

非磁性金属平板に対向したコイルの実効インピーダンスの周波数特性の研究について (第2報)

戸田 圭一*・長島 弘修**

A Study of Frequency Characteristics of Effective Impedance of a Coil facing to a Thick Non-ferromagnetic Metal Plate (2nd Report)

Keiichi TODA and Hironobu NAGASHIMA

Abstract

The frequency characteristics of the effective impedance of a circular coil, being faced to the non-ferromagnetic conductor plate, are known as the infinite integrals including the special functions.

But it is very difficult to analyze the effective impedance of the the coil by means of the function. We transformed the function into the approximate expression, and compared the approximate values with the exact one, being acquired by the electronic computer (FACOM 230-60). As the result, we found that the approximate expression were very good one.

Furthermore, if the ratio of the distance between the coil and the conductor to the radius of the coil is small, the approximate expression is transformed into the elementary function. And we measured the conductivity σ by the function. And good results were acquired.

1. 緒 言

非磁性金属平板に対向したコイルの実効インピーダンスの変化分は Bessel 関数を含む積分で与えられるが、この積分を数式的に解くことは困難である¹⁾。また、その数値解を計算機で求めるにしても、周波数 f の増加、及びコイル、導体間の距離 z_0 の減少にともなって、被積分関数の振動の激しい部分の影響が大きくなるので、ある程度以上の精度で計算を行なおうとすれば、膨大な計算時間を要する。

そこで、筆者らは単巻円形コイルの場合について、その関数の虚数部分の近似積分を行ない、実効抵抗の変化分を完全楕円積分を用いてあらわした。筆者らの計算した範囲内では、この近似解は厳密解ともよく一致している。したがって、この近似式を用いれば金属平板に対向したコイルの実効抵抗の周波数特性を簡単に知ることができる。

数値計算において、コイル、導体間の距離とコイル

半径の比、 $z_0/a_0 < 0.05$ では、九大の大型計算機 (FACOM 230—60) を用いても、3~4桁の精度をあげるためには、シンプソン法で5分以上の計算時間を要し、 z_0/a_0 が小さくなるにしたがって、その計算時間はますます増大することが予想されるので、本論文では、 z_0/a_0 が0.05以上の場合についてのみ、近似解と厳密解の比較を行なった。

さらに、 $z_0/a_0 \ll 1$ で、しかも電磁界の浸透の深さ δ が z_0 にくらべて十分小の時、上述の近似関数は初等関数であらわされる。この式を用いて金属平板の導電率 σ の測定を行なったところ、その周波数に対するばらつきを測定精度の範囲内におさえることができた。また、この結果は他の方法で測定した結果²⁾ともよく一致している。

2. 非磁性金属平板に対向した単巻円形コイルの実効インピーダンスの変化

2.1 λ の近似法

* 電気工学教室

** 大学院工学研究科電気工学専攻

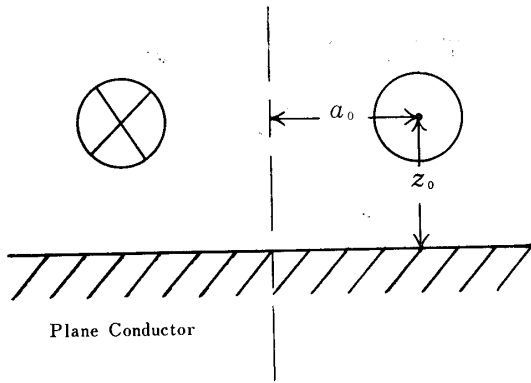


Fig.1 Arrangement of a circular loop

Fig. 1 に示すように非磁性金属平板に対向した単巻円形コイルの実効インピーダンス変化（完全反射時から不完全反射時までのインピーダンス変化）は次式で与えられる²⁾。

$$T = \mu_0 \pi a_0^2 \int_0^\infty J_1^2(a_0 \zeta) e^{-D\zeta} (\lambda - 1) d\zeta \quad (1)$$

ただし、

$$D = 2z_0 \quad (2)$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\zeta^2 + j\omega\mu_0\sigma} - \zeta}{\sqrt{\zeta^2 + j\omega\mu_0\sigma} + \zeta} \quad (3)$$

ここで、 ω はコイル電流の角周波数、 μ_0 は真空の透磁率、 σ は金属平板の導電率、 ζ は積分変数である。
(1)式において

$$T = -N + j \frac{R}{\omega} \quad (4)$$

とおけば、 N 、 R はそれぞれ円形コイルの実効インダクタンス、及び実効抵抗の変化分を示す。そこで、(1)式と(4)式を比較すれば

$$-N + j \frac{R}{\omega} = \mu_0 \pi a_0^2 \int_0^\infty J_1^2(a_0 \zeta) e^{-D\zeta} \left\{ \text{Re}(\lambda) - 1 + j I_m(\lambda) \right\} d\zeta \quad (5)$$

ここに、 $\text{Re}(\lambda)$ 、 $I_m(\lambda)$ はそれぞれ λ の実数部分及び虚数部分を示す。また、(3)式の λ を浸透の深さ $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)}$ を用いて書きなおせば

$$\lambda = 1 - j \left\{ (\delta\zeta)^2 - \sqrt{2} \delta\zeta \sqrt{\frac{1}{2}(\delta\zeta)^2 + j} \right\} \quad (6)$$

つぎに、(6)式の第3項目の根号部分を極座標を用いてあらわせば

$$\sqrt{\frac{1}{2}(\delta\zeta)^2 + j} = \left\{ \frac{1}{4}(\delta\zeta)^4 + 1 \right\}^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{2}j \tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2}} \quad (7)$$

そこで、(7)式を(6)式に代入すれば

$$\begin{aligned} \lambda = & 1 - \sqrt{2} \delta\zeta \left\{ 1 + \frac{1}{4}(\delta\zeta)^4 \right\}^{\frac{1}{4}} \sin \left\{ \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2} \right\} \\ & + j \left\{ -(\delta\zeta)^2 + \sqrt{2} \delta\zeta \left\{ 1 + \frac{1}{4}(\delta\zeta)^4 \right\}^{\frac{1}{4}} \right. \\ & \left. \times \cos \left\{ \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2} \right\} \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

ここで、

$$\cos \left\{ \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2} \right\} = \frac{\sqrt{1 + \cos \left\{ \tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2} \right\}}}{\sqrt{2}} \quad (9)$$

$$\sin \left\{ \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2} \right\} = \frac{\sqrt{1 - \cos \left\{ \tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2} \right\}}}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

$$\tan^{-1} \frac{2}{(\delta\zeta)^2} = \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{(\delta\zeta)^4}}} \right\} \quad (11)$$

を(8)式に代入して、虚数部と実数部に分ければ

$$I_m(\lambda) = -(\delta\zeta)^2 + \frac{\delta\zeta}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\delta\zeta)^4 + 4} + (\delta\zeta)^2} \quad (12)$$

$$\text{Re}(\lambda) = 1 - \frac{\delta\zeta}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\delta\zeta)^4 + 4} - (\delta\zeta)^2} \quad (13)$$

したがって、(12)、(13)式を(5)式に代入すれば実効インピーダンス変化は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} -N + j \frac{R}{\omega} = & \mu_0 \pi a_0^2 \int_0^\infty J_1^2(a_0 \zeta) e^{-D\zeta} \\ & \left\{ -\frac{\delta\zeta}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\delta\zeta)^4 + 4} - (\delta\zeta)^2} \right. \\ & \left. + j \left\{ -(\delta\zeta)^2 + \frac{\delta\zeta}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\delta\zeta)^4 + 4} + (\delta\zeta)^2} \right\} \right\} d\zeta \quad (14) \end{aligned}$$

ゆえに、(14)式の虚数部から実効抵抗の変化分は

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{\omega\mu_0} = & \pi a_0^2 \int_0^\infty J_1^2(a_0 \zeta) e^{-D\zeta} \left\{ -(\delta\zeta)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\delta\zeta}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\delta\zeta)^4 + 4} + (\delta\zeta)^2} \right\} d\zeta \quad (15) \end{aligned}$$

(15)式において、 $a_0\zeta = x$ とおけば

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{\omega\mu_0 a_0} = & \int_0^\infty J_1^2(x) e^{-\frac{D}{a_0}x} \left\{ -\left(\frac{\delta x}{a_0}\right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{\delta x}{\sqrt{2} a_0} \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\delta x}{a_0}\right)^4 + 4} + \left(\frac{\delta x}{a_0}\right)^2} \right\} dx \quad (16) \end{aligned}$$

ここに、 R_1 は(15)式によって定まる実効抵抗の変化分の理論値をあらわすものとする。

(15)式をそのまま積分することは困難であるので、(12)式を適当な近似式におきかえることが必要になる。そこで、 $\delta\zeta < 1$ として(12)式をテイラー展開すれば

$$I_m(\lambda) = \delta\zeta \left\{ \sqrt{\frac{(\delta\zeta)^2}{2} + \sqrt{\frac{(\delta\zeta)^4}{4} + 1}} - \delta\zeta \right\} \quad (17)$$

$$\approx \delta\zeta \left\{ \sqrt{1 + \frac{(\delta\zeta)^2}{2} + \frac{(\delta\zeta)^4}{8} - \frac{(\delta\zeta)^8}{128}} - \delta\zeta \right\} \quad (18)$$

$$\approx \delta\zeta \left\{ 1 - \delta\zeta + \frac{(\delta\zeta)^2}{4} + \frac{(\delta\zeta)^4}{32} \right\} \quad (19)$$

ここで, (19)式を指数関数を用いて近似すれば

$$I_m(\lambda) \approx \delta\zeta e^{-\delta\zeta} \quad (20)$$

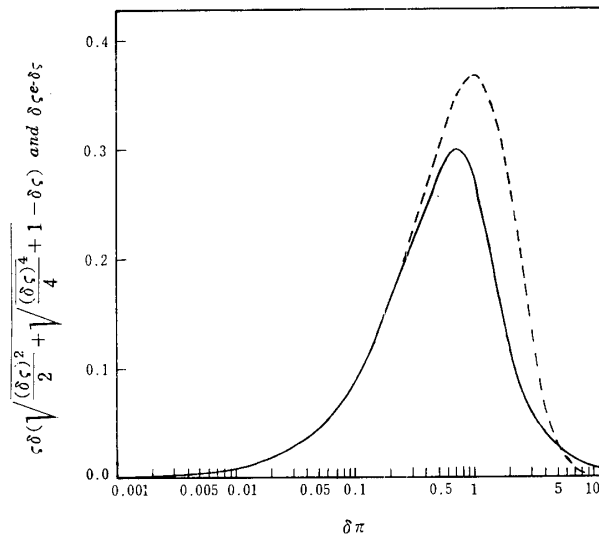


Fig. 2 Curves of $\delta\zeta \left(\sqrt{\frac{(\delta\zeta)^2}{2} + \sqrt{\frac{(\delta\zeta)^4}{4} + 1}} - \delta\zeta \right)$ and $\delta\zeta e^{-\delta\zeta}$ versus $\delta\zeta$ are illustrated by solid and dashed line

Fig. 2 の実線および点線で示された曲線は, (17)式と (20)式の各々によって計算された $I_m(\lambda)$ の値を示す. この図からわかるように, $\delta\zeta < 1$ の範囲において, (20)式は(17)式の良好な近似式となっている. したがって, $\zeta < 1/\delta$ の範囲内で(15)式の被積分関数が積分の主要部分ををしめるようにすれば, (17)のかわりに(20)式を用いることが許される. その条件をみとすためには, (15)式の $\exp(-D\zeta)$ の減衰が $\delta\zeta$ の小さい範囲内で, できるだけ大きく起きてしまうことが望ましい. そのためには, D/a_0 ができるだけ大きく, δ/a_0 ができるだけ小さくなればよいことは容易にわかる.

2.2 R_1/ω の近似計算

(20)式を用いて(15)式を書きなおせば

$$\frac{R_2}{\omega\mu_0 a_0} = \pi a_0 \delta \int_0^\infty J_1^2(a_0\zeta) \zeta e^{-(D+\delta)\zeta} d\zeta \quad (21)$$

ここに, R_2 は(21)式より求まる実効抵抗の変化分の理論値を示す. (21)式において, $a_0\zeta = x$ とおけば

$$\frac{R_2}{\omega\mu_0 a_0} = \frac{\pi\delta}{a_0} \int_0^\infty J_1^2(x) x e^{-\frac{D+\delta}{a_0}x} dx \quad (22)$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} J_\nu(bt) J_\nu(ct) t^{\nu-1} dt = \frac{1}{2} (bc)^\nu \int_0^\infty \int_0^\pi e^{-\alpha t} \frac{J_\nu(At)}{A^\nu} t^{\nu+1} \times \sin^{2\nu}\phi \cdot d\phi dt \quad (23)$$

ただし

$$A = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bcc\cos\phi} \quad (24)$$

を用いれば, (22)式は

$$\begin{aligned} \frac{R_2}{\omega\mu_0 a_0} &= \frac{\delta}{\sqrt{2} a_0} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{J_1(\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi}x)}{\sqrt{1-\cos\phi}} x^2 \\ &\quad \times e^{-\frac{D+\delta}{a_0}x} \sin^2\phi d\phi dx \quad (25) \\ &= \frac{\delta}{\sqrt{2} a_0} \int_0^\pi \frac{\sin^2\phi}{c\sqrt{1-\cos\phi}} \\ &\quad \int_0^\infty x^2 J_1(\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\phi}x) e^{-\frac{D+\delta}{a_0}x} dx d\phi \end{aligned} \quad (26)$$

ここで(4)

$$\int_0^\infty t^{\nu+1} J_\nu(bt) e^{-\alpha t} dt = \frac{2^{\nu+1} ab^\nu \Gamma(\nu + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi} (\alpha^2 + b^2)^{\nu+3/2}} \quad (27)$$

ただし, $\nu > -1$, $\alpha > 0$ とする. (27)式を用いれば(26)式は

$$\frac{R_2}{\omega\mu_0 a_0} = \frac{3\delta(D+\delta)}{a_0^2} \int_0^\pi \frac{\sin^2\phi}{\left\{ \frac{(D+\delta)^2}{a_0^2} + 2(1-\cos\phi) \right\}^{5/2}} d\phi \quad (28)$$

ここで, $\phi = 2\theta + \pi$ とおけば(28)式は

$$\frac{R_2}{\omega\mu_0 a_0} = \frac{3k^5\delta(D+\delta)}{4a_0^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta - \sin^4\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{5/2}} d\theta \quad (29)$$

ただし

$$k^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{D+\delta}{2a_0} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (30)$$

ここで(5)6)

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{5/2}} d\theta \\ &= \frac{1}{3k^2(1-k^2)^2} \left\{ (1+k^2)E(k) - (1-k^2)K(k) \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta}{(1-k^2\sin^2\theta)^{5/2}} d\theta \\ &= \frac{1}{3k^4(1-k^2)^2} \left\{ 2(2k^2-1)E(k) \right\} \end{aligned}$$

$$-(3k^2 - 2)(1 - k^2)K(k) \} \quad (32)$$

を(29)式に代入すれば

$$\frac{R_2}{\omega \mu_0 a_0} = \frac{\delta}{2 a_0 \sqrt{1 - k^2}} \left\{ (2 - k^2)E(k) - 2(1 - k^2)K(k) \right\} \quad (33)$$

ただし、 $K(k)$ 、 $E(k)$ は k を母数とする第1種、及び第2種完全楕円積分である。したがって、(33)式を用いれば、非磁性金属平板に対向した円形コイルの実効抵抗の変化分の近似値を手軽に求めることができる。

2.3 $k^2 \approx 1$ の場合の円形コイルの実効抵抗の変化

実効抵抗変化の周波数特性を知るためには、(33)式で十分であるが、その式を利用して平板の導電率 σ を算出したいという場合、または、もっと手軽に実効抵抗変化の周波数特性を知りたいという場合には(33)式の形はまだ不便である。そこで、筆者らは $D/2a_0 \ll 1$ の場合について(33)式をさらに近似した。

(33)式より円形コイルの実効抵抗の変化分は

$$\frac{R_2}{\omega \mu_0 a_0} = \frac{\delta}{2 a_0 \sqrt{1 - k^2}} \left\{ 2(1 - k^2) \{ E(k) - K(k) \} + k^2 E(k) \right\} \quad (34)$$

ここで(30)式より

$$1 - k^2 = \frac{(D + \delta)^2}{4 a_0^2 + (D + \delta)^2} = \frac{(D + \delta)^2}{4 a_0^2} k^2 \quad (35)$$

よって、(34)式に(35)式を代入すれば

$$\frac{R_2}{\omega \mu_0 a_0} = \frac{\delta k^2}{2 a_0 \sqrt{1 - k^2}} \left\{ E(k) + \frac{(D + \delta)^2}{2 a_0^2} \{ E(k) - K(k) \} \right\} \quad (36)$$

(36)式右辺の第1項を I_0 とすれば

$$I_0 = \frac{\delta k^2}{2 a_0 \sqrt{1 - k^2}} E(k) = \frac{\delta}{D + \delta} \left\{ 1 + \left(\frac{D + \delta}{2 a_0} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} E(k) \quad (37)$$

つぎに、(36)式右辺の第2、3項を I_1 とおけば同様にして

$$I_1 = \frac{\delta (D + \delta)^2 k^2}{4 a_0^3 \sqrt{1 - k^2}} \{ E(k) - K(k) \} - \frac{(D + \delta) \delta}{2 a_0^2} \left\{ 1 + \left(\frac{D + \delta}{2 a_0} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \{ E(k) - K(k) \} \quad (38)$$

また、 $k^2 \approx 1$ すなわち $(D + \delta)/2a_0 \ll 1$ ならば完全楕円積分は次式であらわされる。⁷⁾

$$K(k) = \frac{1}{4} (5 - k^2) \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} + \frac{1}{4} (k^2 - 1) \quad (39)$$

$$E(k) = \frac{1}{2} (1 - k^2) \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} + \frac{1}{4} (k^2 + 3) \quad (40)$$

(39)、(40)式を用いて

$$E(k) - K(k) = 1 - \frac{1}{4} (k^2 + 3) \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \quad (41)$$

さらに

$$\begin{aligned} \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} &= \ln 4 - \ln \left\{ \frac{D + \delta}{2 a_0} \left\{ 1 + \left(\frac{D + \delta}{2 a_0} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} + \frac{1}{2} \ln \left\{ 1 + \left(\frac{D + \delta}{2 a_0} \right)^2 \right\} \\ &\approx \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} + \frac{(D + \delta)^2}{8 a_0^2} \end{aligned} \quad (42)$$

したがって、(40)、(41)式を(42)式を用いて書きなおし、 $\{D + \delta/a_0\}^4$ の項を無視すれば

$$E(k) = \frac{1}{4} (4 + k^2 - 1) + \frac{1}{2} (1 - k^2) \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \approx 1 + \frac{(D + \delta)^2}{8 a_0^2} \left\{ \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} - 0.5 \right\} \quad (43)$$

$$E(k) - K(k) = 1 - \frac{1}{4} (4 + k^2 - 1) \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}} \approx 1 - \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} \left\{ 1 - \frac{(D + \delta)^2}{16 a_0^2} \right\} - \frac{(D + \delta)^2}{8 a_0^2} \quad (44)$$

ここで、(43)、(44)式を(37)、(38)式に代入すれば

$$\begin{aligned} I_0 &\approx \frac{\delta}{D + \delta} \left\{ 1 - \frac{(D + \delta)^2}{4 a_0^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{(D + \delta)^2}{8 a_0^2} \times \left(\ln \frac{8 a_0}{D + \delta} - 0.5 \right) \right\} \\ &\approx \frac{\delta}{D + \delta} \left\{ 1 + \frac{(D + \delta)^2}{8 a_0^2} \left(\ln \frac{8 a_0}{D + \delta} - 2.5 \right) \right\} \quad (45) \\ I_1 &\approx \frac{\delta (D + \delta)}{2 a_0^2} \left\{ 1 - \frac{(D + \delta)^2}{4 a_0^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{(D + \delta)^2}{8 a_0^2} - \left\{ 1 - \frac{(D + \delta)^2}{16 a_0^2} \right\} \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} \right\} \\ &\approx \frac{\sigma (D + \delta)}{2 a_0^2} \left\{ \left(1 - \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} \right) - \frac{(D + \delta)^2}{16 a_0^2} \left(6 - 5 \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} \right) \right\} \quad (46) \end{aligned}$$

ゆえに、(45)、(46)式より

$$\begin{aligned} I_0 + I_1 &= \frac{\delta}{D + \delta} \left\{ 1 + \frac{(D + \delta)^2}{8 a_0^2} \left(\ln \frac{8 a_0}{D + \delta} - 2.5 \right) \right\} \\ &\quad + \frac{(D + \delta)^2}{2 a_0^2} \left(1 - \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} \right) \\ &\quad - \frac{(D + \delta)^4}{32 a_0^4} \left(6 - 5 \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} \right) \\ &\approx \frac{\delta}{D + \delta} \left\{ 1 - \frac{3 (D + \delta)^2}{8 a_0^2} \left(\ln \frac{8 a_0}{D + \delta} - 0.5 \right) \right\} \quad (47) \end{aligned}$$

ここで、 $\delta/D \ll 1$ とすれば

$$(D + \delta)^2 \ln \frac{8 a_0}{D + \delta} = \left\{ \ln \frac{8 a_0}{D} \right.$$

$$-\ln\left(1 + \frac{\delta}{D}\right) \Big\} D^2 \left(1 + \frac{\delta}{D}\right)^2$$

$$\approx D^2 \ln \frac{8a_0}{D} \quad (48)$$

したがって、(48)式を(47)式に代入すれば

$$I_0 + I_1 \approx \frac{\delta}{D + \delta} \left\{ 1 - \frac{3D^2}{8a_0^2} \left(\ln \frac{8a_0}{D} - 0.5 \right) \right\} \quad (49)$$

ゆえに

$$\frac{R_2}{\omega \mu_0 a_0} \approx \frac{\delta}{D + \delta} \left\{ 1 - \frac{3D^2}{8a_0^2} \left(\ln \frac{8a_0}{D} - 0.5 \right) \right\} = \frac{R_3}{\omega \mu_0 a_0} \quad (50)$$

さらに(50)式は $D^2/a_0^2 \ll 1$ の場合

$$\frac{R_4}{\omega \mu_0 a_0} = \frac{\delta}{D + \delta} \quad (51)$$

と非常に簡単な形になる。ただし、 R_3, R_4 は(50), (51)式の理論値を示すもので、 R_1, R_2 の近似値である。

いま

$$\psi_1 = \mu_0 \pi a_0^2 \int_0^\infty \zeta J_1^2(a_0 \zeta) e^{-\mu_0 \zeta D} d\zeta^2 \quad (52)$$

とおけば、(20)式から(33)式までの変形を参照して

$$\psi_1 = \frac{\mu_0}{2} \frac{1}{\sqrt{1 - k_0^2}} \left\{ (2 - k_0^2) E(k_0) - 2(1 - k_0^2) K(k_0) \right\} \quad (53)$$

ただし

$$k_0^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{D}{2a_0} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (54)$$

ここで、 $K(k_0), E(k_0)$ は k_0 を母数とする第1種及び第2種完全楕円積分である。ここで、 $k_0^2 \approx 1$ すなわち $D/a_0 \ll 1$ とすれば(53)式は(34)式から(50)式までの変形を参照して

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 a_0}{D} \left\{ 1 - \frac{3D^2}{8a_0^2} \left(\ln \frac{8a_0}{D} - 0.5 \right) \right\} \quad (55)$$

したがって、(55)式を(50)式に代入すれば

$$\frac{R_3}{\omega} = \psi_1 \frac{\delta}{1 + \frac{\delta}{D}} \quad (56)$$

ψ_1 はコイルの形状と配置によって定まる一種のコイル定数と考えられ、(53), (55)式の計算、または実験的に決定できる²⁾。したがって、(50)式を(56)式の形にしておけば円形コイルの実効抵抗の変化分の周波数特性を知るのに便利となる。筆者らはこれらの近似式の誤差評価を行なうために、(16), (33), (50), (51)式の数値解析を $D/a_0, \delta/a_0$ をパラメーターにとって行なった。その結果を Table 1 に示す。

Table 1 Comparison of exact values $R_1/(\omega \mu_0 a_0)$ and approximate values $R_1/(\omega \mu_0 a_0), R_2/(\omega \mu_0 a_0), R_3/(\omega \mu_0 a_0)$, and $R_4/(\omega \mu_0 a_0)$ versus D/a_0 and δ/a_0

$D/a_0 = 0.1$

δ/a_0	$R_1/(\omega \mu_0 a_0)$	$R_2/(\omega \mu_0 a_0)$	$R_3/(\omega \mu_0 a_0)$	$R_4/(\omega \mu_0 a_0)$
0.004	0.0379	0.0379	0.0379	0.0385
0.007	0.0643	0.0644	0.0645	0.0654
0.010	0.0882	0.0895	0.0896	0.0909
0.013	0.112	0.113	0.113	0.115
0.016	0.134	0.136	0.136	0.138
0.019	0.155	0.157	0.157	0.160
0.022	0.174	0.177	0.178	0.180
0.025	0.192	0.196	0.197	0.200
0.028	0.209	0.214	0.216	0.219
0.031	0.225	0.232	0.233	0.237

$D/a_0 = 0.3$

δ/a_0	$R_1/(\omega \mu_0 a_0)$	$R_2/(\omega \mu_0 a_0)$	$R_3/(\omega \mu_0 a_0)$	$R_4/(\omega \mu_0 a_0)$
0.004	0.0121	0.0121	0.0119	0.0132
0.007	0.0209	0.0209	0.0207	0.0228
0.010	0.0295	0.0295	0.0292	0.0323
0.013	0.0379	0.0379	0.0376	0.0415
0.016	0.0461	0.0461	0.0459	0.0506
0.019	0.0541	0.0542	0.0540	0.0596
0.022	0.0619	0.0621	0.0619	0.0683
0.025	0.0696	0.0698	0.0697	0.0769
0.028	0.0770	0.0773	0.0773	0.0854
0.031	0.0843	0.0847	0.0849	0.0937

$D/a_0=0.5$

δ/a_0	$R_1/(\omega\mu_0a_0)$	$R_2/(\omega\mu_0a_0)$	$R_3/(\omega\mu_0a_0)$	$R_4/(\omega\mu_0a_0)$
0.004	0.00652	0.00652	0.00625	0.00794
0.007	0.0113	0.0113	0.0109	0.0138
0.010	0.0160	0.0160	0.0154	0.0196
0.013	0.0207	0.0207	0.0199	0.0253
0.016	0.0253	0.0253	0.0244	0.0310
0.019	0.0298	0.0298	0.0288	0.0366
0.022	0.0342	0.0342	0.0332	0.0421
0.025	0.0385	0.0386	0.0375	0.0476
0.028	0.0428	0.0429	0.0417	0.0530
0.031	0.0470	0.0472	0.0459	0.0584

$D/a_0=0.7$

δ/a_0	$R_1/(\omega\mu_0a_0)$	$R_2/(\omega\mu_0a_0)$	$R_3/(\omega\mu_0a_0)$	$R_4/(\omega\mu_0a_0)$
0.004	0.00416	0.00416	0.00366	0.00568
0.007	0.00709	0.00709	0.00638	0.00990
0.010	0.0101	0.0101	0.00907	0.0141
0.013	0.0130	0.0130	0.0117	0.0182
0.016	0.0159	0.0159	0.0144	0.0223
0.019	0.0188	0.0188	0.0170	0.0264
0.022	0.0216	0.0216	0.0196	0.0305
0.025	0.0244	0.0244	0.0222	0.0345
0.028	0.0271	0.0271	0.0248	0.0385
0.031	0.0293	0.0299	0.0273	0.0424

$D/a_0=0.9$

δ/a_0	$R_1/(\omega\mu_0a_0)$	$R_2/(\omega\mu_0a_0)$	$R_3/(\omega\mu_0a_0)$	$R_4/(\omega\mu_0a_0)$
0.004	0.00273	0.00273	0.00216	0.00425
0.007	0.00475	0.00475	0.00377	0.00772
0.010	0.00675	0.00675	0.00537	0.0110
0.013	0.00873	0.00873	0.00695	0.0142
0.016	0.0107	0.0107	0.00853	0.0172
0.019	0.0126	0.0126	0.0101	0.0207
0.022	0.0145	0.0145	0.0117	0.0239
0.025	0.0164	0.0164	0.0132	0.0270
0.028	0.0183	0.0183	0.0147	0.0302
0.031	0.0201	0.0201	0.0163	0.0333

3. 非磁性金属平板の導電率の測定

(56)式を用いれば、電磁界の浸透の深さ δ は

$$\delta = \frac{R_3/\omega}{\psi_1 - R_3/(\omega D)} \quad (57)$$

したがって、平板の導電率 σ は次式であらわされる。

$$\sigma = \frac{10^7}{4\pi^2 f \delta^2} = \frac{10^7}{4\pi^2 f} \left\{ \frac{\psi_1 - R_e(2\omega z_0)}{R_e/\omega} \right\}^2 \quad (58)$$

ここに、 f はコイル電流の周波数、 R_e はコイルの実効抵抗の変化分(実験値)である。

以上は単巻円形コイルに対する理論であるが、実験を行なうためには N 回巻きのコイルを使う方が実験精度の上からも好ましい。その場合、コイルは半径方向および軸方向に巾を生ずることになる。一般にコイルの半径方向の巾は半径に比して十分に無視できるが、軸方向の巾はコイル下端、導体間の距離 z_0 に比して無視することはしばしば困難である。そこで、コイルが導体から z_a の位置に集中しているものとみなせば、 N 回巻きのコイルに対しても(58)式を用いることが可能となる。その時、 ψ_1 は次式であらわされる。

$$\psi_1 = \frac{\mu_0 a_0}{D_a} N^2 \left\{ 1 - \frac{3 D_a^2}{8 a_0^2} \left(\ln \frac{8 a_0}{D_a} - 0.5 \right) \right\} \quad (59)$$

ただし

$$D_a = 2 z_a$$

また ψ_1 は実験的に決定できるので(59)式より D_a を求めることが可能となる。今、 $D_a/a_0 \ll 1$ のコイルを用いれば(59)式より

$$z = \frac{\mu_0 a_0 N^2}{2 \psi_1} \quad (60)$$

(59)式右辺の第2, 3項目が無視できない時は

$$y_1 = \frac{a_0}{D_a} \left\{ 1 - \frac{3 D_a^2}{8 a_0^2} \left(\ln \frac{8 a_0}{D_a} - 0.5 \right) \right\} \quad (61)$$

$$y_2 = \frac{\psi_1}{\mu_0 N^2} \quad (62)$$

の両式のグラフを D_a/a_0 をパラメーターにとって書き、その交点から D_a すなわち z_a を決定しなければならない。

筆者らは実験を行なうにあたって、Fig. 3のようにコイルを設定した。ただし、 $a_1=50.0$ [mm], $a_2=53.0$ [mm], $N=30$ [turn], $z_0=2.20$ [mm], $t_0=2.40$ [mm], $a_0=(a_1+a_2)/2=51.5$ [mm]であった。 ψ_1 は実験より0.0112 [H/m]²となった。そこで(60)式より z_a を求めると $z_a=2.60$ [mm], (61), (62)式を用いると $z_a=2.58$ [mm] となった。この場合、 z_a の値はほとんどかわらないので z_a を求め

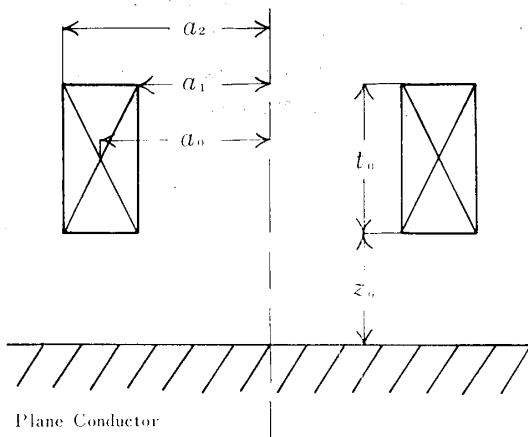


Fig.3 Arrangement of a circular coil with a rectangular cross section

るためには(60)式を用いるのが便利である。 z_a がわかれば、(58)式の z_0 に z_a を代入して σ を求めることが可能となる。筆者らは z_a の値として $z_a=2.60$ [mm] を用いて平板の浸透の深さ δ 及び、導電率 σ を測定したのでこれを Table 2 に示す。なお、使用した導体の寸法は Table 3 に示す。

Table 2 Conductivities of Cu, Al, Brass calculated by (58)

Conductor	f [kHz]	R_c/ω [μH]	δ [mm]	$\sigma \times 10^7$ [δ/m]
Cu	1	16.87	2.12	5.6
	2	12.89	1.48	5.8
	5	8.85	0.932	5.8
	7	7.76	0.799	5.7
	10	6.54	0.658	5.9
	20	4.86	0.473	5.7
Al	1	19.89	2.70	3.5
	2	15.76	1.93	3.4
	5	11.08	1.22	3.4
	7	9.53	1.02	3.5
	10	8.24	0.857	3.5
	20	6.12	0.611	3.4
Brass	1	23.24	3.45	2.1
	2	19.81	2.63	1.8
	5	14.32	1.70	1.8
	7	12.48	1.42	1.8
	10	11.00	1.21	1.7
	20	8.32	0.867	1.7

Table 3 Dimensions of the conductor

Conductor	Longitude [mm]	width [mm]	Thicknes [mm]
Cu	300	290	19
Al	310	310	12
Brass	350	350	9

4. 結 言

コイルを導体に近づけるとその実効インピーダンスは変化する。筆者らはコイルが単巻コイルで、しかもそれが導体に平行している場合について、コイルの実効抵抗変化の近似解析をすすめた。その結果、Table 1 に示すように、その近似解は D/a_0 , δ/a_0 のかなり広い範囲にわたって厳密解と一致することが示されている。 $R_1/(\omega\mu_0a_0)$ と $R_2/(\omega\mu_0a_0)$ は δ/a_0 が小さいほど D/a_0 が大きいほどよく一致しており、 $R_3/(\omega\mu_0a_0)$ と $R_4/(\omega\mu_0a_0)$ は δ/a_0 および D/a_0 が小さいほど $R_2/(\omega\mu_0a_0)$ に一致している。筆者らの計算した範囲内では $R_1/(\omega\mu_0a_0)$ と $R_2/(\omega\mu_0a_0)$ の最大誤差は $D/a_0=0.1$, $\delta/a_0=0.031$ の時で、3.1% とかなり小さく、近似範囲のとり方によっては $R_2/(\omega\mu_0a_0)$ は非常に精度の良い近似値となりうる。すなわち、適当な範囲において、(63)式は(15)式の非常に精度の良い近似式となっている。同時に、ある条件のもとで、(50)及び(51)式も(15)式の近似式として十分使用できることがわかる。

これらの近似式は単巻コイルに関するものであるが、筆者らはFig 3に示すようなコイルを用いて、(57), (58)式から、Cu, Al, Brass 平板の浸透の深さ δ 及び、導電率 σ を測定した。その結果 Table 2 に示すように、 $\delta < 2.70$ [mm] ではほぼ良い結果をうることができた。すなわち、 $D/a_0 = 2z_a/a_0 = 0.101$, $\delta/a_0 < 0.0524$ の範囲では好ましい結果がでることが示されている。1 [kHz] で測定した Brass の導電率 σ は $\delta/a_0 = 0.067$ とかなり大きな値になっているため(58)式を用いることに無理が生じたものと思われる。このことは、Table 1 の近似精度を見れば容易に推測できることである。

本論文においては、コイルを単巻コイルと考えているので、今後は、(21)式をコイルの軸方向、半径方向、または、その両方向に積分し、ソレノイドコイル、スパイラルコイルおよび矩形断面円形コイルの場合について検討する予定である。

参 考 文 献

- 1) 尾上守夫：電学誌, 88, 162 (1968)
- 2) 戸田圭一, 長島弘修：山口大学工学部研究報告, 21, 61 (1970)
- 3) G. N. Watson: "A. Treatise on the theory of Bessel Functions", Cambridge University Press (1962) p389
- 4) 森口繁一, その他：数学公式Ⅱ, 岩波書店 (1968) p198
- 5) D. BIERENS DE HAAN: "Nouvelles ÚINTÉGRALLES DÉFINIES" (1938) p93
- 6) Harris Hancock: "Elliptic Integrals, (1917) p59
- 7) 吉田耕作, 雨宮綾夫：応用数学便覧, 丸善, p465

(昭和45年11月14日受理)