

対称に配置された 2 つの矩形コイル間の相互インダクタンス計算用数表

武 平 信 夫*

Tables for the Calculations of Mutual Inductance of Two
Rectangular Coils arranged in Plane-Symmetry

Nobuo TAKEHIRA

Abstract

The normalized formulas for the calculations of mutual inductance of two rectangular coils arranged in plane-symmetry are derived. Numerical calculations are carried out by an electronic computer and the tables are presented. With these tables, mutual inductance is calculated through a simple procedure.

In this paper, it is assumed that the conductors are of circular cross-section and that the current is concentrated along the axis of the conductor. Both the proximity effect and the skin effect are neglected.

1. 緒 言

平行な矩形コイル間の相互インダクタンスは、2つの平行導線間の相互インダクタンスの公式を使用すれば容易に導びくことができ、多くの文献に記載されている^{1,2)}。斜交直線状導線間の相互インダクタンスは古く Martens 氏³⁾、Campbell 氏⁴⁾らによって発表されているので、平行でない矩形コイル間の相互インダクタンスを導びくこともそれほど困難ではないのであるが、なぜかその例をみない。本稿では対称で2辺が互に平行な矩形コイル間の相互インダクタンスの公式を求め、その公式を正規化することによって数表作成用の関数式を算出した。得られた関数式を用いて電子計算機によって数値計算を行い、数表を作成した。また数表の使用例も示した。

ここでは導線は円形断面を有するものとし、電流は導体軸を集中して流れるものとする。この仮定に誤差を与える要因として近接効果、表皮効果がある。Charles 氏⁵⁾によれば導体間の隙間がその直径の2倍以上であれば、近接効果は考慮する必要はないといふ。また百田氏の研究⁶⁾によれば、表皮効果は相互インダクタンスの計算の際に無視しても大きな誤差とはならない。したがって本稿においては近接効果、表皮効果は共に考慮しなかった。

2. 直線状導線間の相互インダクタンス

歴史的にはもちろん平行導線間の相互インダクタンスは斜交導線間の相互インダクタンスよりも先に求められたのであるが、ここでは理論を展開する都合上、斜交導線間の相互インダクタンスを先に取り上げる。

2.2 斜交導線間の相互インダクタンス

斜交導線間の相互インダクタンスは F. F. Martens 氏³⁾および G. A. Campbell 氏⁴⁾らによって既に詳細に解析されている。それらを中心に以下論述する。

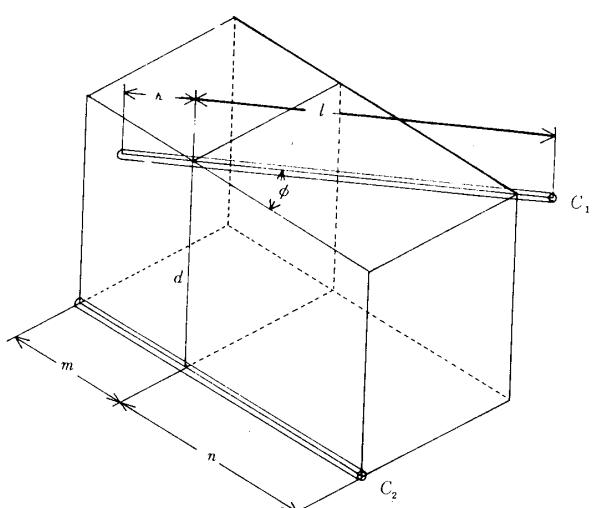


Fig. 1 Skewed conductors

* 電気工学教室

Fig. 1において線分 d は 2 導線の最短距離である。線分 d はまた 2 導線の共通垂線でもある。角度 ϕ は導線 C_2 の、 C_1 を含み d に垂直な平面への正射影と C_1 とのなす角である。 C_1, C_2 の長さは共通垂線との交点を境に、それぞれ k, l および m, n とする。 C_1 と C_2 の相互インダクタンスは Neumann の積分公式を用いれば

$$\begin{aligned} M = & 10^{-7} \times \cos \phi \left[-m \ln \frac{-k + m \cos \phi + S_1}{l + m \cos \phi + S_2} - n \ln \frac{-k - n \cos \phi + S_3}{l - n \cos \phi + S_4} - k \ln \frac{-m + k \cos \phi + S_1}{n + k \cos \phi + S_3} \right. \\ & - l \ln \frac{-m - l \cos \phi + S_2}{n - l \cos \phi + S_4} + \frac{2d}{\sin \phi} \left\{ \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)(-m + k \cos \phi + S_1) - k \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \right. \\ & - \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)(n + k \cos \phi + S_3) - k \sin^2 \phi}{d \sin \phi} - \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)(-m - l \cos \phi + S_2) + l \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \\ & \left. \left. + \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)(n - l \cos \phi + S_4) + l \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \right\} \right] \end{aligned} \quad (1)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} S_1 = \sqrt{m^2 + k^2 + d^2 - 2mk \cos \phi} \\ S_2 = \sqrt{m^2 + l^2 + d^2 + 2ml \cos \phi} \\ S_3 = \sqrt{n^2 + k^2 + d^2 + 2nk \cos \phi} \\ S_4 = \sqrt{n^2 + l^2 + d^2 - 2nl \cos \phi} \end{array} \right\} \quad (2)$$

となる。(1)式が 2 つの直線状導線の最も一般的な配置における相互インダクタンスである。本公式を用いて各種の特別な場合の相互インダクタンスを求めることができ。 (1)式は k, m がそれぞれ l, n 側にあっても k, m をそれぞれ $-k, -m$ と置くことによってそのまま使用できる。たとえば Fig. 2 a について考えてみよう。この場合(1)式において

$$\left. \begin{array}{l} k = m = -\lambda \\ l = n = \lambda + p \end{array} \right\} \quad (3)$$

と置けばよい。すなわち

$$\begin{aligned} M = & 10^{-7} \times \cos \phi \left[2\lambda \ln \frac{\lambda(1 - \cos \phi) + R_1}{\lambda(1 - \cos \phi) + p + R_2} - 2(\lambda + p) \ln \frac{(\lambda + p)(1 - \cos \phi) - p + R_2}{(\lambda + p)(1 - \cos \phi) + R_3} \right. \\ & + \frac{2d}{\sin \phi} \left\{ \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)\{\lambda(1 - \cos \phi) + R_1\} + \lambda \sin^2 \phi}{d \sin \phi} - \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)\{\lambda(1 - \cos \phi) + p + R_2\} + \lambda \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \right. \\ & - \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)\{(\lambda + p)(1 - \cos \phi) - p + R_2\} + (\lambda + p) \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \\ & \left. \left. + \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)\{(\lambda + p)(1 - \cos \phi) + R_3\} + (\lambda + p) \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \right\} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} R_1 = \sqrt{2\lambda^2(1 - \cos \phi) + d^2} \\ R_2 = \sqrt{\lambda^2 + (\lambda + p)^2 + d^2 - 2\lambda(\lambda + p) \cos \phi} \\ R_3 = \sqrt{2(\lambda + p)^2(1 - \cos \phi) + d^2} \end{array} \right\} \quad (5)$$

となる。

(4)式において $\lambda = 0$ とおけば (Fig. 2 b 参照)

$$\begin{aligned} M = & 10^{-7} \times \cos \phi \left[-2p \ln \frac{-p \cos \phi + \sqrt{p^2 + d^2}}{p(1 - \cos \phi) + \sqrt{2p^2(1 - \cos \phi) + d^2}} \right. \\ & + \frac{2d}{\sin \phi} \left\{ \tan^{-1} \frac{1 - \cos \phi}{\sin \phi} - \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)(p + \sqrt{p^2 + d^2})}{d \sin \phi} - \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)(-p \cos \phi + \sqrt{p^2 + d^2}) + p \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \right. \\ & \left. \left. + \tan^{-1} \frac{(1 - \cos \phi)\{p(1 - \cos \phi) + \sqrt{2p^2(1 - \cos \phi) + d^2}\} + p \sin^2 \phi}{d \sin \phi} \right\} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

となる。

また(1)式において $d = 0$ と置くと (Fig. 3 参照)

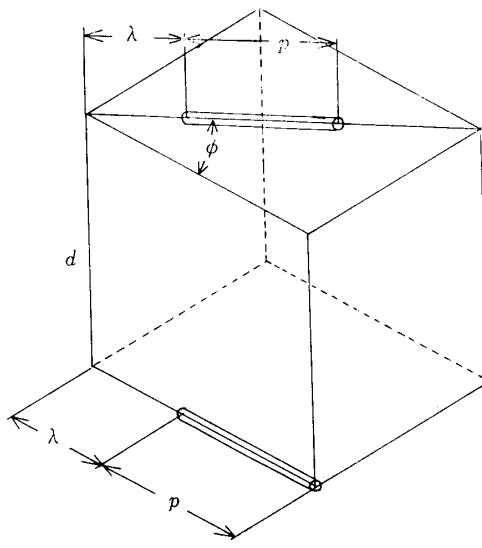


Fig. 2a Skewed conductors

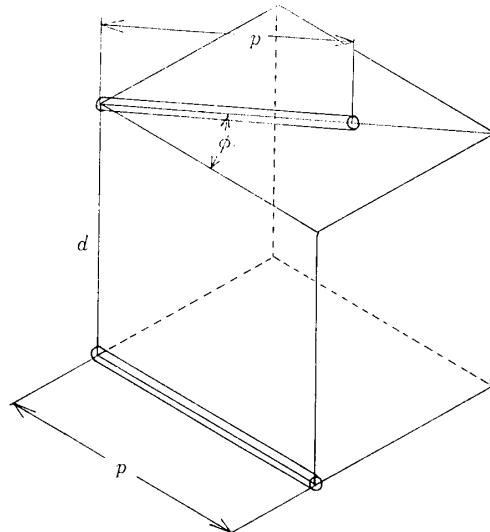


Fig. 2b Skewed conductors

$$M = 10^{-7} \times \cos\phi \left[-m \ln \frac{-k + m \cos\phi + Q_1}{1 + m \cos\phi + Q_2} - n \ln \frac{-k - n \cos\phi + Q_3}{l - n \cos\phi + Q_4} - k \ln \frac{-m + k \cos\phi + Q_1}{n + k \cos\phi + Q_3} - l \ln \frac{-m - l \cos\phi + Q_2}{n - l \cos\phi + Q_4} \right] \quad (7)$$

ただし

$$\begin{aligned} Q_1 &= \sqrt{m^2 + k^2 - 2mk \cos\phi} \\ Q_2 &= \sqrt{m^2 + l^2 + 2ml \cos\phi} \\ Q_3 &= \sqrt{n^2 + k^2 + 2nk \cos\phi} \\ Q_4 &= \sqrt{n^2 + l^2 - 2nl \cos\phi} \end{aligned} \quad (8)$$

となる。

(7)式において(3)式の置換を行えば (Fig. 4 a参照)

$$\begin{aligned} M &= 2 \times 10^{-7} \times \cos\phi \left[\lambda \ln \frac{\lambda(1-\cos\phi) + P_1}{\lambda(1-\cos\phi) + p + P_2} \right. \\ &\quad \left. - (\lambda+p) \ln \frac{(\lambda+p)(1-\cos\phi) - p + P_3}{(\lambda+p)(1-\cos\phi) + P_4} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

ただし

$$\begin{aligned} P_1 &= \lambda \sqrt{2(1-\cos\phi)} \\ P_2 &= \sqrt{\lambda^2 + (\lambda+p)^2 - 2\lambda(\lambda+p)\cos\phi} \\ P_3 &= (\lambda+p) \sqrt{2(1-\cos\phi)} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。 (9)式は当然(4)式において $d = 0$ としたものと一致する。

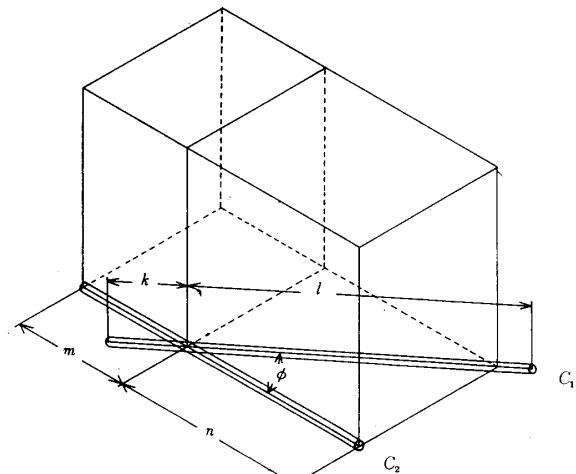
(9)式において $\lambda = 0$ とおけば (Fig. 4 b参照)

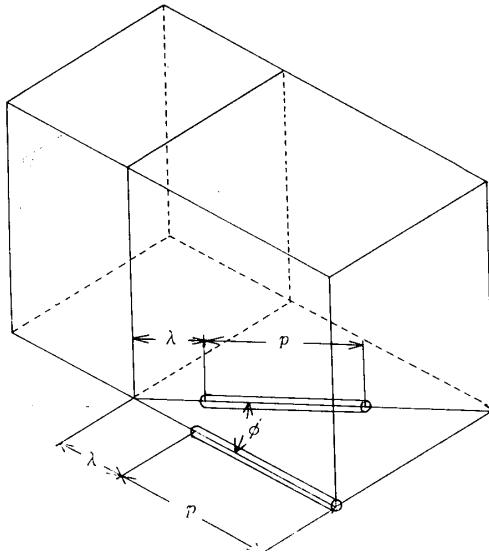
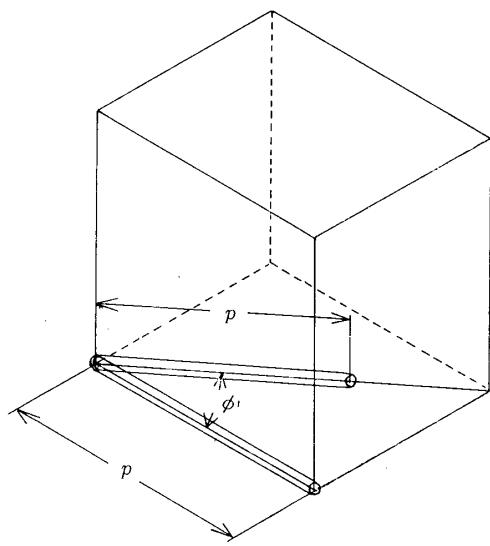
$$M = 2 \times 10^{-7} \times p \cos\phi \ln \frac{\sqrt{1-\cos\phi} + \sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\phi}} \quad (11)$$

となる。 (11)式もまた(6)式において $d = 0$ としたものと一致する。 (11)式は逆双曲線関数を用いて

$$M = 4 \times 10^{-7} \times p \cos\phi \tanh^{-1} \frac{1}{1 + \sqrt{2(1-\cos\phi)}} \quad (12)$$

と表すことができる。 文献(7)には(12)式を計算するための数表が記載されている。

Fig. 3 Skewed conductors ($d = 0$)

Fig. 4a Skewed conductors ($d=0$)Fig. 4b Skewed conductors ($d=0$)

2.2 平行導線間の相互インダクタンス

$\phi = 0, \pi$ の場合、すなわち導線 C_1, C_2 が互に平行な場合には(1)式をそのまま使用することはできない。
 $\sin\phi \neq 0$ として積分を実行したからである。 $\phi = 0$ の場合には (Fig. 5 参照)

$$M = 10^{-7} \left[(m+l) \ln(m+l+\varepsilon_1) + (n-l) \ln(-n+l+\varepsilon_2) - (m-k) \ln(m-k+\varepsilon_3) - (n+k) \ln(-n-k+\varepsilon_4) - \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \right] \quad (13)$$

ただし

$$\varepsilon_1 = \sqrt{(m+l)^2 + d^2}$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{(n-l)^2 + d^2}$$

$$\varepsilon_3 = \sqrt{(m-k)^2 + d^2}$$

$$\varepsilon_4 = \sqrt{(n+k)^2 + d^2}$$

となる。

また $\phi = \pi$ の場合には (Fig. 6 参照)

$$M = -10^{-7} \left[(m-l) \ln(-m+l+\varepsilon_1) + (n+l) \ln(n+l+\varepsilon_2) - (m+k) \ln(-m-k+\varepsilon_3) - (n-k) \ln(n-k+\varepsilon_4) + \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_4 \right] \quad (15)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{(m-l)^2 + d^2} \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{(n+l)^2 + d^2} \\ \varepsilon_3 &= \sqrt{(m+k)^2 + d^2} \\ \varepsilon_4 &= \sqrt{(n-k)^2 + d^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

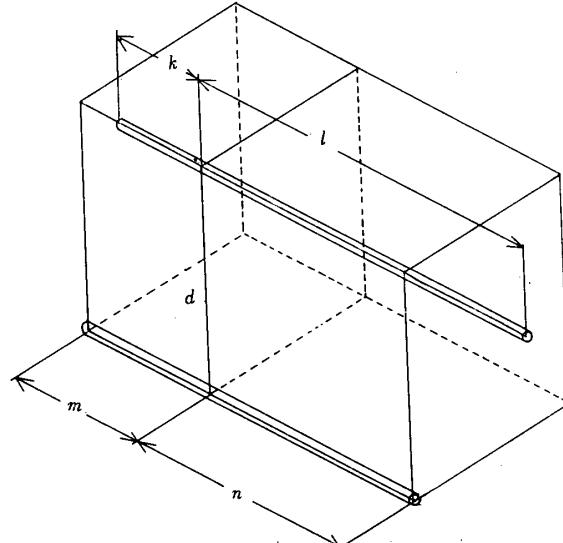


Fig. 5 Parallel conductors

となる。

平行導線に関する詳細な文献として知られる NBS 発行の Circular, "Radio Instruments and Measurements"¹⁾ に記載されている公式は(13), (15)式から導びかれる。まず(13)式において $k=m=0$ とおけば (Fig. 7 参照)

$$\begin{aligned} M = 10^{-7} & [l \ln(l + \sqrt{l^2 + d^2}) \\ & + (n-l) \ln\{-n + l + \sqrt{(n-l)^2 + d^2}\} \\ & - n \ln(-n + \sqrt{n^2 + d^2}) \\ & - \sqrt{l^2 + d^2} + \sqrt{(n-l)^2 + d^2} + d - \sqrt{n^2 + d^2}] \quad (17) \end{aligned}$$

となる。

(17)式において $n=l$ とおけば (Fig. 8 参照)

$$M = 2 \times 10^{-7} \left[l \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2}}{d} - \sqrt{l^2 + d^2} + d \right] \quad [174] \quad (18)$$

となる。ただし [] の式番号は上記 Circular の式番号を示す。(付録 I 参照)

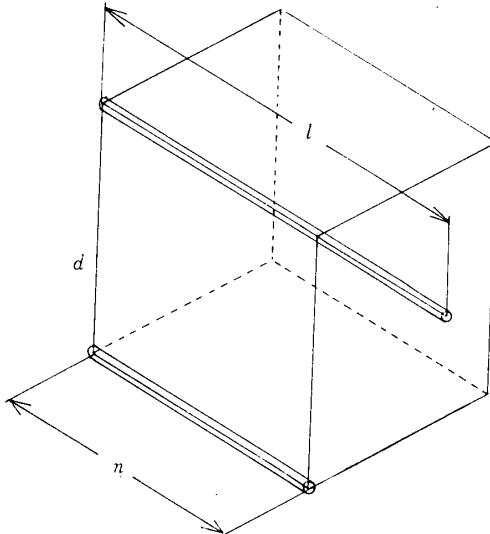


Fig. 7 Parallel conductors

(18)式で $l \gg d$ が成り立つならば

$$M = 2 \times 10^{-7} l \left[\ln \frac{2l}{d} - 1 \right] \quad [175] \quad (19)$$

となる。

(13)式において $k=n=0$ とおけば (Fig. 9 参照)

$$\begin{aligned} M = 10^{-7} & [(m+l) \ln\{m+l+\sqrt{(m+l)^2+d^2}\} \\ & - l \ln(l+\sqrt{l^2+d^2}) \\ & - m \ln(m+\sqrt{m^2+d^2}) \\ & - \sqrt{(m+l)^2+d^2} + \sqrt{l^2+d^2} + \sqrt{m^2+d^2} - d] \quad (20) \end{aligned}$$

となる。

(20)式で $m=l$ とおけば (Fig. 10 参照)

$$M = 10^{-7} \left[2l \ln \frac{2l + \sqrt{4l^2 + d^2}}{l + \sqrt{l^2 + d^2}} - \sqrt{4l^2 + d^2} + 2\sqrt{l^2 + d^2} - d \right] \quad [181] \quad (21)$$

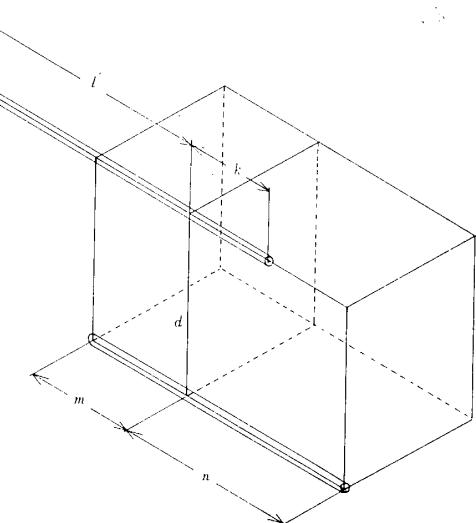


Fig. 6 Parallel conductors

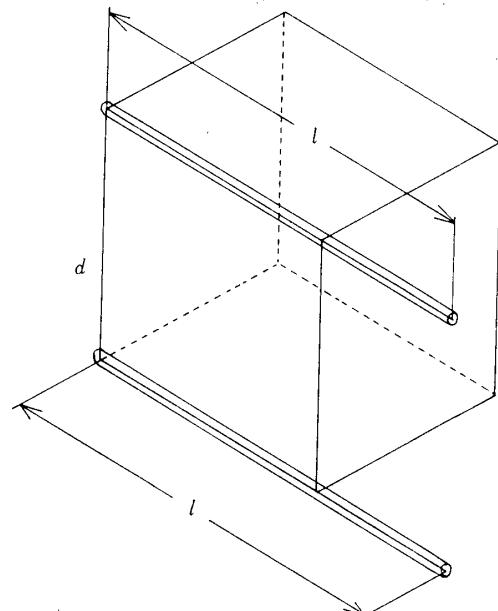


Fig. 8 Parallel conductors

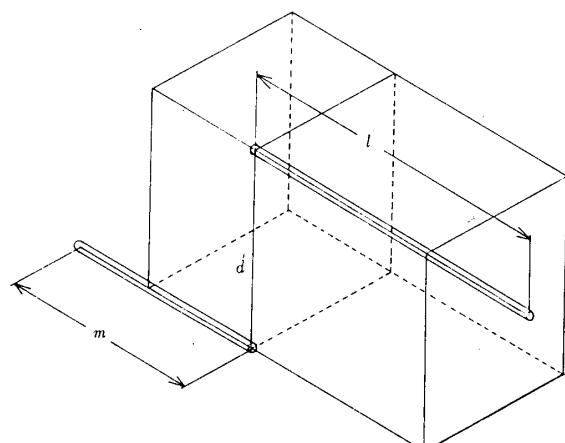


Fig. 9 Parallel conductors

となる。

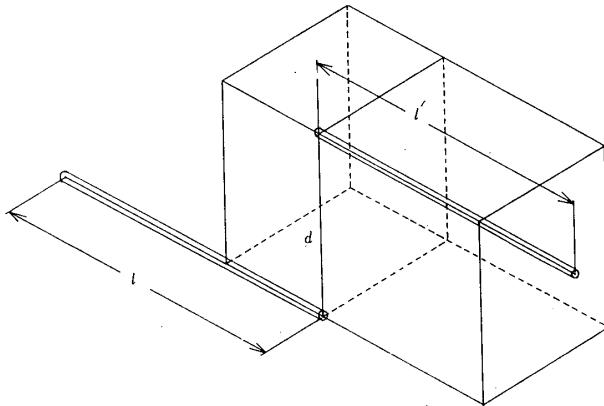


Fig. 10 Parallel conductors

20式において $d=0$ とおくと (Fig. 11参照)

$$M=10^{-7} \left[l \ln \frac{l+m}{l} + m \ln \frac{l+m}{m} \right] \quad [176] \quad (22)$$

となる。

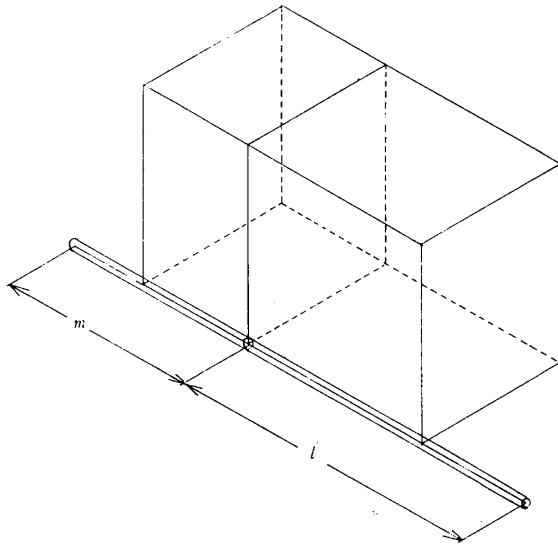


Fig. 11 Two conductors in the same line

(13)式において $k=0$, $m=n=l$ とおくと (Fig. 12 参照)

$$M=10^{-7} \left[2l \ln \frac{2l+\sqrt{4l^2+d^2}}{d} - \sqrt{4l^2+d^2} + d \right] \quad (23)$$

となる。

(13)式において $k=l$, $m=n=l_1$ とおくと (Fig. 13 参照)

$$M=2 \times 10^{-7} \left[2l \ln \frac{\sqrt{(l_1-l)^2+d^2}+l_1-l}{d} + (l_1+l) \ln \frac{\sqrt{(l_1+l)^2+d^2}+l_1+l}{\sqrt{(l_1-l)^2+d^2}+l_1-l} \right]$$

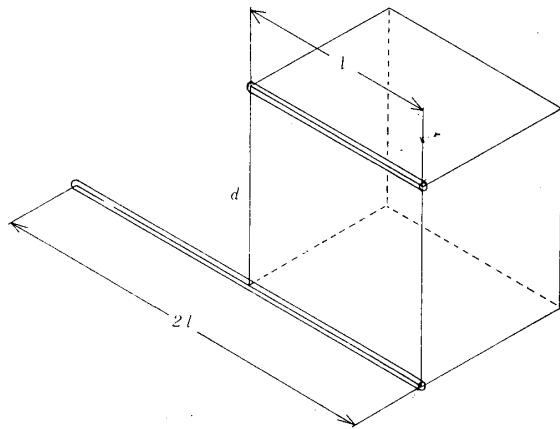


Fig. 12 Parallel conductors

$$-\sqrt{(l_1+l)^2+d^2} + \sqrt{(l_1-l)^2+d^2}$$

[182] (24)

となる。 (付録II参照)

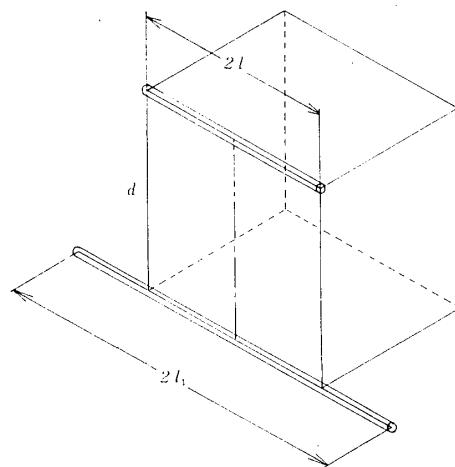


Fig. 13 Parallel conductors

(13)式において $k=0$, $m=l_1+\lambda$, $n=-\lambda$ とおくと (Fig. 14 参照)

$$M=10^{-7} \left[\begin{aligned} & \varrho_1 \ln(\varrho_1 + \sqrt{\varrho_1^2+d^2}) \\ & - \varrho_2 \ln(\varrho_2 + \sqrt{\varrho_2^2+d^2}) \\ & - \varrho_3 \ln(\varrho_3 + \sqrt{\varrho_3^2+d^2}) \\ & + \lambda \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2+d^2}) \\ & - \sqrt{\varrho_1^2+d^2} + \sqrt{\varrho_2^2+d^2} + \sqrt{\varrho_3^2+d^2} \\ & - \sqrt{\lambda^2+d^2} \end{aligned} \right] \quad (25)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 &= l_1 + l + \lambda \\ \varrho_2 &= l + \lambda \\ \varrho_3 &= l_1 + \lambda \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

となる。

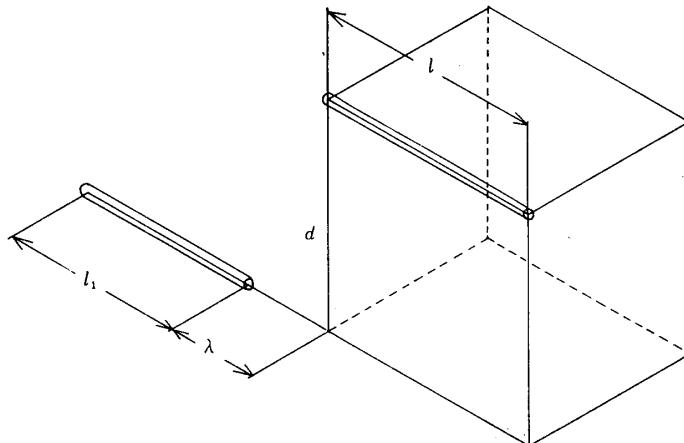


Fig. 14 Parallel conductors

25式で $d = 0$ とおけば (Fig. 15 参照)

$$M = 10^{-7} \left[(l_1 + l + \lambda) \ln(l_1 + l + \lambda) - (l + \lambda) \ln(l + \lambda) - (l_1 + \lambda) \ln(l_1 + \lambda) + \lambda \ln \lambda \right] \quad (27)$$

となる。27式において $\lambda = 0$ とおくと22式に一致する。

3. 矩形コイル間の相互インダクタンス

前章で述べた公式を使用すれば面対称な矩形コイル間の相互インダクタンスを求めることができる。Fig. 16における2つの矩形コイル $1\ 2\ 3\ 4$, $1'\ 2'\ 3'\ 4'$ は平面 $00'rr'$ に関して対称であり、辺 $\overline{1}2$ と $\overline{1}'2'$, 辺 $\overline{3}4$ と $\overline{3}'4'$ はそれぞれ平行であるものとする。また $\overline{2}3 = \overline{2}'3' = \overline{4}1 = \overline{4}'1' = a$, $\overline{1}2 = \overline{1}'2' = \overline{3}4 = \overline{3}'4' = b$, $\overline{3}0 = \overline{3}'0' = \overline{4}0' = \overline{4}'0' = \eta$, $\angle 20r = \angle 2'0'r' = \angle 10'r = \angle 1'0'r = \theta$ とする。電流の向きは矢印の通りである。矩形コイルの辺 $\alpha\beta$ と $\gamma\delta$ の相互インダクタンスを $M_{\alpha\beta:\gamma\delta}$ とおく。例えば辺 $\overline{1}2$ と $\overline{1}'2'$ の相互インダクタ

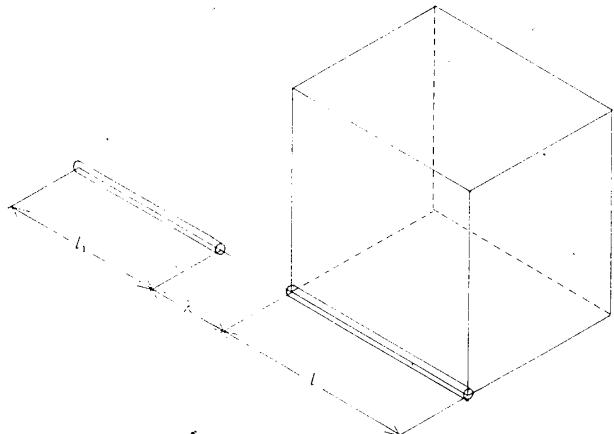


Fig. 15 Two conductors in the same line

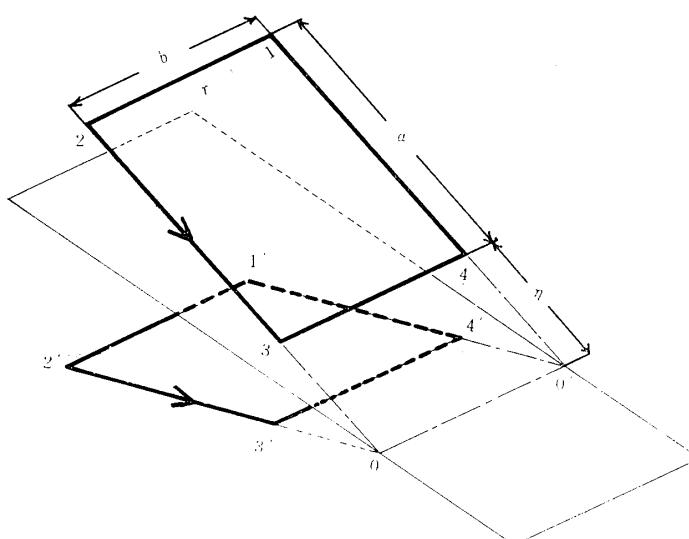


Fig. 16 Arrangement of two rectangular coils

ンスを $M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{1}\overline{2}'} = M_{\overline{3}\overline{4}:\overline{1}\overline{2}'}$ とする如くである。矩形コイル間の相互インダクタンス M は

$$\left. \begin{array}{l} M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{3}\overline{4}'} = M_{\overline{3}\overline{4}:\overline{1}\overline{2}'} \\ M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{2}\overline{3}'} = M_{\overline{4}\overline{1}:\overline{4}\overline{1}'} \\ M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}'} = M_{\overline{4}\overline{1}:\overline{2}\overline{3}'} \end{array} \right\} \quad (28)$$

であることを考慮すると

$$\begin{aligned} M &= M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{1}\overline{2}'} + M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{3}\overline{4}'} + M_{\overline{3}\overline{4}:\overline{1}\overline{2}'} + M_{\overline{3}\overline{4}:\overline{3}\overline{4}'} + M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{2}\overline{3}'} + M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}'} + M_{\overline{4}\overline{1}:\overline{4}\overline{1}'} + M_{\overline{4}\overline{1}:\overline{2}\overline{3}'} \\ &= M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{1}\overline{2}'} + 2M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{3}\overline{4}'} + M_{\overline{3}\overline{4}:\overline{3}\overline{4}'} + 2M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{2}\overline{3}'} + 2M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}'} \end{aligned} \quad (29)$$

となる。 $M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{1}\overline{2}'}$ は両辺の電流の向きが同一であるから、先に求めた(18式において

$$d \rightarrow 2(a+\eta)\sin\theta$$

$$l \rightarrow b$$

とおけばよい。その結果

$$M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{1}\overline{2}'} = 2 \times 10^{-7} \left[b \ln \frac{A_1 + b}{2(a+\eta)\sin\theta} - A_1 + 2(a+\eta)\sin\theta \right] \quad (30)$$

ただし

$$A_1 = \sqrt{b^2 + 4(a+\eta)^2 \sin^2\theta}$$

となる。 $M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{3}\overline{4}'}$ は両辺の電流の向きが反対であるることを考慮して、(18式において

$$d \rightarrow \sqrt{a^2 + 4\eta(a+\eta)\sin^2\theta}$$

$$l \rightarrow b$$

とおき、全体に負号をつける。そうすれば

$$M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{3}\overline{4}'} = -2 \times 10^{-7} \left[b \ln \frac{A_2 + b}{A_3} - A_2 + A_3 \right] \quad (31)$$

ただし

$$A_2 = \sqrt{b^2 + a^2 + 4\eta(a+\eta)\sin^2\theta}$$

$$A_3 = \sqrt{a^2 + 4\eta(a+\eta)\sin^2\theta}$$

となる。 $M_{\overline{3}\overline{4}:\overline{3}\overline{4}'}$ は $M_{\overline{1}\overline{2}:\overline{1}\overline{2}'}$ と同様に(18式において

$$d \rightarrow 2\eta\sin\theta$$

$$l \rightarrow b$$

と置くことによって

$$M_{\overline{3}\overline{4}:\overline{3}\overline{4}'} = 2 \times 10^{-7} \left[b \ln \frac{A_4 + b}{2\eta\sin\theta} - A_4 + 2\eta\sin\theta \right] \quad (32)$$

ただし

$$A_4 = \sqrt{b^2 + 4\eta^2 \sin^2\theta}$$

となる。 $M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{2}\overline{3}'}$ は両辺の電流の向きが同一であるから(9式において

$$\lambda \rightarrow \eta$$

$$p \rightarrow a$$

$$\phi \rightarrow 2\theta$$

と置くと

$$M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{2}\overline{3}'} = 2 \times 10^{-7} \cos 2\theta \left[\eta \ln \frac{2\eta\sin\theta(\sin\theta + 1)}{a + 2\eta\sin^2\theta + A_3} - (a+\eta) \ln \frac{2(a+\eta)\sin^2\theta - a + A_3}{2(a+\eta)\sin\theta(\sin\theta + 1)} \right] \quad (33)$$

となる。(9式の最後の項である $M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}'}$ は、両辺の電流の向きを考慮すれば、(4式において

$$\lambda \rightarrow \eta$$

$$p \rightarrow a$$

$$\phi \rightarrow 2\theta$$

$$d \rightarrow b$$

と置くことによって

$$M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}} = -2 \times 10^{-7} \cos 2\theta \left[\eta \ln \frac{\eta(1-\cos 2\theta) + A_4}{\eta(1-\cos\theta) + a + A_2} - (a+\eta) \ln \frac{(a+\eta)(1-\cos 2\theta) - a + A_2}{(a+\eta)(1-\cos 2\theta) + A_1} \right. \\ \left. + \frac{b}{\sin 2\theta} \left\{ \tan^{-1} \frac{(2\eta+A_4)\tan\theta}{b} - 2 \tan^{-1} \frac{(a+2\eta+A_2)\tan\theta}{b} + \tan^{-1} \frac{(2a+2\eta+A_1)\tan\theta}{b} \right\} \right] \quad (34)$$

となる。 (30), (31), (32), (33), (34)式を(29)式に代入することによって

$$M = 2 \times 10^{-7} \left[b \ln \frac{A_1+b}{2(a+\eta)\sin\theta} - A_1 + 2(a+\eta)\sin\theta - 2b \ln \frac{A_2+b}{A_3} - 2A_2 + 2A_3 \right. \\ \left. + b \ln \frac{A_4+b}{2\eta\sin\theta} - A_4 + 2\eta\sin\theta + 2\eta\cos 2\theta \ln \frac{2\eta\sin\theta(\sin\theta+1)}{a+2\eta\sin^2\theta+A^2} \right. \\ \left. - 2(a+\eta)\cos 2\theta \ln \frac{2(a+\eta)\sin^2\theta - a + A_3}{2(a+\eta)\sin\theta(\sin\theta+1)} - 2\eta\cos 2\theta \ln \frac{\eta(1-\cos 2\theta) + A_4}{\eta(1-\cos 2\theta) + a + A_2} \right. \\ \left. + 2(a+\eta)\cos 2\theta \ln \frac{(a+\eta)(1-\cos 2\theta) - a + A_2}{(a+\eta)(1-\cos 2\theta) + A_1} - \frac{2b}{\sin 2\theta} \left\{ \tan^{-1} \frac{(2\eta+A_4)\tan\theta}{b} \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \tan^{-1} \frac{(a+2\eta+A_2)\tan\theta}{b} + \tan^{-1} \frac{(2a+2\eta+A_1)\tan\theta}{b} \right\} \right] \quad (35)$$

となる。 A_1, A_2, A_3, A_4 は既述したがここでまとめておく。

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \sqrt{b^2 + 4(a+\eta)^2 \sin^2\theta} \\ A_2 = \sqrt{b^2 + a^2 + 4\eta(a+\eta)\sin^2\theta} \\ A_3 = \sqrt{a^2 + 4\eta(a+\eta)\sin^2\theta} \\ A_4 = \sqrt{b^2 + 4\eta^2 \sin^2\theta} \end{array} \right\} \quad (36)$$

特別な場合として $\theta = \pi/2$ の場合には(35)式をそのまま使用することはできない。(34)式の $M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}}$ は $\theta \neq \pi/2$ と仮定して計算したからである。 $\theta = \pi/2$ の場合の $M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}}$ は(15)式において

$$\begin{aligned} k &\rightarrow -\eta \\ l &\rightarrow a+\eta \\ m &\rightarrow -\eta \\ n &\rightarrow a+\eta \\ d &\rightarrow b \end{aligned}$$

とおき、電流の向きを考慮して

$$M_{\overline{2}\overline{3}:\overline{4}\overline{1}} = 10^{-7} \left[2(a+\eta) \ln(2a+2\eta + \sqrt{4(a+\eta)^2 + b^2}) - 2(a+2\eta) \ln(a+2\eta + \sqrt{(a+2\eta)^2 + b^2}) \right. \\ \left. + 2\eta \ln(2\eta + \sqrt{4\eta^2 + b^2}) - \sqrt{4(a+\eta)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a+2\eta)^2 + b^2} - \sqrt{4\eta^2 + b^2} \right] \quad (37)$$

したがって $\theta = \pi/2$ の場合の矩形コイル間の相互インダクタンスは

$$M = 2 \times 10^{-7} \left[b \ln \frac{A_{10}+b}{2(a+\eta)} - 2b \ln \frac{A_{20}+b}{A_{30}} + b \ln \frac{A_{40}+b}{2\eta} + 2\eta \cos 2\theta \ln \frac{2\eta\sin\theta(\sin\theta+1)}{a+2\eta\sin^2\theta+A_{20}} \right. \\ \left. - 2(a+\eta)\cos 2\theta \ln \frac{2(a+\eta)\sin^2\theta - a + A_{30}}{2(a+\eta)\sin\theta(\sin\theta+1)} + 2(a+\eta) \ln(2a+2\eta + A_{10}) \right. \\ \left. - 2(a+2\eta) \ln(a+2\eta + A_{20}) + 2\eta \ln(2\eta + A_{40}) - 2A_{10} + 2A_{30} - A_{40} + 2(a+2\eta) \right] \quad (38)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} A_{10} = \sqrt{b^2 + 4(a+\eta)^2} \\ A_{20} = \sqrt{b^2 + a^2 + 4\eta(a+\eta)} \\ A_{30} = \sqrt{a^2 + 4\eta(a+\eta)} \\ A_{40} = \sqrt{b^2 + 4\eta^2} \end{array} \right\} \quad (39)$$

となる。

4. 数表のための関数式

前章で矩形コイル間の相互インダクタンスが求まったのでこれを数表用の関数式に変形する。数表は变数が少

いほど利用しやすいものである。それ故、何を基準にとって数式を正規化するかは慎重に考慮する必要がある。
ここでは b を基準にとり

$$X = \frac{a}{b}, \quad Y = \frac{\eta}{b} \quad (40)$$

で正規化した。これによれば(35)式は

$$\begin{aligned} M = 2 \times 10^{-7} b & \left[\ln \frac{B_1 + 1}{2(X+Y)\sin\theta} - B_1 + 2(X+Y)\sin\theta - 2 \ln \frac{B_2 + 1}{B_3} - 2B_2 + 2B_3 \right. \\ & + \ln \frac{B_4 + 1}{2Y\sin\theta} - B_4 + 2Y\sin\theta + 2Y\cos 2\theta \ln \frac{2Y\sin\theta(\sin\theta + 1)}{X+2Y\sin^2\theta+B_2} \\ & - 2(X+Y)\cos 2\theta \ln \frac{2(X+Y)\sin^2\theta - X + B_3}{2(X+Y)\sin\theta(\sin\theta + 1)} - 2Y\cos 2\theta \ln \frac{Y(1 - \cos 2\theta) + B_4}{Y(1 - \cos 2\theta) + X + B_2} \\ & + 2(X+Y)\cos 2\theta \ln \frac{(X+Y)(1 - \cos 2\theta) - X + B_2}{(X+Y)(1 - \cos 2\theta) + B_1} - \frac{2}{\sin 2\theta} \left\{ \tan^{-1}\{(2Y+B_4)\tan\theta\} \right. \\ & \left. \left. - 2\tan^{-1}\{(X+2Y+B_2)\tan\theta\} + \tan^{-1}\{(2X+2Y+B_1)\tan\theta\} \right\} \right] \end{aligned} \quad (41)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} B_1 = \sqrt{1 + 4(X+Y)^2 \sin^2\theta} \\ B_2 = \sqrt{1 + X^2 + 4Y(X+Y)\sin^2\theta} \\ B_3 = \sqrt{X^2 + 4Y(X+Y)\sin^2\theta} \\ B_4 = \sqrt{1 + 4Y^2 \sin^2\theta} \end{array} \right\} \quad (42)$$

となる。 $\theta = \pi/2$ の場合には(38)式から

$$\begin{aligned} M = 2 \times 10^{-7} b & \left[\ln \frac{B_{10} + 1}{2(X+Y)} - 2 \ln \frac{B_{20} + 1}{B_{30}} + \ln \frac{B_{40} + 1}{2Y} + 2Y\cos 2\theta \ln \frac{2Y\sin\theta(\sin\theta + 1)}{X+2Y\sin^2\theta+B_{20}} \right. \\ & - 2(X+Y)\cos 2\theta \ln \frac{2(X+Y)\sin^2\theta - X + B_{30}}{2(X+Y)\sin\theta(\sin\theta + 1)} + 2(X+Y)\ln(2X+2Y+B_{10}) \\ & \left. - 2(X+2Y)\ln(X+2Y+B_{20}) + 2Y\ln(2Y+B_{40}) - 2B_{10} + 2B_{30} - B_{40} + 2(X+2Y) \right] \end{aligned} \quad (43)$$

ただし

$$\left. \begin{array}{l} B_{10} = \sqrt{1 + 4(X+Y)^2} \\ B_{20} = \sqrt{1 + X^2 + 4Y(X+Y)} \\ B_{30} = \sqrt{X^2 + 4Y(X+Y)} \\ B_{40} = \sqrt{1 + 4Y^2} \end{array} \right\} \quad (44)$$

となる。結局(41), (43)式は共に

$$M = 2 \times 10^{-7} b M_n \quad (45)$$

の形で与えられる。 X, Y, θ を変数として M_n の値を数表で示しておけば、相互インダクタンスの値が求まる。
数表は 3 变数であるから立体的なものとなり、詳細に記述すれば膨大なものとなる。それ故紙数の関係で Table
1 にその一部分を示す。

5. 使用例

Fig.16において

$$a=10\text{cm} \quad b=20\text{cm}$$

$$\eta=2\text{cm} \quad \theta=30^\circ$$

の矩形コイル間の相互インダクタンスを求めてみよう。

$$X=0.5 \quad Y=0.1$$

であるから Table 1 から

$$M_n = 1.5286$$

したがって(45式から

$$M = 2 \times 10^{-7} \times 0.2 \times 1.5286 = 6.1144 \times 10^{-8} (\text{H})$$

となる。

6. 結 言

本数表においては変数が3個となり、その使用は少し繁雑である。何らかの方法で変数を減らすことができればより便利な数表となろう。本数表は1回巻きの場合を示してあるがN回巻きの円形断面矩形コイル、正方形断面矩形コイルなどにも近似的に適用できる。また単層矩形コイルについても拡張できるがこれについては稿を改めたい。

終りに日頃御援助いただき戸田圭一講師、図表作成、整理その他でお世話になった大学院生長島弘修氏、卒研生伊藤正明、大石時雄、佐々木和雄の各氏、

文献をお送り下さった東北大中村維男氏以上の方々に厚く御礼申し上げる。また御助言いただいた蛭原健治講師、小林佑光助手に深謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Circular of the Bureau of Standards "Radio Instruments and Measurements", 74, 274 (1918)
- 2) 副島光積、堀内和夫：電磁気学、コロナ社、p. 242, (1967)
- 3) F. F. Martens : Ann. der Phys., 29, 959 (1909)
- 4) G. A. Campbell : Phys. Rev., 5, 452 (1915)
- 5) E. D. Charles : Proc. Instn. Elect. Engrs., 110, 1671 (1963)
- 6) 百田恒夫：電試研究報告, 503, 29 (1949)
- 7) F.W. Grover : "Inductance Calculations: Working Formulas and Tables" Dover, N.Y., p. 49 (1962)

付 錄

Circular of the Bureau of Standards¹⁾, vol. 74 には下記のような誤りがあるので指摘する。(本論文に関係ある項目のみ取り上げた。)

I. [174] 式

p. 270, [174] 式は

$$M = 0.002l \left[2.303 \log_{10} \frac{l + \sqrt{l^2 + D^2}}{D} - \sqrt{l^2 + D^2 + D} \right]$$

となっているがこれは誤りで

$$M = 0.002 \left[2.303l \log_{10} \frac{l + \sqrt{l^2 + D^2}}{D} - \sqrt{l^2 + D^2 + D} \right]$$

とすべきである。

II [182] 式

p. 273, [182] 式は

$$M = 0.002 \left[2.303(2l) \log_{10} \left\{ \frac{l + l_1 + \sqrt{(l+l_1)^2 + D^2}}{D} \right\} + 2.303(l_1 + l) \log_{10} \left\{ \frac{l + l_1 + \sqrt{(l+l_1)^2 + D^2}}{l_1 - l + \sqrt{(l_1-l)^2 + D^2}} \right\} \right. \\ \left. + \sqrt{(l_1-l)^2 + D^2} - \sqrt{(l+l_1)^2 + D^2} \right]$$

となっているが、これは誤りで

$$M = 0.002 \left[2.303(2l) \log_{10} \left\{ \frac{l_1 - l + \sqrt{(l_1-l)^2 + D^2}}{D} \right\} + 2.303(l_1 + l) \log_{10} \left\{ \frac{l + l_1 + \sqrt{(l+l_1)^2 + D^2}}{l_1 - l + \sqrt{(l_1-l)^2 + D^2}} \right\} \right. \\ \left. + \sqrt{(l_1-l)^2 + D^2} - \sqrt{(l+l_1)^2 + D^2} \right]$$

とすべきである。

(昭和45年9月1日受理)

Table I Values of Mn, formula (45)

$\chi = 0.1$																			
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0									
0.0	1.8451+0 7.8451+0 8.8893+0 9.7724+0 1.0567+1 1.1207+1 1.2030+1 1.2815+1 1.3518+1 1.3949+1 1.4399+1	2.0	1.9549+1 2.0974+1 2.1957+1 2.2051+1 2.3472+1 2.4721+1 2.5728+1 2.7028+1 2.7722+1 2.8722+1 4.4969+1	3.0	2.1957+1 2.3472+1 2.4721+1 2.5728+1 2.7028+1 2.7722+1 2.8722+1 3.0066+1 3.1227+1	4.0	3.1227+1 3.0066+1 3.1227+1 3.2382+1 2.8764+1 2.7028+1 2.7722+1 2.8722+1 2.9383+1 2.2550+1 2.4061+1	5.0	2.4061+1 2.9383+1 2.2550+1 2.3382+1 2.4061+1 2.4724+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.9579+1	6.0	1.9579+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.6495+1	7.0	1.6495+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.4240+1	8.0	1.4240+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.2517+1	9.0	1.2517+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.0935+1	10.0	1.0935+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.0053+1
1.0	1.6681+0 2.6087+0 3.2071+0 3.6596+0 4.0311+0 4.3497+0 4.6206+0 4.8825+0 5.1110+0 5.3203+0 5.5318+0	2.0	5.7472+0 6.7472+0 7.1115+0 7.4591+0 7.7521+0 8.0278+0 8.2463+0 8.5083+0 8.7632+0 8.8636+0 8.9163+0	3.0	9.0278+0 9.3136+0 9.6117+0 9.8146+0 9.9119+0 9.9947+0 1.0117+0 1.0278+0 1.0431+0 1.0555+0 1.0655+0	4.0	1.0655+0 1.0738+0 1.1739+0 1.2452+0 1.2995+0 1.3415+0 1.3748+0 1.4240+0 1.4741+0 1.5282+0 1.5824+0	5.0	1.5824+0 1.6190+1 1.6495+1 1.6799+1 1.7223+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1	6.0	1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1	7.0	1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1	8.0	1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1	9.0	1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1	10.0	1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1 1.7616+1
10.0	1.6681+0 2.6087+0 3.2071+0 3.6596+0 4.0311+0 4.3497+0 4.6206+0 4.8825+0 5.1110+0 5.3203+0 5.5318+0	15.0	5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0 5.4170+0	20.0	3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0 3.4923+0	30.0	3.8970+1 8.0745+1 1.1145+0 1.3465+0 1.5776+0 1.7775+0 1.9776+0 1.9899+0 1.9872+0 2.0625+0 2.4729+0	50.0	1.6872+1 3.7843+1 5.4451+1 6.7764+1 7.8123+1 8.6452+1 9.3265+1 9.3222+1 1.0358+0 1.0773+0 1.1513+0	70.0	1.0437+1 2.3779+1 3.4741+1 4.2111+0 4.6213+0 4.9775+0 5.2952+0 5.5832+0 5.8473+0 6.0116+0 6.2050+0	90.0	8.8693+2 2.0227+1 2.9595+1 3.7036+1 4.2981+1 4.7738+1 5.1751+1 5.5063+1 5.7633+1 6.1656+1 7.8037+1	* 6.3671+0=6.3671	# 1.0567+1=1.0567+1	X=0.2	1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1 1.0567+1		

Table 1—Continued

Y=0.4

θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	4.4410+0	5.9732+0	7.0329+0	7.9103+0	8.6923+0	9.4142+0	1.0094+1	1.1074+1	1.1715+1	1.2611+1	1.3566+1	1.4561+1	2.9096+1	3.2235+1	3.5088+1	3.7698+0	4.0097+1	4.2309+1		
2.0	3.0006+0	4.3740+0	5.2954+0	6.0355+0	6.8694+0	7.2727+0	7.8229+0	8.3387+0	8.8296+0	9.2998+0	1.3272+1	1.6419+1	1.9031+1	2.1245+1	2.3148+1	2.4779+1	2.6242+1	2.7513+1	2.8637+1	
3.0	2.2136+0	3.4711+0	4.2083+0	4.9771+0	5.5440+0	6.0555+0	6.6278+0	7.1968+0	7.7834+0	8.3428+1	1.1096+1	1.3428+1	1.5353+1	1.6896+1	1.8192+1	1.9242+1	2.0143+1	2.0911+1	2.1571+1	
4.0	1.7017+0	2.8562+0	3.6297+0	4.2375+0	4.7544+0	5.2126+0	5.5321+0	6.0198+0	6.3831+0	6.7260+0	9.4458+0	1.1386+1	1.3864+1	1.5853+1	1.7853+1	1.9396+1	1.1490+1	1.5641+1	1.6247+1	
5.0	1.3432+0	2.4011+0	3.1209+0	3.6837+0	4.1585+0	4.5767+0	4.9549+0	5.3028+0	5.6266+0	5.9303+0	8.2720+0	9.8648+0	1.1021+1	1.1892+1	1.2556+1	1.3099+1	1.3529+1	1.3882+1	1.4176+1	
6.0	1.0815+0	2.0481+0	2.7202+0	3.2451+0	3.6852+0	4.0702+0	4.5730+0	5.0242+0	5.2967+0	5.7342+0	8.5739+0	9.6066+0	1.0288+1	1.1084+1	1.1205+1	1.1524+1	1.1784+1	1.1998+1		
7.0	8.8521+1	1.7660+0	2.3947+0	2.8362+0	3.2966+0	3.6536+0	3.9723+0	4.2618+0	4.5280+0	4.7749+0	6.5828+0	7.7108+0	8.4765+0	9.0230+0	9.4222+0	9.7409+0	9.9867+0	1.0184+1	1.3347+1	
8.0	7.3479+1	1.5360+0	2.1242+0	2.5857+0	2.9701+0	3.3029+0	3.5984+0	3.8654+0	4.1095+0	4.3548+0	5.9462+0	6.9135+0	7.5519+0	7.9988+0	8.3282+0	8.5751+0	8.7698+0	8.9260+0	9.0540+0	
9.0	6.1759+1	1.3457+0	1.8459+0	2.3500+0	2.6911+0	3.0024+0	3.2777+0	3.5251+0	3.7503+0	3.9571+0	5.4037+0	6.2418+0	6.7816+0	7.1534+0	7.4227+0	7.6258+0	7.7833+0	7.9102+0	8.0133+0	
10.0	5.2481+1	1.1862+0	1.7008+0	2.1396+0	2.4495+0	2.7417+0	2.9990+0	3.2292+0	3.4378+0	3.6284+0	4.9354+0	5.6682+0	6.1503+0	6.4442+0	6.6696+0	6.8385+0	6.9695+0	7.0738+0	7.1587+0	
15.0	2.6520+1	6.8080+1	1.0468+0	1.3510+0	1.6063+0	1.8246+0	2.1300+0	2.4625+0	3.0307+0	3.7253+0	3.9714+0	4.1313+0	4.2431+0	4.3255+0	4.3887+0	4.4286+0	4.4790+0			
20.0	1.5639+1	4.2915+1	6.9081+1	9.1782+1	1.1117+1	1.2781+0	1.4221+0	1.5483+0	1.6500+0	1.7275+0	2.3506+0	2.6235+0	2.7779+0	2.8765+0	2.9447+0	2.9945+0	3.0326+0	3.0625+0	3.0867+0	
30.0	7.0971+2	2.0578+1	3.4689+1	4.7656+1	7.7760+1	8.5342+1	9.1993+1	9.7857+1	1.5184+0	1.4659+0	1.5470+0	1.5981+0	1.6331+0	1.6585+0	1.6777+0	1.6931+0	1.7052+0			
50.0	2.5005+2	7.3811+2	1.2725+1	1.7818+1	2.2468+1	2.6621+1	3.0304+1	3.3555+1	3.6457+1	3.9029+1	5.4271+1	6.1045+1	6.4814+1	6.7204+1	6.8892+1	7.0057+1	7.1698+1	7.2282+1		
70.0	1.3432+2	3.9423+2	6.7875+2	9.2929+2	1.2052+1	1.4331+1	1.6376+1	1.8206+1	1.9847+1	2.1329+1	3.0405+1	3.4679+1	3.7134+1	3.9824+1	4.1284+1	4.1783+1	4.2188+1			
90.0	1.0787+2	3.1539+2	5.4212+2	7.6079+2	9.6252+2	1.1453+1	1.3099+1	1.4579+1	1.5911+1	1.7112+1	2.4640+1	2.8271+1	3.0368+1	3.1772+1	3.2746+1	3.3469+1	3.4026+1	3.4469+1	3.4829+1	

Table I—Continued

$\gamma = 0.5$	χ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	$4.4800 + 0$	$4.9936 + 0$	$6.0370 + 0$	$6.8966 + 0$	$7.6389 + 0$	$8.2609 + 0$	$9.0210 + 0$	$9.6499 + 0$	$1.0254 + 1$	$1.0838 + 1$	$1.5975 + 1$	$2.0315 + 1$	$2.4128 + 1$	$2.7536 + 1$	$3.0615 + 1$	$3.3418 + 1$	$3.5984 + 1$	$3.8342 + 1$	$4.0521 + 1$	
2.0	$2.1165 + 0$	$3.4348 + 0$	$4.3329 + 0$	$5.0553 + 0$	$5.6830 + 0$	$6.3513 + 0$	$6.7782 + 0$	$7.2743 + 0$	$7.7460 + 0$	$8.1975 + 0$	$1.2016 + 1$	$1.5052 + 1$	$1.7580 + 1$	$2.1578 + 1$	$2.3135 + 1$	$2.4592 + 1$	$2.5831 + 1$	$2.6929 + 1$		
3.0	$1.4241 + 0$	$2.5790 + 0$	$3.8189 + 0$	$4.0221 + 0$	$4.5706 + 0$	$5.0521 + 0$	$5.9325 + 0$	$6.3287 + 0$	$6.7050 + 0$	$9.7819 + 0$	$1.2098 + 1$	$1.3793 + 1$	$1.5470 + 1$	$1.6663 + 1$	$1.7765 + 1$	$1.8567 + 1$	$1.9311 + 1$	$1.9953 + 1$		
4.0	$1.0112 + 0$	$2.0162 + 0$	$2.7419 + 0$	$3.2199 + 0$	$3.8122 + 0$	$4.2488 + 0$	$4.6460 + 0$	$5.0135 + 0$	$5.2574 + 0$	$5.6839 + 0$	$8.2541 + 0$	$1.0094 + 1$	$1.1149 + 1$	$1.1492 + 1$	$1.2594 + 1$	$1.3456 + 1$	$1.4163 + 1$	$1.4747 + 1$	$1.5239 + 1$	
5.0	$7.4653 - 1$	$1.1610 + 0$	$2.2736 + 0$	$2.8097 + 0$	$3.2480 + 0$	$3.6423 + 0$	$4.0115 + 0$	$4.3259 + 0$	$4.6303 + 0$	$4.9155 + 0$	$7.1110 + 0$	$8.6144 + 0$	$9.7089 + 0$	$10.0556 + 1$	$1.1179 + 1$	$1.1689 + 1$	$1.2102 + 1$	$1.2443 + 1$	$1.2727 + 1$	
6.0	$5.6869 - 1$	$1.3487 - 0$	$2.1454 + 0$	$2.3974 + 0$	$2.8096 + 0$	$3.1664 + 0$	$3.4892 + 0$	$3.7846 + 0$	$4.0573 + 0$	$4.3155 + 0$	$6.2195 + 0$	$7.4647 + 0$	$8.3423 + 0$	$8.9878 + 0$	$9.4783 + 0$	$9.8655 + 0$	$1.0167 + 1$	$1.0417 + 1$	$1.0624 + 1$	
7.0	$4.4471 - 1$	$9.0471 + 0$	$1.6309 + 0$	$2.0741 + 0$	$2.4509 + 0$	$2.3440 + 0$	$3.5906 + 0$	$3.3192 + 0$	$6.4937 + 0$	$6.5433 + 0$	$7.2605 + 0$	$7.7761 + 0$	$8.1615 + 0$	$8.4598 + 0$	$8.6945 + 0$	$8.8849 + 0$	$9.0421 + 0$			
8.0	$3.5556 - 1$	$9.1471 - 1$	$1.4023 + 0$	$1.8095 + 0$	$2.1565 + 0$	$2.4607 + 0$	$2.7317 + 0$	$2.9770 + 0$	$3.2014 + 0$	$3.4086 + 0$	$4.8918 + 0$	$5.7875 + 0$	$6.3835 + 0$	$6.8935 + 0$	$7.3513 + 0$	$7.5377 + 0$	$7.6879 + 0$	$7.8113 + 0$		
9.0	$2.8970 - 1$	$7.4745 - 1$	$1.2151 + 0$	$1.5693 + 0$	$1.9102 + 0$	$2.1910 + 0$	$2.4408 + 0$	$2.6661 + 0$	$2.8715 + 0$	$3.0602 + 0$	$4.3849 + 0$	$5.1568 + 0$	$5.6594 + 0$	$6.0086 + 0$	$6.2554 + 0$	$6.4568 + 0$	$6.8018 + 0$	$6.7295 + 0$		
10.0	$2.3990 - 1$	$6.6199 - 1$	$1.0600 + 0$	$1.4040 + 0$	$1.7008 + 0$	$1.9607 + 0$	$2.1916 + 0$	$2.3993 + 0$	$2.5680 + 0$	$2.7607 + 0$	$3.9499 + 0$	$4.6262 + 0$	$5.0526 + 0$	$5.3471 + 0$	$5.7210 + 0$	$5.8643 + 0$	$5.9463 + 0$	$6.0285 + 0$		
15.0	$1.1147 - 1$	$3.3758 - 1$	$5.8035 - 1$	$8.0640 - 1$	$1.0087 + 0$	$1.1883 + 0$	$1.3482 + 0$	$1.4910 + 0$	$1.6195 + 0$	$1.7357 + 0$	$2.4845 + 0$	$2.8645 + 0$	$3.0645 + 0$	$3.2412 + 0$	$3.3469 + 0$	$3.4254 + 0$	$3.4959 + 0$	$3.5729 + 0$		
20.0	$6.2555 - 2$	$9.9888 - 1$	$3.5105 - 1$	$5.0198 - 1$	$6.4146 - 1$	$7.6755 - 1$	$8.8070 - 1$	$9.8223 - 1$	$1.0152 + 0$	$1.1552 + 0$	$1.6681 + 0$	$1.9143 + 0$	$2.0568 + 0$	$2.1429 + 0$	$2.2137 + 0$	$2.2612 + 0$	$2.2978 + 0$	$2.3266 + 0$		
30.0	$2.6419 - 2$	$8.5208 - 2$	$1.5630 - 1$	$2.2039 - 1$	$2.9959 - 1$	$3.6487 - 1$	$4.2462 - 1$	$4.7889 - 1$	$5.2803 - 1$	$5.7251 - 1$	$8.0509 - 1$	$9.8045 - 1$	$1.0546 + 0$	$1.1022 + 0$	$1.1552 + 0$	$1.1927 + 0$	$1.2046 + 0$			
50.0	$8.3146 - 3$	$2.6845 - 2$	$4.9642 - 2$	$7.3554 - 2$	$9.7332 - 2$	$1.1922 - 1$	$1.4109 - 1$	$1.6073 - 1$	$1.7887 - 1$	$1.9841 - 1$	$3.6005 - 1$	$3.6170 - 1$	$3.9447 - 1$	$4.3102 - 1$	$4.4220 - 1$	$4.5081 - 1$	$4.5765 - 1$	$4.6320 - 1$		
70.0	$4.1287 - 3$	$1.3351 - 2$	$2.4453 - 2$	$3.6294 - 2$	$4.8051 - 2$	$5.9369 - 2$	$7.0083 - 2$	$8.0132 - 2$	$8.9510 - 2$	$9.8241 - 2$	$1.5872 - 1$	$1.9143 - 1$	$2.1156 - 1$	$2.2512 - 1$	$2.3487 - 1$	$2.4220 - 1$	$2.4791 - 1$	$2.5249 - 1$		
90.0	$3.2170 - 3$	$1.0297 - 2$	$1.8979 - 2$	$2.8159 - 2$	$3.7290 - 2$	$4.6102 - 2$	$5.4469 - 2$	$6.2344 - 2$	$6.9720 - 2$	$7.6612 - 2$	$1.2517 - 1$	$1.6210 - 1$	$1.8065 - 1$	$1.8903 - 1$	$1.9537 - 1$	$2.0034 - 1$	$2.0435 - 1$	$2.0765 - 1$		

Y=0.6										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0	X	0.0	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
1	0	1.31359+0	4.62323+0	5.6647+0	6.51339+0	7.95779+0	8.6038+0	9.2277+0	9.8228+0	1.0398+1
2	0	1.8161+0	3.0552+0	3.9777+0	4.6881+0	5.3049+0	5.8628+0	6.3798+0	6.8653+0	7.3287+0
3	0	1.1733+0	2.2649+0	3.0456+0	3.6708+0	4.2077+0	4.6879+0	5.1283+0	5.5357+0	5.9388+0
4	0	0.8674+1	1.7295+0	2.4255+0	2.9840+0	3.4649+0	3.8899+0	4.3644+0	4.9024+0	5.2844+0
5	0	5.8100+1	1.3571+0	1.9779+0	2.4843+0	3.1916+0	3.6478+0	4.2559+0	4.5224+0	5.0224+0
6	0	4.3430+1	1.0866+0	1.5396+0	2.0965+0	2.5964+0	3.1492+0	3.6972+0	4.3430+0	5.0766+0
7	0	3.3471+1	8.8422+1	1.3764+0	2.1512+0	2.4668+0	2.7439+0	3.2076+0	3.7439+0	4.2447+0
8	0	2.6458+1	7.3022+1	1.1675+0	1.5454+0	1.8753+0	2.1617+0	2.4163+0	2.6545+0	2.8672+0
9	0	2.1362+1	6.1032+1	9.9901+1	1.3419+0	1.6418+0	1.9066+0	2.1435+0	2.3578+0	2.5535+0
10	0	1.7558+1	5.1569+1	8.6147+1	1.11727+0	1.4473+0	1.6908+0	1.9082+0	2.1048+0	2.2837+0
11	0	7.9568+1	2.5236+1	4.5037+1	6.4346+1	8.2164+1	9.8303+1	1.1285+0	1.2598+0	1.3778+0
12	0	7.9568+1	2.5236+1	4.5037+1	6.4346+1	8.2164+1	9.8303+1	1.1285+0	1.2598+0	1.3778+0
13	0	4.3878+2	1.4331+1	2.6380+1	3.8700+1	5.0453+1	6.1355+1	7.1305+1	8.0346+1	8.8559+1
14	0	1.8093+2	5.9773+2	1.1246+1	1.6864+1	2.2128+1	2.7737+1	3.2699+1	3.7286+1	4.1502+1
15	0	5.4212+2	3.1797+2	7.2397+2	5.1378+2	6.9011+2	8.6236+2	1.0271+1	1.1829+1	1.3220+1
16	0	2.6210+3	8.6451+3	1.6315+2	2.1676+2	3.3200+2	4.1592+2	4.9696+2	5.7430+2	6.4763+2
17	0	2.0228+3	6.6584+3	1.2554+2	2.0983+2	3.2556+2	4.4298+2	5.6006+2	5.5112+2	5.3576+2

Table 1—Continued

Y=0.7

θ	X	Y	Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	2.8471+0	4.3237+0	5.3444+0	6.1829+0	6.9249+0	7.6070+0	8.2478+0	8.5563+0	9.4442+0	1.0010+1	1.5002+1	1.9235+1	2.2363+1	2.6702+1	2.9323+1	3.2077+1	3.4600+1	3.6921+1	3.9065+1	3.9065+1		
2.0	1.5734+0	2.8094+0	3.6748+0	4.3728+0	4.9786+0	5.0235+0	6.5107+0	6.9642+0	7.2933+0	1.1073+1	1.4205+1	1.6423+1	1.8528+1	2.0373+1	2.1901+1	2.3273+1	2.4482+1	2.5555+1	2.5555+1			
3.0	9.7962+1	2.0054+0	2.7619+0	3.3720+0	3.8367+0	4.3660+0	4.7964+0	5.1975+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0	5.5754+0		
4.0	6.5517+1	1.4977+0	2.1522+0	2.7044+0	3.0991+0	3.5895+0	4.3071+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0	4.6326+0		
5.0	4.6241+1	1.1524+0	1.7553+0	2.2220+0	2.6369+0	3.0063+0	3.3407+0	3.6481+0	3.9359+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0	4.2019+0		
6.0	3.4057+1	9.0710+1	1.4174+0	1.8517+0	2.2276+0	2.5623+0	2.8505+0	3.1353+0	3.3893+0	3.6262+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0	5.4065+0		
7.0	2.5958+1	7.2760+1	1.1739+0	1.5631+0	1.9029+0	2.2042+0	2.4755+0	2.7228+0	2.9507+0	3.1621+0	4.7144+0	5.6927+0	6.5638+0	6.9528+0	7.2139+0	7.5028+0	7.7286+0	7.9121+0	8.0638+0	8.0638+0		
8.0	2.0343+1	5.9310+1	9.8340+1	1.3223+0	1.6400+0	1.9116+0	2.1598+0	2.3837+0	2.5893+0	2.7793+0	4.1456+0	4.9767+0	5.5732+0	5.9305+0	6.2245+0	6.4509+0	6.6296+0	6.7740+0	6.8931+0	6.8931+0		
9.0	1.6311+1	4.9031+1	8.3201+1	1.1447+0	1.4235+0	1.6725+0	1.8967+0	2.1005+0	2.4583+0	3.6704+0	4.8748+0	5.8448+0	6.8577+0	7.5822+0	8.4278+0	9.5608+0	10.5608+0	11.5608+0	12.5608+0	13.5608+0		
10.0	1.3329+1	4.1037+1	7.1010+1	9.9046+1	1.2133+0	1.4705+0	1.6747+0	1.8660+0	2.0293+0	2.1858+0	3.2683+0	3.8687+0	4.2185+0	4.7671+0	4.9203+0	5.0403+0	5.1368+0	5.2155+0	5.2155+0			
15.0	5.9183+2	1.9414+1	3.5674+1	5.2160+1	6.1802+1	8.2248+1	9.5450+1	1.0748+0	1.1845+0	1.2847+0	1.9478+0	2.2941+0	2.5024+0	2.6449+0	2.7451+0	2.8193+0	2.8777+0	2.9241+0	2.9618+0			
20.0	3.2136+2	1.0781+1	2.0233+1	3.0448+1	4.3378+1	4.9777+1	5.8509+1	6.6548+1	7.3921+1	8.0675+1	1.2485+0	1.4710+0	1.6027+0	1.6893+0	1.7555+0	1.7959+0	1.8309+0	1.8587+0	1.8813+0			
30.0	1.2840+2	4.3556+2	8.3551+2	1.3551+2	1.2744+1	2.1744+1	2.1548+1	2.5666+1	2.9573+1	3.2957+1	3.3394+1	3.6552+1	5.9128+1	7.0621+1	7.7339+1	8.1836+1	8.4956+1	8.7267+1	9.0457+1	9.1604+1		
50.0	3.7236+3	1.2536+2	2.1228+2	3.7213+2	5.0657+2	6.4051+2	7.7092+2	8.9610+2	1.0151+1	1.1278+1	1.9447+1	2.4036+1	2.8816+1	2.6886+1	3.0192+1	3.0122+1	3.0373+1	3.2682+1	3.3210+1			
70.0	1.7631+3	5.9422+3	1.3413+2	1.7521+2	2.3895+2	3.6556+2	4.2531+2	4.8465+2	5.4036+2	9.6722+2	1.2183+1	1.3895+1	1.5023+1	1.5861+1	1.6539+1	1.7028+1	1.7478+1	1.7825+1				
90.0	1.3509+3	4.5446+3	8.7252+3	1.3398+2	1.6271+2	2.3119+2	2.7990+2	3.2671+2	3.7181+2	4.1505+2	7.4801+2	9.5472+2	1.0923+1	1.1393+1	1.2624+1	1.3185+1	1.3670+1	1.3993+1	1.4294+1			

Y=0.8

θ	X	Y	Z	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	2.6000+0	4.0550+0	5.0535+0	5.8914+0	6.1829+0	6.6233+0	7.2958+0	7.3273+0	8.5286+0	9.1062+0	9.6643+0	1.1062+1	1.4586+1	1.8767+1	2.2455+1	2.5761+1	2.8741+1	3.1483+1	3.3985+1	3.6288+1	3.8415+1	
2.0	1.3741+0	2.5642+0	3.4118+1	4.0701+0	4.5919+0	5.2225+0	6.1955+0	6.1955+0	6.6033+0	7.0663+0	7.0663+0	7.0663+0	1.0672+1	1.0672+1	1.0672+1	1.0672+1	1.0672+1	1.0672+1	1.0672+1	1.0672+1		
3.0	8.2728+1	1.7872+0	2.5184+0	3.1129+0	3.6254+0	4.0954+0	4.5045+0	4.8964+0	5.2056+0	5.6162+0	8.0485+0	1.0655+1	1.2385+1	1.2385+1	1.2385+1	1.2385+1	1.2385+1	1.2385+1	1.2385+1	1.2385+1		
4.0	5.4035+1	1.3071+0	1.9392+0	2.4625+0	2.9138+0	3.3156+0	3.6815+0	4.0201+0	4.3369+0	4.6357+0	7.0063+0	8.7105+0	1.0011+1	1.0011+1	1.0011+1	1.0011+1	1.0011+1	1.0011+1	1.0011+1	1.0011+1		
5.0	3.7515+1	9.6780+1	1.5328+0	1.9356+0	2.3969+0	3.1372+0	3.6522+0	3.9119+0	5.9155+0	7.2899+0	9.0675+0	9.2994+0	9.2994+0	9.2994+0	9.2994+0	9.2994+0	9.2994+0	9.2994+0	9.2994+0	9.2994+0		
6.0	2.7306+1	7.6516+1	1.2348+0	1.6444+0	2.2031+0	2.3225+0	2.3762+0	3.1214+0	3.3501+0	5.0705+0	6.2011+0	7.0043+0	7.5997+0	8.0556+0	8.4141+0	8.7023+0	9.0384+0	9.1350+0	9.1350+0			
7.0	2.0631+1	6.9636+1	1.0939+0	1.3725+0	1.6937+0	2.2403+0	2.4776+1	2.6364+0	2.8993+0	4.2947+0	5.3393+0	5.9323+0	6.4653+0	6.8229+0	7.1004+0	7.3215+0	7.5016+0	7.6507+0	7.6507+0			
8.0	1.6059+1	4.8892+1	8.3652+1	1.1574+0	1.4455+0	1.7042+0	2.1519+0	2.3582+0	2.3582+0	3.8420+0	4.6432+0	5.1828+0	5.5677+0	5.8342+0	6.0754+0	6.2503+0	6.3921+0	6.5091+0	6.5091+0			
9.0	1.2806+1	4.0045+1	7.0257+1	9.8471+0	1.2451+0	1.4767+0	1.8815+0	2.0587+0	2.2224+0	3.3825+0	4.0693+0	4.5621+0	4.8420+0	5.0773+0	5.2575+0	5.3992+0	5.5138+0	5.6081+0	5.6081+0			
10.0	1.0416+1	3.3248+1	5.9245+1	8.4424+1	1.0762+1	1.4424+1	1.9242+1	1.0252+0	1.1181+0	1.7419+0	2.0728+0	2.2755+0	2.4117+0	2.5092+0	2.5823+0	2.6331+0	2.6844+0	2.7215+0	2.7215+0			
15.0	4.5435+2	1.5285+1	2.8746+1	4.2848+1	5.6566+1	6.9468+1	8.1420+1	9.2421+1	1.0252+0	1.1181+0	1.7419+0	2.0728+0	2.2755+0	2.4117+0	2.5092+0	2.5823+0	2.6331+0	2.6844+0	2.7215+0			
20.0	2.4338+2	8.3247+2	1.6000+1	2.4163+1	3.2773+1	4.0389+1	4.8548+1	5.5691+1	6.2309+1	6.8422+1	11.0939+0	1.3035+0	1.4322+0	1.5161+0	1.5757+0	1.6201+0	1.6544+0	1.6817+0	1.7039+0			
30.0	9.4822+3	3.2702+2	6.3698+2	9.8310+2	1.2461+1	1.7047+1	2.0517+1	2.3823+1	2.6941+1	2.9863+1	5.0233+1	6.1020+1	6.7497+1	7.1779+1	7.4810+1	7.7065+1	7.8807+1	8.1319+1				
50.0	2.6627+3	3.1552+3	3.1552+3	3.1552+3	3.1552+3	3.1552+3	3.1552+3	3.1552+3	3.1552+3	3.1552+3	6.9504+2	8.8700+2	1.5952+1	2.0128+1	2.2787+1	2.4610+1	2.5931+1	2.6930+1	2.7712+1			
70.0	1.2409+3	4.2506+3	8.2869+3	1.2889+2	1.7767+2	2.2740+2	3.2545+2	4.1814+2	7.0706+2	1.0046+1	1.1571+1	1.2659+1	1.3462+1	1.4085+1	1.4561+1	1.4984+1	1.5318+1	1.5318+1				
90.0	9.4510+4	3.2545+4	6.3043+3	9.8049+3	1.3135+3	1.3520+2	1.7131+2	2.1099+2	2.4820+2	2.8442+2	3.1352+2	6.0018+2	7.8270+2	9.9745+2	1.0051+1	1.1179+1	1.1602+1	1.1948+1	1.2235+1			

Table I—Continued

χ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	2.3853+0	3.8175+0	4.8127+0	5.3310+0	6.3533+0	7.0163+0	7.6388+0	8.2315+0	8.6008+0	9.3511+0	1.4206+1	1.8337+1	2.1984+1	2.5237+1	2.8222+1	3.3408+1	3.5693+1	3.7804+1	
2.0	1.2080+0	2.2511+0	3.1800+0	3.8526+0	4.4357+0	5.9644+0	5.4553+0	5.9124+0	6.3489+0	6.7657+0	1.0307+1	1.3140+1	1.5513+1	1.7537+1	1.9286+1	2.0810+1	2.2347+1	2.3328+1	
3.0	7.0571-1	1.6014+0	2.3087+0	2.8853+0	3.3859+0	4.2445+0	4.6274+0	4.9882+0	5.3398+0	8.1357+0	1.0260+1	1.1956+1	1.3341+1	1.4489+1	1.5456+1	1.6273+1	1.6974+1	1.7580+1	
4.0	4.5174-1	1.1484+0	1.7480+0	2.2521+0	2.6895+0	3.0799+0	3.4356+0	3.7652+0	4.0735+0	4.3642+0	6.6725+0	8.3343+0	9.6048+0	1.0604+1	1.1406+1	1.2062+1	1.2604+1	1.3447+1	
5.0	3.0959-1	8.5368-1	1.36318+0	1.8025+0	2.1883+0	2.52528+0	2.8458+0	3.12442+0	3.4026+0	3.6513+0	5.9808+0	6.9357+0	7.9166+0	8.6662+0	9.2230+0	9.7223+0	1.0104+1	1.0687+1	
6.0	2.2306-1	6.5282-1	1.0829+0	1.4681+0	1.8098+0	2.1159+0	2.3939+0	2.6089+0	2.8854+0	3.1062+0	4.7692+0	5.8647+0	6.6449+0	7.2249+0	7.6700+0	8.0286+0	8.3034+0	8.7285+0	
7.0	1.6735-1	5.1112-1	8.7544-1	1.2122+0	1.5152+0	1.7882+0	2.0363+0	2.2657+0	2.4738+0	2.6691+0	4.1094+0	5.0250+0	6.1162+0	6.6556+0	6.7358+0	6.9524+0	7.1291+0	7.2788+0	
8.0	1.2954-1	4.0826-1	7.1768-1	1.0121+0	1.2811+0	1.5252+0	1.7474+0	1.9510+0	2.1387+0	2.3128+0	3.5723+0	4.3452+0	4.8676+0	5.2417+0	5.5212+0	5.7371+0	6.0084+0	6.0475+0	
9.0	1.0282-1	3.3173-1	5.9555-1	8.5323-1	1.0922+0	1.3107+0	1.5103+0	1.6932+0	1.8617+0	2.0116+0	3.1282+0	3.7899+0	4.2283+0	4.5380+0	4.7672+0	4.9431+0	5.0821+0	5.1945+0	
10.0	8.3303-2	2.7554-1	4.9953-1	7.2555-1	9.3781-1	1.1336+0	1.4780+0	1.6297+0	1.7699+0	2.7559+0	3.7559+0	3.7019+0	3.9622+0	4.1540+0	4.4153+0	4.5081+0	4.5844+0	4.7512+0	
15.0	3.5757-2	1.2286-1	2.2505-1	3.5604-1	4.7638-1	5.9152-1	6.9958-1	8.0093-1	8.9703-1	9.7902-1	1.1658+0	1.8821+0	2.0775+0	2.2096+0	2.3716+0	2.4716+0	2.5126+0		
20.0	1.8880-2	6.5652-2	1.2812-1	1.9779-1	2.6930-1	3.3951-1	4.0675-1	4.7020-1	5.2058-1	5.8490-1	9.6484-1	1.1660+0	1.2880+0	1.3569+0	1.4274+0	1.4707+0	1.5044+0	1.5312+0	
30.0	1.1979-3	2.5156-2	4.9612-2	7.7659-2	1.0716-1	1.3697-1	1.6625-1	1.9449-1	2.2144-1	2.4697-1	4.3090-1	5.3213-1	5.9400-1	6.7535-1	6.6478-1	6.8678-1	7.0383-1	7.2851-1	
50.0	1.9666-3	6.8926-3	1.3534-2	2.1267-2	2.9557-2	3.8972-2	4.6596-2	5.4955-2	6.3515-2	7.1037-2	1.3275-1	1.7082-1	1.9565-1	2.1292-1	2.2556-1	2.3518-1	2.4274-1	2.4884-1	
70.0	0.9425-4	3.1426-3	6.2018-3	9.7493-3	1.3567-2	2.1485-2	2.7511-2	3.0926-2	3.3056-2	6.3778-2	8.4127-2	9.8101-2	1.0819-2	1.1579-1	1.2170-1	1.2644-1	1.3030-1	1.3352-1	
90.0	6.8621-4	2.3627-3	4.7002-3	7.3889-3	1.3285-2	1.5308-2	1.9315-2	2.2372-2	2.5159-2	4.9048-2	6.5252-2	7.6601-2	8.4919-2	9.1226-2	9.6235-2	1.0024-1	1.0544-1	1.0630-1	

Y=0.9

χ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	2.1968+0	3.6052+0	4.5859+0	5.2959+0	6.1025+0	6.7625+0	7.3764+0	7.9407+0	8.5220+0	9.0645+0	1.12854+1	1.7936+1	2.1544+1	2.4785+1	2.7723+1	3.0404+1	3.2865+1	3.5131+1	3.7227+1
2.0	1.0654+0	2.1637+0	2.9777+0	3.6335+0	4.2070+0	4.7251+0	5.2048+0	5.5957+0	6.0341+0	6.4941+0	9.9708+0	1.12757+1	1.5092+1	1.7088+1	1.8813+1	2.0316+1	2.1637+1	2.2804+1	2.3840+1
3.0	6.0750-1	1.4416-0	2.1124+0	3.8831+0	3.1712+0	3.6089+0	4.0105+0	4.3847+0	4.7373+0	5.0722+0	7.8148+0	9.2850+0	1.1557+1	1.2917+1	1.4046+1	1.4995+1	1.5801+1	1.6492+1	1.7089+1
4.0	3.8222-1	1.0149+0	1.5823+0	2.3673+0	2.4949+0	2.8939+0	3.2160+0	3.5365+0	4.1195+0	6.3675+0	7.9881+0	9.2297+0	1.0207+1	1.0994+1	1.1637+1	1.2170+1	1.2618+1	1.3300+1	
5.0	2.5888-1	7.4318-1	1.2159+0	1.6347+0	2.0505+0	2.3373+0	2.9192+0	3.1793+0	3.4233+0	5.3092+0	6.6307+0	7.5551+0	8.2968+0	8.8706+0	9.3304+0	9.7057+0	1.0017+1	1.0278+1	
6.0	1.8851-5	5.6143-1	9.5558-1	1.3567+0	1.6451+0	1.9346+0	2.2011+0	2.4755+0	2.6752+0	2.8386+0	4.4964+0	5.5246+0	6.3164+0	6.8837+0	7.3164+0	7.9367+0	8.1643+0	8.3554+0	
7.0	1.3891-1	4.3522-1	7.6335-1	1.0761+0	1.3614+0	1.6207+0	2.0754+0	2.2770+0	2.4547+0	3.8526+0	4.7359+0	5.3496+0	5.7978+0	6.1375+0	6.4029+0	6.6352+0	6.7887+0	6.9358+0	
8.0	1.0639-1	3.4479-1	6.2041-1	8.3016-1	1.1409+0	1.3708+0	1.5815+0	1.7754+0	2.1054+0	3.2111+0	3.3310+0	4.0766+0	4.5827+0	5.2183+0	5.4239+0	5.5918+0	5.7343+0	5.8473+0	
9.0	6.4109-2	2.7821-1	5.1057-1	7.4471-1	9.5459-1	1.1687+0	1.3566+0	1.5247+0	1.6349+0	1.8362+0	2.3016+0	2.5339+0	3.3632+0	4.2640+0	4.4874+0	4.6549+0	4.9058+0	4.9969+0	
10.0	6.7897-2	2.2803-1	4.2511-1	6.2975-1	8.2184-1	1.0352+0	1.1711+0	1.3261+0	1.4649+0	1.6162+0	2.0435+0	2.3045+0	3.0945+0	3.4553+0	3.7084+0	3.8349+0	4.0378+0	4.1505+0	
15.0	2.4871-2	1.0022-1	1.9459-1	2.9834-1	4.0456-1	5.0731-1	6.2413-1	6.9657-1	7.8207-1	8.6152-1	1.4136+0	1.7161+1	1.9046+0	2.0328+0	2.1253+0	2.1951+0	2.2496+0	2.2934+0	
20.0	1.4964-2	5.2693-2	1.0411-1	1.6259-1	2.2368-1	2.8460-1	3.4371-1	4.0912-1	5.0347-1	5.5801-1	1.5580-1	1.9472+0	2.1435+0	2.3000+0	2.3424+0	2.4018+0	1.4423+0	1.4423+0	
30.0	5.5884-3	1.9745-2	3.9348-2	6.2150-2	8.6582-2	1.1157-1	1.3642-1	1.6067-1	2.0569-1	3.7271-1	4.6771-1	5.2631-1	5.6669-1	5.9229-1	6.1676-1	6.3345-1	6.4467-1	6.5770-1	
50.0	1.4917-3	5.2561-3	1.0486-2	1.6627-2	2.3296-2	3.0235-2	4.4239-2	5.1099-2	5.7781-2	1.1185-1	1.4661-1	1.6981-1	1.8617-1	2.0753-1	2.1845-1	2.2077-1	2.2566-1	2.3166+0	
70.0	6.7879-4	2.3869-3	4.7590-3	7.5697-3	1.0592-2	1.3771-2	1.7009-2	2.0250-2	2.3458-2	2.6696-2	5.3121-2	7.1377-2	8.4213-2	9.3622-2	1.0078-1	1.0640-1	1.1092-1	1.1463-1	
90.0	5.1342-4	1.8041-3	3.5960-3	5.7051-3	8.0067-3	1.0415-2	1.2872-2	1.5337-2	1.7761-2	2.0155-2	4.0698-2	5.5510-2	6.5513-2	8.3853-2	8.7665-2	9.0817-2	9.3466-2	9.3466-2	

Y=1.0

Table 1—Continued

θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	1.0999+0	2.2483+0	3.1117+0	3.8263+0	4.4565+0	5.0325+0	5.5741+0	6.0881+0	6.3817+0	7.0567+0	7.1291+1	1.4240+1	1.8197+1	2.1143+1	2.3829+1	2.6293+1	2.8561+1	3.0658+1	3.2601+1	
2.0	3.9734+1	1.9743+0	1.6925+0	2.2397+0	2.7067+0	3.1403+0	3.5435+0	3.9233+0	4.2822+0	4.6268+0	7.5591+0	9.9344+0	1.1945+1	1.3678+1	1.5187+1	1.6510+1	1.7679+1	1.8717+1	1.9643+1	
3.0	1.9320+1	6.0151+1	1.0397+0	1.4497+0	1.8247+0	2.1693+0	2.4890+0	2.7887+0	3.0720+0	3.3424+0	5.5594+0	7.2603+0	8.6356+0	9.7727+0	1.1722+1	1.1555+1	1.2226+1	1.2827+1	1.3349+1	
4.0	1.1123+1	3.7284+1	6.8448+1	9.9729+1	1.2946+0	1.5715+0	1.8310+0	2.0746+0	2.3043+0	2.5252+0	4.2700+0	5.5681+0	6.5415+0	7.3357+0	7.9833+0	8.5196+0	8.9694+0	9.3524+0	9.6308+0	
5.0	7.1083+2	2.4764+1	4.7395+1	7.1743+1	9.4877+1	1.1734+0	1.3859+0	1.5663+0	1.7756+0	1.9550+0	3.3667+0	4.3603+0	5.1069+0	5.6883+0	6.1526+0	6.5307+0	6.8439+0	7.1370+0	7.3359+0	
6.0	4.8694+2	1.7368+1	3.4137+1	5.2825+1	7.1356+1	8.9609+1	1.0708+0	1.2369+0	1.3944+0	1.5437+0	2.7063+0	3.4973+0	4.0767+0	4.5288+0	4.8666+0	5.1461+0	5.3754+0	5.5671+0	5.7290+0	
7.0	3.5037+2	1.2681+1	2.5377+1	3.9808+1	5.4739+1	6.9682+1	8.4114+1	9.7945+1	1.1112+0	1.2355+0	2.2065+0	2.8566+0	3.3124+0	3.6933+0	3.9288+0	4.1438+0	4.4719+0	4.4665+0	4.5869+0	
8.0	2.6147+2	9.5540+2	1.9356+1	3.0158+1	4.2842+1	5.5034+1	6.7000+1	7.8366+1	8.9651+1	1.0022+0	1.8206+0	2.3546+0	2.7731+0	3.0104+0	3.2255+0	3.5359+0	3.8648+0	3.6185+0	3.7444+0	
9.0	2.0071+2	7.3805+2	1.5087+1	2.4201+1	3.4020+1	4.4062+1	5.1028+1	6.3741+1	7.2106+1	8.2079+1	1.5117+0	1.9671+0	2.2799+0	2.5098+0	2.5856+0	2.8224+0	2.9362+0	3.0285+0	3.1058+0	
10.0	1.5756+2	5.8196+2	1.1197+2	1.9344+1	2.7398+1	3.5711+1	4.4052+1	5.2224+1	6.0191+1	6.7840+1	1.2763+0	1.6597+0	1.9229+0	2.1166+0	2.2631+0	2.3782+0	2.4703+0	2.5471+0	2.6109+0	
15.0	5.8976+3	2.1970+2	4.5862+2	7.5441+2	1.0893+2	1.4476+1	1.8190+1	2.1347+1	2.5684+1	2.9359+1	5.9705+1	7.9557+1	9.3026+1	1.0268+0	1.0993+0	1.1556+0	1.2006+0	1.2574+0	1.2680+0	
20.0	2.7927+3	4.0421+2	<1.1848+2	3.6161+2	5.2587+2	7.0461+2	8.9325+2	1.0869+1	1.2828+1	1.4785+1	3.1870+1	4.3675+1	5.1817+1	5.7630+1	6.2078+1	6.5491+1	6.8213+1	7.0433+1	7.2278+1	
30.0	9.1940+4	3.3516+3	7.2110+3	1.1983+2	1.7520+2	2.3635+2	3.0159+2	3.6977+2	4.3981+2	5.1085+2	1.1812+1	1.5949+1	2.0701+1	2.3491+1	2.5642+1	2.7279+1	2.8645+1	2.9749+1	3.0669+1	
50.0	2.1956+4	8.1912+4	1.7225+3	2.8678+3	4.2042+3	5.6901+3	7.2912+2	8.9197+3	1.0732+2	1.2529+2	3.0620+2	4.6095+2	5.8430+2	8.8230+2	7.6081+2	8.2489+2	8.7793+2	9.2244+2	9.6027+2	
70.0	9.5736+5	3.5730+4	7.5119+4	1.2511+3	1.8367+3	2.4878+3	3.1916+3	3.9260+3	4.7112+3	5.5092+3	1.3726+2	2.1075+2	2.7188+2	3.2223+2	3.3355+2	3.3989+2	4.2845+2	4.5381+2	4.7571+2	
90.0	7.1563+5	2.6682+4	5.6121+4	9.3690+4	1.3718+3	1.8590+3	2.2357+3	2.9432+3	3.5244+3	4.1232+3	1.0331+2	1.5961+2	2.4465+2	3.1365+2	3.7318+2	3.5524+2	3.7048+2	3.7183+2	3.7104+2	
θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	6.3681+1	1.5389+0	2.2901+0	2.9271+0	3.4922+0	4.0039+0	4.4947+0	5.0955+0	5.5974+0	5.8247+0	9.6229+0	1.2919+1	1.5882+1	2.1044+1	2.3316+1	2.5414+1	2.7359+1	2.9166+1	2.9166+1	
2.0	1.9607+1	6.1618+1	1.0712+0	1.5072+0	1.8503+0	1.8955+0	2.0533+0	2.5239+0	3.0526+0	3.5226+0	6.0431+0	8.0324+0	9.8422+0	1.1353+1	1.2667+1	1.3853+1	1.4898+1	1.5825+1	1.6656+1	
3.0	9.9397+2	3.0992+1	5.8765+1	8.7766+1	1.1570+1	1.4277+0	1.9240+0	2.1540+0	2.3758+0	2.5107+0	4.1387+0	5.1010+0	6.7631+0	7.7245+0	8.5341+0	9.2341+0	9.8350+0	1.0358+1	1.0817+1	
4.0	4.9503+2	1.7907+1	3.5587+1	5.5337+1	7.5565+1	9.5471+1	1.1471+0	1.3531+0	1.5983+0	1.6775+0	3.0608+0	4.0882+0	4.8971+0	5.5522+0	6.0930+0	6.4641+0	6.9303+0	7.5459+0	7.5459+0	
5.0	3.0669+2	1.1331+1	2.3122+1	3.6308+1	5.1575+1	6.6026+1	8.1078+1	9.5325+1	1.0937+1	1.2231+0	2.3009+0	3.0783+0	3.6756+0	4.1451+0	4.5275+0	4.8434+0	5.1084+0	5.3335+0	5.5271+0	
6.0	2.0432+2	7.6363+2	1.5812+1	2.5703+1	3.5650+1	4.7695+1	6.6026+1	8.1078+1	9.1294+1	1.0766+0	2.3764+0	2.8313+0	3.1858+0	3.4656+0	3.7017+0	3.8949+0	4.0581+0	4.1976+0	4.2792+0	
7.0	1.4324+2	5.5903+2	1.1286+1	2.5532+1	3.6619+1	5.1515+1	6.2658+1	7.5387+1	8.1298+1	9.1298+1	1.3863+0	1.8718+0	2.2504+0	2.7523+0	2.9506+0	3.0501+0	3.1738+0	3.2792+0	3.4477+1	
8.0	1.0431+2	3.9421+2	8.3084+2	1.2748+1	1.9912+1	2.6513+1	3.5333+1	4.0220+1	4.7060+1	5.3782+1	1.0310+0	1.4996+0	1.7894+0	2.0105+0	2.1846+0	2.3252+0	2.4411+0	2.5383+0	2.6208+0	
9.0	7.8272+3	2.9659+2	6.2787+2	1.0447+1	1.5425+1	2.0596+1	3.1299+1	3.6812+1	4.2226+1	5.8971+1	1.2120+0	1.4528+0	1.7813+0	2.1034+0	2.4224+0	2.7027+0	2.9724+0	3.1344+0	3.1344+0	
10.0	6.0168+3	2.2840+2	4.8503+2	8.1033+2	1.1861+1	1.5967+1	2.0293+1	2.4713+1	2.9215+1	3.3579+1	7.2622+1	1.0034+0	1.2242+0	1.3556+0	1.4728+0	1.5686+0	1.6453+0	1.7111+0	1.7660+0	
15.0	2.0774+3	7.9135+3	1.6922+2	2.8544+2	4.2264+2	5.7620+2	7.4205+2	9.1671+2	1.0972+1	1.2813+1	3.0327+1	4.3793+1	5.3714+1	6.1119+1	7.1635+1	7.5409+1	7.8543+1	8.1186+1	8.1186+1	
20.0	9.3728+4	3.1725+3	7.6528+3	1.2956+2	1.9265+2	2.6395+2	3.4181+2	4.2476+2	5.1157+2	6.0114+2	1.5064+1	2.2582+1	2.8344+1	3.2773+1	3.6243+1	3.9023+1	4.1293+1	4.2180+0	4.4771+1	
30.0	2.9406+4	1.1213+3	2.4051+3	4.0813+3	6.0873+3	8.2715+3	1.0887+2	1.3594+2	1.6456+2	1.9442+2	5.1609+2	6.1187+2	8.0558+1	1.12529+1	1.4245+1	1.5432+1	1.6517+1	1.7429+1	1.8205+1	
50.0	6.8040+5	2.5946+4	5.5710+4	9.4660+4	1.4122+3	1.9475+3	2.5387+3	3.1784+3	3.8590+3	4.5737+3	1.2617+2	2.0657+2	2.7827+2	3.4010+2	3.9088+2	4.3826+2	4.7724+2	5.1100+2	5.4046+2	
70.0	2.9391+5	1.1206+4	2.4069+4	4.0885+4	6.1106+4	8.1252+4	1.0996+3	1.3770+3	1.6733+3	1.9891+3	5.5442+3	9.2070+3	1.2578+2	1.5557+2	2.0521+2	2.3556+2	2.4355+2	2.5494+2	2.5494+2	
90.0	2.1883+5	8.3460+5	1.7923+4	3.0451+4	4.5517+4	6.2766+4	8.1863+4	1.1895+4	1.2063+3	1.2474+3	1.4603+3	4.1483+3	6.9159+3	1.1802+2	1.3492+2	1.5165+2	1.5165+2	1.5165+2	1.5165+2	

Table I—Continued

Y=4.0											
θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.0	4.0540-1	1.1068+0	1.07543+0	2.3226+0	2.8326+0	3.3016+0	3.7411+0	4.1587+0	4.5994+0	4.9466+0	8.3906+0
2.0	1.1586-1	3.8781-1	7.2141-1	1.0630+1	1.3859+0	1.6942+0	2.2635+0	2.5888+0	2.7835+0	4.9665+0	6.7510+0
3.0	4.9920-2	1.8189-1	3.6354-1	5.6787-1	7.7835-1	9.8638-1	1.1888+0	1.3839+0	1.5717+0	1.7522+0	3.2720+0
4.0	2.6842-2	1.0043-1	2.0764-1	3.3550-1	4.7397-1	6.1632-1	7.5847-1	8.9817-1	1.0342+0	1.1665+0	2.2753+0
5.0	1.6197-2	6.1366-2	1.2911-1	2.11272-1	3.0632-1	4.20764-1	5.0657-1	5.7458-1	6.0800-1	8.0612-1	1.6403+0
6.0	1.0533-2	4.0169-2	8.5365-2	1.4251-1	2.0748-1	2.7791-1	3.5128-1	4.2588-1	5.0052-1	5.7436-1	1.2159+0
7.0	7.2247-3	2.7655-2	5.9129-2	9.9324-2	1.4601-1	1.9724-1	2.5139-1	3.0717-1	3.6361-1	4.2000-1	9.2220-1
8.0	5.1601-3	1.9798-2	4.2495-2	7.1744-2	1.0608-1	1.4418-1	1.8489-1	2.2728-1	2.7059-1	3.1442+0	7.1318-1
9.0	3.8062-3	1.4624-2	3.1473-2	5.3325-2	7.9175-2	1.0809-1	1.3927-1	1.7200-1	2.0570-1	2.3992-1	5.6095+1
10.0	2.8827-3	1.1087-2	2.3504-2	4.0604-2	6.0472-2	8.2843-2	1.0712-1	1.3278-1	1.5938-1	1.8656-1	4.4785-1
15.0	9.4757-4	3.6516-3	7.9061-3	1.3510-2	2.0274-2	2.8018-2	3.6577-2	4.5802-2	5.5557-2	6.5723-2	1.7291-1
20.0	4.1712-4	1.6082-3	3.4866-3	5.9710-3	8.9849-3	1.2457-2	1.6325-2	2.0526-2	2.5009-2	2.9742-2	8.2115-2
30.0	1.2813-4	4.9419-4	1.0724-3	1.8392-3	2.7731-3	3.8545-3	5.0555-3	6.3898-3	7.8127-3	9.3207-3	1.6105-2
50.0	2.9281-5	1.1294-4	2.4420-4	4.2085-4	6.3562-4	8.8407-4	1.1636-3	1.4703-3	1.8013-3	2.1535-3	6.3918-3
70.0	1.2554-5	4.3617-5	1.0555-4	1.8119-4	2.7555-4	3.8086-4	5.0352-4	6.3406-4	7.7720-4	9.2976-4	2.7803-3
90.0	9.3737-6	3.6157-5	7.5518-5	1.3479-4	2.0354-4	2.8341-4	3.7323-4	4.7194-4	5.7857-4	6.9229-4	2.0787-3

Y=5.0											
θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1.0	2.7671-1	8.2451-1	1.0757-1	1.3084-0	1.8850+0	2.3464+0	3.1746+0	4.2734+0	5.1749+0	6.1949+1	1.7055+1
2.0	7.3181-2	2.6106-1	5.0842-1	7.5771-1	1.0429+0	1.3023+0	1.5516+0	1.7909+0	2.0208+0	2.2424+0	4.1488+0
3.0	3.1102-2	1.6371-1	2.4003-1	3.8625-1	5.4421-1	7.0550-1	8.6611-1	1.0237+0	1.1773+0	1.3265+0	2.6036+0
4.0	1.6288-2	6.2037-2	1.3114-1	2.1169-1	3.1556-1	4.1629-1	5.2179-1	6.2783-1	7.3298-1	8.3637-1	1.7350+0
5.0	9.6004-3	3.6859-2	7.8877-2	1.3240-1	2.6190-1	3.3295-1	4.0580-1	4.7925-1	5.5241-1	6.2021+0	1.7116+0
6.0	6.1162-3	2.3580-2	5.0802-2	8.6008-2	1.2431-1	1.7344-1	2.2265-1	2.7391-1	3.2829-1	3.7667-1	1.5477+0
7.0	4.1223-3	1.5931-2	3.4462-2	5.8656-2	8.7445-2	1.1981-1	1.5486-1	1.9181-1	2.3000-1	2.6889-1	6.4021-1
8.0	2.9016-3	1.1229-2	2.4255-2	4.1601-2	6.2281-2	8.5738-2	1.1136-1	1.3862-1	1.6705-1	1.9626-1	4.8403-1
9.0	2.1144-3	8.1910-3	1.7796-2	3.0472-2	4.5756-2	6.2025-2	8.2395-2	1.0295-1	1.2054-1	1.4244-1	7.1444-1
10.0	1.5853-3	6.1454-3	1.3568-2	2.2931-2	3.4508-2	4.7786-2	6.2468-2	7.8284-2	9.4387-2	1.1236-1	2.9341-1
15.0	5.0564-4	1.9626-3	4.2818-3	7.3755-3	1.1158-2	1.5550-2	2.0473-2	2.5856-2	3.1736-2	1.0701-1	1.7419-1
20.0	2.1961-4	8.5276-4	1.8622-3	3.2124-3	4.8656-3	6.8021-3	8.9799-3	1.11375-2	1.3961-2	1.6715-2	4.9363-2
30.0	6.6750-5	2.5920-4	5.6641-4	9.7812-4	1.4848-3	2.0776-3	2.4074-3	2.8295-2	3.1029-2	3.5147-3	4.9375-2
50.0	1.5161-5	5.8882-5	1.2870-4	2.2238-4	3.5782-4	4.7314-4	6.2656-4	7.9648-4	8.0807-4	1.5945-3	2.0239-4
70.0	6.5134-6	2.5923-5	5.5306-5	9.5567-5	1.4519-4	2.0339-4	2.6947-4	3.4265-4	4.2239-4	5.0807-4	1.5945-3
90.0	4.8748-6	1.9838-5	4.1143-5	7.1109-5	1.0801-4	1.5127-4	2.0015-4	2.5489-4	3.1423-4	3.7803-4	1.1883-3

Table I—Continued

Y=6.0

θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	1.9904-1	6.3159-1	11.1048+0	1.5545+0	1.9722+0	2.3562+0	2.7298+0	3.0800+0	3.4162+0	3.7412+0	6.5324+0	9.1638+0	1.1464+1	1.3578+1	1.5532+1	1.7745+1	1.9032+1	1.9204+1	2.0606+1	2.2076+1
2.0	2.0	5.0345+2	1.8480+1	3.7152+1	5.8305+1	8.0227+1	1.1440+0	1.2234+0	1.4400+0	1.6399+0	1.8355+0	3.5124+0	4.8932+0	6.0983+0	7.1531+0	8.0238+0	8.9270+0	9.6793+0	1.0358+1	1.0974+1
3.0	3.0	2.8088+2	7.9097+2	1.6643+1	2.7366+1	3.9225+1	5.1844+1	6.4623+1	7.7385+1	8.9985+1	1.0224+0	2.1047+0	2.9638+0	4.8368+0	4.8368+0	5.3037+0	5.7121+0	6.0761+0	6.4000+0	6.4000+0
4.0	4.0	1.0636+2	4.0942+2	8.7751+2	1.4742+1	2.1633+1	2.9170+1	3.7079+1	4.5187+1	5.3559+1	6.1505+1	1.3496+0	1.9232+0	2.4100+0	2.6579+0	3.1446+0	3.1375+0	3.6910+0	3.9136+0	4.1105+0
5.0	5.0	6.1415+3	2.3771+2	5.1405+2	8.7329+2	1.2979+1	1.7713+1	2.2807+1	2.8126+1	3.9103+1	9.097+1	1.3261+0	1.6621+0	1.9593+0	2.1721+0	2.3713+0	2.5471+0	2.6930+0	2.8229+0	2.8229+0
6.0	6.0	3.8472+3	1.4334+2	3.2422+2	5.5484+2	8.3081+2	1.1432+1	1.4837+1	1.8448+1	2.2203+1	2.6038+1	6.3659+1	9.4563+1	1.1957+0	1.5998+0	1.5702+0	1.7174+0	1.8358+0	1.9468+0	2.0415+0
7.0	7.0	2.5582+3	9.9472+3	2.1167+2	3.2111+2	5.5984+2	7.7141+2	1.0107+1	1.2640+1	1.5301+1	1.8053+1	4.5994+1	6.9761+1	8.8939+1	1.0459+0	1.1761+0	1.2861+0	1.3893+0	1.4619+0	1.5533+0
8.0	8.0	1.7814+3	6.9538+3	1.5159+2	2.6055+2	3.9366+2	5.4601+2	7.1545+2	8.9845+2	1.0921+1	1.2941+1	3.1446+1	5.2781+1	6.7954+1	8.0352+1	9.0641+1	1.1312+0	1.1871+0	1.1871+0	1.1871+0
9.0	9.0	1.2871+3	5.0431+3	1.0968+2	1.8896+2	3.1791+2	5.2290+2	6.5386+2	8.329+2	9.5454+2	2.5941+1	4.3617+1	5.2080+1	6.3134+1	7.1447+1	7.8501+1	8.4454+1	8.9667+1	9.4176+1	9.4176+1
10.0	10.0	9.5851+4	3.7349+3	8.1729+3	1.4109+2	2.1378+2	2.9817+2	3.3267+2	4.9579+2	6.0613+2	7.2239+2	2.0105+1	3.2156+1	4.2232+1	5.0539+1	5.7444+1	6.3258+1	6.8225+1	7.2490+1	7.5215+1
15.0	15.0	2.9987+4	1.1697+3	2.5620+3	4.4419+3	6.7575+3	9.4701+3	1.2539+2	1.5928+2	2.0599+2	2.3518+2	7.0443+2	1.1968+1	1.6402+1	2.0213+1	2.3454+1	2.6217+1	2.8568+1	3.0638+1	3.2427+1
20.0	20.0	1.9221+4	5.0415+4	1.1063+3	1.9179+3	2.9219+3	4.1020+3	5.4427+3	6.9293+3	8.2478+3	1.0285+2	3.1643+2	5.5961+2	7.5398+2	9.5932+2	1.1765+1	1.3337+1	1.4756+1	1.5903+1	1.6955+1
30.0	30.0	3.9014+5	1.5223+4	3.3434+4	5.8008+4	8.8467+4	1.2435+3	1.6524+3	2.1107+3	2.6046+3	3.2045+3	9.9938+3	1.6142+2	2.6354+2	3.4211+2	4.1339+2	5.3715+2	6.3947+2	6.3942+2	
50.0	50.0	8.8323+6	3.4475+5	7.5709+5	1.3141+4	2.0051+4	2.8204+4	3.7508+4	4.7878+4	5.2034+4	7.1502+4	2.3107+3	4.2799+3	6.3626+3	8.4261+3	1.0404+2	1.2266+2	1.4003+2	1.5615+2	1.7105+2
70.0	70.0	3.7894+6	1.4787+5	3.2505+5	5.6418+5	8.6094+5	1.2113+4	1.6113+4	2.0571+4	2.5456+4	3.0173+4	9.9793+4	1.8527+3	2.7842+3	3.7145+3	4.6208+3	5.4882+3	6.3099+3	7.0839+3	7.8104+3
90.0	90.0	2.3550+6	1.1025+5	2.4186+5	4.1943+5	6.4033+5	9.0069+5	1.1979+4	1.5239+4	1.9931+4	2.2860+4	7.4311+4	1.3572+3	2.0511+3	2.7824+3	3.4569+3	4.1293+3	4.7530+3	5.3529+3	5.9142+3

Y=7.0

θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	1.0	1.4907+1	4.9521+1	8.9906+1	1.2980+0	1.6760+0	2.0732+0	2.6929+0	3.0030+0	3.3028+0	5.9713+0	8.3104+0	1.0440+1	1.2403+1	1.4220+1	1.5910+1	1.7486+1	1.8957+1	2.0235+1	
2.0	2.0	6.3449+2	1.3594+1	2.7948+1	4.4817+1	6.1726+0	1.3468+0	1.5164+0	2.0011+0	2.3042+0	6.2446+0	5.3042+0	6.2446+0	7.0920+0	7.5457+0	9.5264+0	9.1434+0	9.7047+0	9.7047+0	
3.0	3.0	1.4636+2	5.6207+2	1.1986+1	2.2001+1	2.9143+1	3.8983+1	4.9199+1	5.9565+1	6.9932+1	8.1204+1	1.7233+0	2.4717+0	3.1000+0	3.6332+0	4.1281+0	4.5222+0	4.8859+0	5.2102+0	5.5018+0
4.0	4.0	7.3195+3	2.8369+2	6.1364+2	1.0418+1	1.5467+1	2.1082+1	2.7089+1	3.3391+1	3.9752+1	4.6215+1	1.0677+0	1.5632+0	2.0718+0	2.5162+0	2.6211+0	2.8673+0	3.0916+0	3.2898+0	3.4466+0
5.0	5.0	4.1526+3	1.6161+2	3.5194+2	6.0280+2	9.0395+2	1.2453+1	1.6179+1	2.0123+1	2.4248+1	2.8466+1	6.9955+1	1.2078+0	1.3533+0	1.5716+0	1.7738+0	1.9479+0	2.0994+0	2.3235+0	2.5303+0
6.0	6.0	2.5663+3	1.0009+2	2.1877+2	3.7657+2	5.6180+2	7.8777+2	1.0305+1	1.2916+1	1.5667+1	1.8520+1	4.7895+1	7.3428+1	9.4439+1	1.1889+0	1.2663+0	1.3935+0	1.5019+0	1.5916+0	1.6821+0
7.0	7.0	1.6890+3	5.5955+3	1.4447+2	2.4945+2	3.7770+2	5.2657+2	6.4137+2	8.7076+2	1.1361+2	1.2612+1	3.3993+1	5.2301+1	6.9351+1	8.2893+1	9.3793+1	1.0352+0	1.1190+0	1.2141+0	1.2941+0
8.0	8.0	1.1669+3	4.5602+3	1.0003+2	1.7306+2	2.6627+2	3.6695+2	4.5384+2	6.1149+2	7.4815+2	8.9228+2	2.4868+1	3.9812+1	5.2416+1	6.2935+1	7.1793+1	7.9345+1	8.5859+1	9.1534+1	9.6526+1
9.0	9.0	8.3799+4	3.2765+3	7.1197+3	1.2464+2	1.8933+2	2.6529+2	3.5061+2	4.4423+2	5.4496+2	6.5169+2	1.8664+1	3.0449+1	4.0556+1	4.9047+1	5.6213+1	6.2332+1	6.7588+1	7.2172+1	7.6199+1
10.0	10.0	6.2110+4	2.4293+3	5.3351+3	9.3572+3	1.3035+2	1.9216+1	2.3204+2	3.3204+2	4.0816+2	4.8913+2	1.4319+1	2.3759+1	3.1998+1	3.8979+1	4.4893+1	5.4290+1	5.8077+1	6.1402+1	6.6221+0
15.0	15.0	1.9184+4	7.5039+4	1.6559+3	2.8733+3	4.3884+3	6.1747+3	8.2097+3	1.0471+2	1.2939+2	1.5552+2	4.8655+2	8.5577+2	1.2048+1	1.5158+1	1.7875+1	2.0499+1	2.4099+1	2.5688+1	
20.0	20.0	8.2248+5	3.2203+4	7.0914+4	1.2337+3	1.8863+3	2.6578+3	3.5393+3	4.5225+3	5.5993+3	6.7630+3	2.1660+2	3.9331+2	5.6922+2	7.3290+2	8.8065+2	1.0123+1	1.1291+1	1.2329+1	1.3252+1
30.0	30.0	2.4737+5	9.6884+5	2.1344+4	3.7158+4	5.6859+4	8.0193+4	1.0691+3	1.3679+3	1.6961+3	2.0516+3	6.7266+3	1.2533+2	1.5647+2	2.4636+2	3.0539+2	4.0348+2	4.4758+2	4.8737+2	
50.0	50.0	5.5803+6	2.1581+5	4.8241+5	8.3987+5	1.2857+4	1.8142+4	2.4201+4	3.0886+4	3.8453+4	4.6552+4	1.5049+3	2.9261+3	4.4337+3	5.9684+3	7.4758+3	8.9236+3	1.0299+2	1.1595+2	1.2812+2
70.0	70.0	2.3552+6	9.3833+6	2.0684+5	3.6030+5	5.5163+5	7.7845+5	1.0368+4	1.3520+4	1.6510+4	1.9392+4	6.6584+4	1.2673+3	1.9314+3	2.6162+3	3.2976+3	3.9620+3	4.6101+3	5.2229+3	
90.0	90.0	1.7859+6	7.3050+6	1.5529+5	2.0812+5	4.1040+5	5.7895+5	7.7244+5	9.8881+5	1.2277+4	1.4866+4	4.9352+4	9.4454+4	1.4418+3	2.4707+3	3.9565+3	4.7418+3	5.9281+3	6.7474+3	

Table I—Continued

Y=8.0										Y=9.0										
θ	X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0
1.0	1.1523-1	3.9603-1	7.4133-1	1.0948+0	1.4267+0	1.7628+0	2.0737+0	2.3716+0	2.6785+0	2.9361+0	5.4079+0	7.5763+0	9.5545+0	1.1380+1	1.3075+1	1.4653+1	1.6127+1	1.7506+1	1.8798+1	
2.0	2.7205-2	1.0309-1	2.1234-1	3.5111-1	4.9987-1	6.5640-1	8.1026-1	9.6491-1	1.1110+0	1.2659+0	2.5866-0	3.6873+0	4.6450+0	5.4952+0	6.2548+0	6.9387+0	7.5576+0	8.1120+0	8.6334+0	
3.0	1.0689-2	4.1357-2	8.8285-2	1.5009-1	2.2113-1	2.9801-1	3.8121-1	4.5147-1	6.3717-1	1.4264+0	2.0788+0	2.6301+0	3.1058+0	3.5219+0	3.8893+0	4.2163+0	4.5092+0	4.7730+0	5.0734+0	
4.0	5.2418-3	2.0415-2	4.4445-2	7.6036-2	1.1381-1	1.5645-1	2.0273-1	2.5163-1	3.0227-1	3.5396-1	8.5692-1	1.2911+0	1.6351+0	1.9359+0	2.1955+0	2.4222+0	2.6220+0	2.7925+0	2.9583+0	
5.0	2.9304-3	1.1449-2	2.5058-2	4.2172-2	6.5161-2	9.0391-2	1.1825-1	1.4819-1	1.7971-1	2.1238-1	5.4803-1	8.4175-1	1.0269+0	1.2933+0	1.4779+0	1.6246+0	1.7791+0	1.8781+0	1.9840+0	
6.0	1.7916-5	7.0111-3	1.5359-2	2.6619-2	4.0372-2	5.6311-2	7.4106-2	9.3445-2	1.1403-1	1.3562-1	3.6315-1	5.2057-1	7.5363-1	9.1055-1	1.0792+0	1.1504+0	1.2474+0	1.3328+0	1.4088+0	
7.0	1.1698-3	4.5825-3	1.0076-2	1.7471-2	2.6577-2	3.7200-2	4.9146-2	6.2230-2	7.6274-2	9.1114-2	2.5739-1	4.1594-1	5.5162-1	6.6553-1	7.6473-1	8.4681-1	9.2229-1	9.8687-1	1.0641+0	
8.0	8.0346-4	3.1493-3	6.9327-3	1.2040-2	1.8352-2	2.5749-2	3.4108-2	4.3134-2	5.3553-2	6.3817-2	1.8602-1	3.0126-1	4.1303-1	5.0316-1	5.8015-1	6.4649-1	7.0420+1	7.5487+1	7.9371+1	
9.0	5.7447-4	2.2526-3	4.9626-3	8.0280-3	1.3170-2	1.8509-2	2.1565-2	3.1260-2	3.8518-2	4.6269-2	1.3825-1	2.3279-1	2.7165-1	3.8233-1	4.5142-1	5.0999+1	5.5160+1	6.2868+1	6.2868+1	
10.0	4.2435-4	1.6644-3	3.6687-3	6.3687-3	9.3636-3	9.7542-3	1.3725-2	1.8241-2	2.3248-2	2.8695-2	3.4530-2	1.0523-1	1.5033-1	2.4824-1	3.0742-1	3.5847-1	4.0263-1	4.4110-1	4.7486-1	
15.0	1.2980-4	5.0991-4	1.1254-3	1.9620-3	3.0054-3	4.2415-3	5.6566-3	7.2375-3	8.9771-3	1.0845-2	3.4928-2	6.3138-2	9.1035-2	1.1663-1	1.3956-1	1.5988-1	1.7785-1	1.9378-1	2.0795-1	
20.0	5.5504-5	2.1789-4	4.8113-4	8.3932-4	1.2867-3	1.8179-3	2.4275-3	3.1104-3	3.8616-3	4.6613-3	1.5411-2	2.8841-2	3.2338-2	3.5455-2	6.7684-2	7.8780-2	8.8800-2	9.7624-2	1.0595-1	
30.0	1.6618-5	6.5384-5	1.4442-4	2.5208-4	3.8671-4	4.5467-4	7.3736-4	1.1651-3	1.4212-3	4.7398-3	9.0351-3	1.3657-2	1.8332-2	2.7135-2	3.1132-2	3.4837-2	3.8255-2	3.8255-2	3.8255-2	
50.0	3.7586-6	1.4751-5	3.2577-5	5.6093-5	8.1295-5	1.2350-4	1.6515-4	2.1192-4	3.6356-4	3.1982-4	1.0325-3	2.0820-3	3.2144-3	4.3957-3	5.5582-3	6.1053-3	7.8115-3	8.8687-3	9.8751-3	
70.0	1.6165-6	6.2124-6	1.3989-5	2.4117-5	3.4553-5	5.2960-5	7.0840-5	9.0931-5	1.1310-4	1.3729-4	4.6633-4	7.0277-4	1.2957-3	1.9144-3	2.4339-3	3.2959-3	3.4675-3	3.9586-3	4.4209-3	
90.0	1.2239-6	4.7154-6	1.0418-5	1.8182-5	2.7854-5	3.9400-5	5.2670-5	6.7610-5	8.4110-5	1.0208-4	7.4633-4	1.0132-3	1.0112-3	1.0112-3	1.0253-3	2.2193-3	2.6028-3	3.2976-3	3.3370-3	

Table I—Continued

Y=10.0

θ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0	10.0		
1.0	7.3914-2	2.6585-1	5.2104-1	7.9871-1	1.0782-0	1.3512+0	1.6153+0	1.8704+0	2.1173+0	2.3568+0	4.4959+0	6.3745+0	8.0928+0	9.6837+0	1.1154+1	1.2548+1	1.3845+1	1.5061+1	1.6204+1		
2.0	0.1	6.474-2	6.3417-2	1.3536-1	2.2587-1	3.2891-1	4.3962-1	5.5440-1	6.7381-1	7.8727-1	9.0267-1	1.0558+0	2.8476+0	3.6221+0	4.2326+0	4.9495+0	5.5167+0	6.0332+0	6.5054+0	6.9388-0	
3.0	6.1926-3	2.4161-2	5.2644-2	9.0058-2	1.3474-1	1.8506-1	2.3953-1	2.9694-1	3.5626-1	4.1671-1	1.0048+0	1.2102+0	1.9472+0	2.2207+0	2.6541+0	2.9512+0	3.2173+0	3.4538+0	3.6773+0		
4.0	0.2	9.9401-3	1.1824-2	2.5300-2	4.3717-2	6.6168-2	9.2031-2	1.2070-1	1.5101-1	1.8422-1	2.1822-1	5.7250-1	8.3063-1	1.1628+0	1.7377+0	1.6059+0	1.7823+0	1.9457+0	2.0506+0	2.2213+0	
5.0	0.1	6.6071-3	6.3125-3	1.3307-2	2.4148-2	3.6766-2	5.1480-2	6.8010-2	8.6084-2	1.0544-1	1.2959-1	2.5184-1	5.6598-1	7.5148-1	9.1159-1	1.0505+0	1.1727+0	1.2810+0	1.3778+0	1.4648+0	
6.0	0.0	9.6751-4	3.8041-3	8.3975-3	1.4652-2	2.2334-2	3.1795-2	4.1657-2	5.2976-2	6.5211-2	7.8221-2	2.2328-1	3.8016-1	5.1735-1	7.2974-1	7.2974-1	8.1790-1	8.9585-1	9.6529-1	1.0275+0	
7.0	6.2491-4	2.4586-3	5.4337-3	9.4758-3	1.4505-2	2.0441-2	2.7169-2	3.4695-2	4.2844-2	4.9843-2	5.1880-2	1.5655-1	2.4652-1	3.6228-1	4.5324-1	5.2931-1	5.9602-1	6.5435-1	7.0729-1	7.5434-1	
8.0	0.4	2.5884-4	1.6762-3	3.7074-3	6.4724-3	9.9218-3	1.4604-2	1.8669-2	2.3865-2	2.9540-2	3.5665-2	5.5665-2	1.1111-1	1.9336-1	2.6372-1	3.2745-1	3.3667-1	4.4913-1	5.3661-1	5.7342-1	
9.0	0.3	3.0273-4	1.1919-3	2.6576-3	4.6082-3	7.0710-3	9.3924-3	1.3338-2	1.7075-2	2.1170-2	2.5550-2	8.1259-2	1.4430-1	2.0411-1	2.5789-1	3.0567-1	3.4747-1	3.8467-1	4.2779-1	4.4744-1	
10.0	0.2	2.2265-4	8.7685-4	1.9410-3	3.3930-3	5.2099-3	7.3686-3	9.8457-3	1.2618-2	1.5662-2	1.8356-2	6.1246-2	1.1027-1	1.5732-1	2.0139-1	2.4013-1	2.7461-1	3.0519-1	3.5639-1	3.8246-1	3.9590-1
15.0	0.6	7.7410-5	2.6561-4	5.8854-4	1.0201-3	1.5844-3	2.2454-3	3.0074-3	3.8645-3	4.8113-3	5.8421-2	1.2681-2	2.1135-2	3.0363-2	5.3683-2	7.7295-2	9.9353-2	1.0519-1	1.1905-1	1.2163-1	1.4302-1
20.0	0.3	2.8685-5	1.1502-4	2.5054-4	4.3867-4	6.7510-4	9.5743-4	1.2834-3	1.6598-3	2.0574-3	2.5012-3	3.5667-3	1.6505-2	2.5211-2	3.5939-2	4.2438-2	5.0221-2	5.7390-2	6.4894-2	7.1251-2	
30.0	0.2	6.6165-6	3.3831-5	7.4980-5	1.5133-4	2.0217-4	2.8387-4	3.8479-4	4.9329-4	6.1775-4	7.5167-4	2.6068-3	5.1106-3	7.0979-3	1.2045-2	1.5947-2	1.6383-2	1.9702-2	2.2398-2	2.4939-2	
50.0	0.0	1.9252-6	7.6180-6	1.6909-5	2.9573-5	4.5559-5	6.4654-5	8.6772-5	1.1171-4	1.3940-4	1.6970-4	5.3247-4	1.1728-3	1.5731-3	2.5731-3	3.3322-3	4.0752-3	4.6136-3	5.5470-3	6.2553-3	
70.0	0.8	3.861-7	3.2794-6	7.2480-6	1.2688-5	1.9532-5	2.7730-5	3.7210-5	4.7890-5	5.2779-5	7.2783-5	2.3657-4	5.23535-4	7.3172-4	1.1163-3	1.4482-3	1.7843-3	2.1119-3	2.4506-3	2.7747-3	
90.0	0.0	6.2220-7	2.4376-6	5.3844-6	9.4476-6	1.4535-5	2.0625-5	2.7571-5	3.5006-5	4.4413-5	5.4052-5	1.8933-4	3.7612-4	5.3449-4	6.2001-4	1.2612-3	1.5333-3	1.5567-3	1.8369-3	2.0656-3	