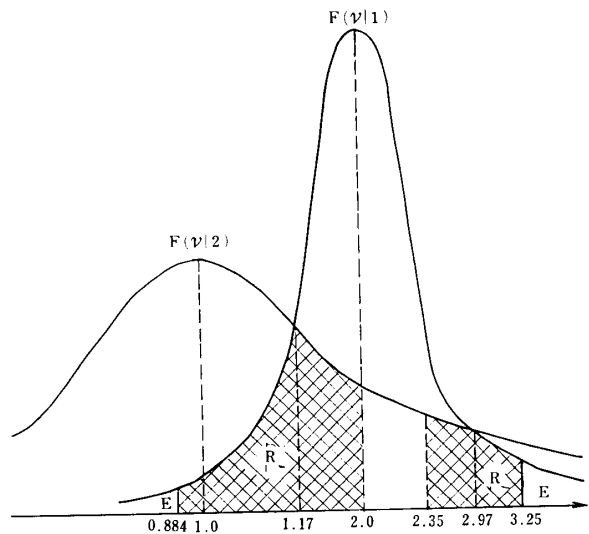


Fig.5. Explanation of numerical case of (A)

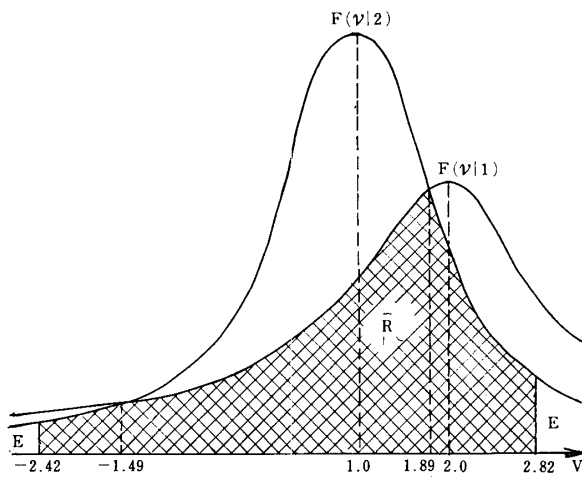


Fig.6 Explanation of numerical case of (B)

6. 結 言

以上の考察から

- (I) パタンの集合が類別されていると考えるためには(1)の条件が必要であると思われる。

(II) したがって、ある未知パターン集合が類別されるかどうか判定する1つの目安として用いることができる。

(III) (7)式は等分散で先験確率が等しいときはそのまま成り立つが、数値例のようなときは注意して用いる必要がある。

ということが明らかになった。

最後に、日頃御指導頂く同大学工学部平田威彦助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) C. K. Chow : IEEE. Trans. , IT-16 44-46 (1970)
- 2) A. H. Bowker, G. I. Lieberman : Engineering Statistics, (1959) p.40-67.
- 3) 瀬良豊士 : 修士論文“パターン認識” (1968) p. 16-19.

(昭和46年1月8日受理)