

多変数系のある最良推定問題について

川 添 容 宏*

A Study on an Estimation Problem in Multivariable Processes

Yasuhiro KAWAZOE

Abstract

In the past several years, many papers have been written about optimum control of a dynamic system utilizing the computers fully.

This report is concerned with the optimum control problem of the multivariable processes with inaccessible state variables for measurement and observation. The process dynamics is characterized by the state-transition equation in discrete form

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{m}(k) + \mathbf{u}(k)$$

where $\mathbf{x}, \mathbf{m}, \mathbf{u}, \phi$ and \mathbf{G} are as follows:

$\mathbf{x} = n \times 1$ state vector

$\mathbf{m} = r \times 1$ control vector

$\mathbf{u} = n \times 1$ disturbance vector with zero mean

$\phi = n \times n$ matrix

$\mathbf{G} = n \times r$ matrix

The measurable output variables are related to the state variables, the control signals and the random measurement noise $\mathbf{w}(k)$ which has zero mean, as follows:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{M}^1\mathbf{x}(k) + \mathbf{M}^2\mathbf{m}(k) + \mathbf{w}(k)$$

In the optimum system design, the performance index is quadratic performance index of the following form

$$\sum_{k=1}^N [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \lambda\mathbf{m}^T(k-1)\mathbf{H}(k-1)\mathbf{m}(k-1)]$$

where \mathbf{Q} and \mathbf{H} are positive definite matrixes and T denotes the transpose of a matrix. Optimum estimation and optimum control must be considered in the design of control systems with inaccessible state variables. The report pays more attention to the problem of the optimum estimation. The obtained best estimate of $\mathbf{x}(k)$ is shown in Fig. 1 and Fig. 2 by the blockdiagram, and the flow chart to calculate the conversion matrix \mathbf{A}^0 is illustrated in Fig. 3. Optimum estimation of $\mathbf{x}(k)$ requires the control vector estimated at the previous sampling instant as an input, as well as the output vector measured at the same sampling instant and obtained from calculating the feedback vector \mathbf{B} and the conversion matrix \mathbf{A}^0 .

1. ま え が き

近年、デジタル計算機の発達に伴い計算機による最適制御の研究が活発に行われており、数多くの論文が発表されている¹⁾。

系の最適化方法としては、ベルマンのダイナミックプログラミングとポントリヤギン他による最大原理

がその代表的なものである^{2), 3)}。特に、ダイナミックプログラミング法はデジタル計算機の制御分野における有用性を高めたことで特筆に値する。

本報告では、外測不能な状態変数を持つ多変数制御系の計算機最適制御に関して、ダイナミックプログラミング法によって得た最適制御則を基に、可測な出力変数が状態変数と制御入力の関数として表わされ、か

*工業短期大学部電気工学教室

つ、出力変数の測定に際して雑音が混入する場合の最良推定問題を主体に論じる。

2. 外測不能な状態変数を持つ n 次元線形制御系の最適制御

状態変数がすべて測定、観測が可能なときの、二次形式評価関数を最小にする最適制御ベクトルは状態変数の線形関数として求められる⁴⁾。ところが、現実の工学上の制御対象においては状態変数がすべて測定、観測可能とは限らず、多くの場合、状態変数は外測不能なものとして取り扱っていかなければならない。一般に出力ベクトルは測定ならびに観測が可能なので、出力ベクトルの測定値より最適制御を行なわせることを考えなければならない。いま、(1)式で表わされる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{m}(k) + \mathbf{u}(k) \quad (1)$$

\mathbf{x} : n 次元状態ベクトル

\mathbf{m} : r 次元制御ベクトル

\mathbf{u} : n 次元外乱ベクトル

ϕ : $n \times n$ 係数行列

\mathbf{G} : $n \times r$ 係数行列

k : 任意のサンプリング時点を表わすための整数。サンプリング周期は省略

一般的な離散形式による n 次元制御対象を(2)式で示される二次形式の動作評価指数の期待値を最小にすべき最適制御について考える。

$$I_N = \sum_{k=1}^N [\mathbf{x}^T(k)\mathbf{Q}(k)\mathbf{x}(k) + \lambda \mathbf{m}^T(k-1)\mathbf{H}(k-1)\mathbf{m}(k-1)] \quad (2)$$

\mathbf{Q}, \mathbf{H} : 正値対称行列

λ : 制御ベクトルに制限を与えるための乗数

\mathbf{T} : 転置行列の意味

文献(5)によると、 $\mathbf{x}(k)$ 、 $\mathbf{Y}(j)$ をおのおの $\sum_{i=0}^k \mathbf{A}_i \mathbf{x}(i)$ 、 $\sum_{i=0}^j \mathbf{B}_i \mathbf{y}(i)$ の集合であるとしたとき、最適制御ベクトルは(3)式で表わされるように、状態ベクトル $\mathbf{x}(k)$ の部分空間 $\mathbf{Y}(j)$ 上への正射影 $\hat{\mathbf{x}}(k/j)$ の線形関数として求められる。

$$\hat{\mathbf{m}}^0(k/j) = \mathbf{B}(N-k)\hat{\mathbf{x}}(k/j) \quad (3)$$

\mathbf{B} : フィードバック行列

なおフィードバック行列 $\mathbf{B}(N-k)$ は時間の関数であり、これは繰り返し計算により求めることができる。また、制御ベクトルの法線成分 $\hat{\mathbf{m}}^0(k/j)$ は推定誤差を意味する。(3)式からわかるように、最適制御ベクトルは状態変数 $\mathbf{x}(k)$ の最良推定量、すなわち部分空間 $\mathbf{Y}(j)$ 上への正射影 $\hat{\mathbf{x}}(k/j)$ を求めることにより決定される。したがって、一般に、外測不能な状態

変数を有する多変数系の最適制御問題はつぎの二つに分けることができる。

(i) すべての外測不能な状態変数の最良推定量を出力変数の測定値より決定する。

(ii) (i)により求められた状態変数の最良推定量より最適制御則を得るための制御器を構成する。

3. 状態変数の最良推定

本報告では、測定、観測の可能な出力ベクトル \mathbf{y} が外測不能な状態ベクトル \mathbf{x} 、制御ベクトル \mathbf{m} 、測定により混入する平均値零なる独立性不規則雑音 \mathbf{w} により次式の関係をもつ系について論じる。

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{M}^1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{M}^2 \mathbf{m}(k) + \mathbf{w}(k) \quad (4)$$

\mathbf{y} : p 次元出力ベクトル ($p \leq n$)

\mathbf{x} : n 次元状態ベクトル

\mathbf{w} : p 次元測定雑音ベクトル

\mathbf{m} : r 次元制御ベクトル

\mathbf{M}^1 : $p \times n$ 係数行列

\mathbf{M}^2 : $p \times r$ 係数行列

また、この系は(1)式で表わされる状態推移方程式を持つものとする。集合 $\mathbf{Y}(j)$ 、 $\mathbf{x}(k)$ に関し、 $j \leq k$ ならば集合 $\mathbf{Y}(j)$ は $\mathbf{x}(k)$ の部分空間を表わし、 $\hat{\mathbf{x}}(k/j)$ 、 $\tilde{\mathbf{x}}(k/j)$ をおのおの $\mathbf{x}(k)$ の $\mathbf{Y}(j)$ 上への正射影、法線成分とすると、状態ベクトル $\mathbf{x}(k)$ は次式を満足する。

$$\mathbf{x}(k) = \hat{\mathbf{x}}(k/j) + \tilde{\mathbf{x}}(k/j) \quad (5)$$

ここで、前述のように $\hat{\mathbf{x}}(k/j)$ が状態変数の最良推定量、 $\tilde{\mathbf{x}}(k/j)$ が状態変数の推定誤差を表わしている。同様に出力ベクトル $\mathbf{y}(k)$ の部分空間 $\mathbf{Y}(j)$ 上への正射影、法線成分は

$$\hat{\mathbf{y}}(k/j) = \mathbf{M}^1 \hat{\mathbf{x}}(k/j) + \mathbf{M}^2 \hat{\mathbf{m}}(k/j) \quad (6)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}(k/j) = \mathbf{M}^1 \tilde{\mathbf{x}}(k/j) + \mathbf{M}^2 \tilde{\mathbf{m}}(k/j) + \mathbf{w}(k) \quad (7)$$

で表わされる。いま、 $\mathbf{Z}(k+1)$ を $\mathbf{A}^0(k+1) \tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k]$ の形で表わされるすべてのベクトルの集合とすると(ただし、 $\mathbf{A}^0(k+1)$ は $n \times p$ 行列)、部分空間 $\mathbf{Z}(k+1)$ 内の任意のベクトルは部分空間 $\mathbf{Y}(k)$ の各ベクトルに直交する。

よつて、次式が成立する。

$$\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{Y}(k) + \mathbf{Z}(k+1) \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{x}(k+1)$ の空間 $\mathbf{Y}(k+1)$ 、 $\mathbf{Y}(k)$ 、 $\mathbf{Z}(k+1)$ に対する正射影をとれば次式となる。

$$\hat{\mathbf{x}}[(k+1)/(k+1)] = \hat{\mathbf{x}}[(k+1)/k] + \mathbf{A}^0(k+1) \tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k] \quad (9)$$

したがって、 $\hat{\mathbf{x}}(k/k)$ は、

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \hat{\mathbf{x}}[k/(k-1)] + \mathbf{A}^0(k) \tilde{\mathbf{y}}[k/(k-1)] \quad (10)$$

となる。一方、 $\hat{\mathbf{x}}[k/(k-1)]$ は

$$\hat{\mathbf{x}}[k/(k-1)] = \Psi(k-1) \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] \quad (11)$$

となる。ここで、

$$\Psi(k-1) = \phi(k-1) + \mathbf{G}(k-1) \mathbf{B}(N-k-1) \quad (12)$$

である。よつて、(10)式は、

$$\hat{\mathbf{x}}(k/k) = \Psi(k-1) \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] + \mathbf{A}^0(k) \tilde{\mathbf{y}}[k/(k-1)] \quad (13)$$

となる。ところで、(6)式より $\hat{\mathbf{y}}[k/(k-1)]$ は

$$\hat{\mathbf{y}}[k/(k-1)] = \mathbf{M}^1 \hat{\mathbf{x}}[k/(k-1)] + \mathbf{M}^2 \hat{\mathbf{m}}[k/(k-1)] \quad (14)$$

$$= [\mathbf{M}^1 + \mathbf{M}^2 \mathbf{B}(N-k)] \hat{\mathbf{x}}[k/(k-1)] \quad (14')$$

となる。よつて、(13)、(14)両式より状態変数の最良推定量を求めることができる。また、(11)、(12)式より、

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k/(k-1)] &= \phi(k-1) \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] \\ &+ \mathbf{G}(k-1) \mathbf{B}(N-k-1) \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] \\ &= \phi(k-1) \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] \\ &+ \mathbf{G}(k-1) \hat{\mathbf{m}}^0[(k-1)/(k-1)] \end{aligned} \quad (15)$$

が成立する。

4. 変換行列 \mathbf{A}^0 の決定

\mathbf{A}^0 が決まると最良推定量は (13)、(14)式より求められる。(5)式より、状態ベクトル $\mathbf{x}(k+1)$ は、

$$\mathbf{x}(k+1) = \hat{\mathbf{x}}[(k+1)/k] + \tilde{\mathbf{x}}[(k+1)/k] \quad (16)$$

であり、したがつて推定誤差は、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}[(k+1)/k] &= \mathbf{x}(k+1) - \hat{\mathbf{x}}[(k+1)/k] \\ &= \Psi(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k) - \Psi(k) \hat{\mathbf{x}}(k/k) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、(5)、(9)式を考慮し、かつ(7)式を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}[(k+1)/k] &= \Psi(k) [\mathbf{I} - \mathbf{A}^0(k) \mathbf{M}^1 - \mathbf{A}^0(k) \mathbf{M}^2 \mathbf{B}(N-k)] \\ &\tilde{\mathbf{x}}[k/(k-1)] - \Psi(k) \mathbf{A}^0(k) \mathbf{w}(k) + \mathbf{u}(k) \quad (18) \\ &= \Psi(k) \mathbf{F} [\mathbf{A}^0(k)] \tilde{\mathbf{x}}[k/(k-1)] \\ &- \Psi(k) \mathbf{A}^0(k) \mathbf{w}(k) + \mathbf{u}(k) \quad (19) \end{aligned}$$

となる。なお、ここで、

$$\mathbf{F} [\mathbf{A}^0(k)] = \mathbf{I} - \mathbf{A}^0(k) \mathbf{M}^1 - \mathbf{A}^0(k) \mathbf{M}^2 \mathbf{B}(N-k) \quad (20)$$

と置いた。また、(18)、(19)式で

$$\hat{\mathbf{m}}^0[k/(k-1)] = \mathbf{B}(N-k) \tilde{\mathbf{x}}[k/(k-1)] \quad (21)$$

の関係を使用した。したがつて、(22)式で定義される共分散行列 $\mathbf{C}(k+1)$ は(23)式で表わされる。

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(k+1) &= E\{\tilde{\mathbf{x}}[(k+1)/k] \tilde{\mathbf{x}}^T[(k+1)/k]\} \quad (22) \\ &= \Psi(k) \mathbf{F} [\mathbf{A}^0(k)] \mathbf{C}(k) \mathbf{F}^T [\mathbf{A}^0(k)] \Psi^T(k) \\ &+ \Psi(k) \mathbf{A}^0(k) \mathbf{W}(k) \mathbf{A}^{0T}(k) \Psi^T(k) + \mathbf{U}(k) \quad (23) \end{aligned}$$

ここで、

$$\mathbf{C}(k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}[k/(k-1)] \tilde{\mathbf{x}}^T[k/(k-1)]\} \quad (24)$$

$$\mathbf{W}(k) = E\{\mathbf{w}(k) \mathbf{w}^T(k)\} \quad (25)$$

$$\mathbf{U}(k) = E\{\mathbf{u}(k) \mathbf{u}^T(k)\} \quad (26)$$

ただし、 E は期待値演算子である。

いま、部分空間 $\mathbf{Z}(k+1)$ 上への $\mathbf{x}(k+1)$ の正射影を $\hat{\mathbf{z}}[(k+1)/(k+1)]$ で表わせば、

$$\hat{\mathbf{z}}[(k+1)/(k+1)] = \mathbf{A}^0(k+1) \tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k] \quad (27)$$

であり、また、推定誤差は法線成分であるから、

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}[(k+1)/(k+1)] &= \mathbf{x}(k+1) \\ &- \mathbf{A}^0(k+1) \tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k] \end{aligned} \quad (28)$$

となる。したがつて、次式より(30)式が求まる。

$$\begin{aligned} E\{\tilde{\mathbf{z}}[(k+1)/(k+1)] \tilde{\mathbf{y}}^T[(k+1)/k]\} \\ = E\{\mathbf{x}(k+1) - \mathbf{A}^0(k+1) \tilde{\mathbf{y}}[(k+1)/k]\} \\ \tilde{\mathbf{y}}^T[(k+1)/k] = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

∴ $\mathbf{C}(k+1) \mathbf{D}^T(k+1)$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{A}^0(k+1) [\mathbf{D}(k+1) \mathbf{C}(k+1) \mathbf{D}^T(k+1) \\ &+ \mathbf{W}(k+1)] \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、

$$\mathbf{D}(k+1) = \mathbf{M}^1 + \mathbf{M}^2 \mathbf{B}(N-k+1) \quad (31)$$

である。

よつて、変換行列 $\mathbf{A}^0(k+1)$ は、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0(k+1) &= [\mathbf{C}(k+1) \mathbf{D}^T(k+1)] [\mathbf{D}(k+1) \mathbf{C}(k+1) \\ &\mathbf{D}^T(k+1) + \mathbf{W}(k+1)]^{-1} \end{aligned} \quad (32)$$

ここで、行列 $[\mathbf{D}(k+1) \mathbf{C}(k+1) \mathbf{D}^T(k+1) + \mathbf{W}(k+1)]$ が正則であるとする、(32)式と(33)式を用いて繰り返し計算により \mathbf{A}^0 の値を求めることができる。

5. 全体の系に対する考察とまとめ

本文で考えてきた外測不能な状態変数をもつ多変数系の最適制御則は(3)式で示したとおりである。すなわち、状態量を各サンプリング時点において最良に推定していき、かつフィードバック行列 \mathbf{B} も時間の関数になつているから各サンプリング時点に対して計算可能にしておく。計算機制御の第1の役目は、このフィードバック行列を逐次繰り返し計算していくことである。なお、 \mathbf{B} の計算手順については文献5)に記載されている。

状態量は測定ならびに観測できないから、最適制御において最良となる推定量を測定可能なベクトル(出力ベクトル)より求めていかなければならない。ここで、特に、測定出力ベクトルが(4)式の関係、すなわち、

状態ベクトル, 制御ベクトルと測定雑音の関数として表わされている場合について検討してきた。それによつて, (13), (14)両式が測定可能な出力ベクトルより状態ベクトルの最良推定量を得る関係式として得られた。ここで, 新しい未知数 \mathbf{A}^0 が含まれていることに注意を要する。これは後で決定される。

(13), (14)式の関係を知りやすくするために図示したのが Fig. 1 である。これにより, 測定, 観測された出力ベクトルをこの推定系の入力として, あるフィードバック系を形成して, 求めるところの状態推定量が出力ベクトルと同じサンプリング時点において得られることが明らかとなった。Fig. 1 において, Ψ ベクトルは(12)式で与えられるが, これはフィードバック行列 \mathbf{B} を含んでおり, かつ, このフィードバック行列 \mathbf{B} は求める状態推定量よりも一つ前のサンプリング時点のものである。結局, 状態推定量は, それと同一サンプリング時点での出力ベクトルの測定値と, フィードバック行列 \mathbf{B} の現時点の値と一つ前のサンプリング時点の値により決定される。

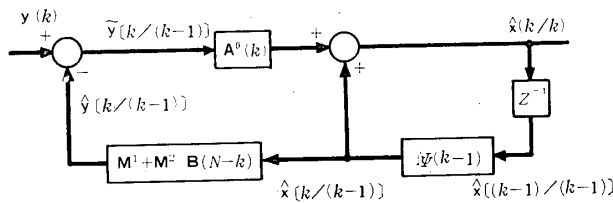


Fig.1 Block diagram of the optimum estimator in case of the measured output vector

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{M}^1 \mathbf{x}(k) + \mathbf{M}^2 \mathbf{m}(k) + \mathbf{w}(k)$$

また, (11), (12)両式の関係を使用して, すなわち, 両

式より得られる

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}[k/(k-1)] &= \Psi(k-1) \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] \\ &= [\phi(k-1) + \mathbf{G}(k-1) \\ &\quad \mathbf{B}(N-k-1)] \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] \\ &= \phi(k-1) \hat{\mathbf{x}}[(k-1)/(k-1)] \\ &\quad + \mathbf{G} \hat{\mathbf{m}}^0[(k-1)/(k-1)] \end{aligned} \quad (33)$$

を用いて Fig. 1 を描き 変えれば, Fig. 2 で示すブロックダイアグラムとなる。これによると, 状態ベクトルの推定量には, 新たに一つ前のサンプリング時点における制御ベクトルの最良推定量がフィードバックループへの入力として必要になってくる。いずれにしても, Fig. 1, Fig. 2 は共に未知の時間の関数の \mathbf{A}^0 を

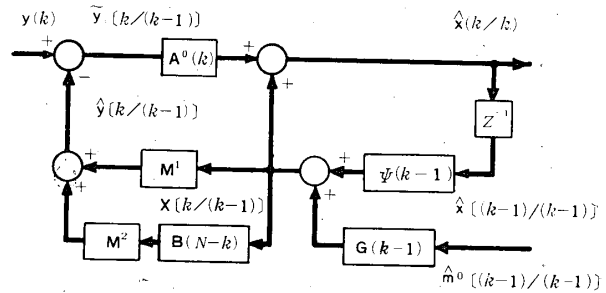


Fig.2 Blok diagram of the modified optimum estimator in Fig.1

含んでいる。 \mathbf{A}^0 の求め方は, 4. で導いてきた。それによると, \mathbf{A}^0 は共分散行列 \mathbf{C} との交互繰り返し計算により決定されることがわかった。すなわち, (23)式と(24)式を用い, まず, $\mathbf{x}(k)$ の先験的にわかっている共分散行列を $\mathbf{C}(0) = \mathbf{C}_0$ として与えることにより, (23)式から $\mathbf{A}^0(0)$ が計算され, $\mathbf{A}^0(0)$ の値より, (23)式から $\mathbf{C}(1)$ が求められ, このようにして, \mathbf{A}^0 の各サンプリング時点に対する値が逐次決定される。この \mathbf{A}^0 の各時点における値の決定手順を Fig. 3 のフローチャートで示す。また, 最適制御の全体の系に対する構成は Fig. 4 のようになる。図示されているように, Fig. 4 の上半分が制御対象であり, 下半分が最適制御をさせるための推定器を含めた最適制御装置である。以上のごとく, 外測不能なる状態変数を持つ制御系の最適制御は,

1) 最適制御則の決定

フィードバック行列 \mathbf{B} と状態変数の最良推定量の積として求められる。行列 \mathbf{B} は逐次繰り返し

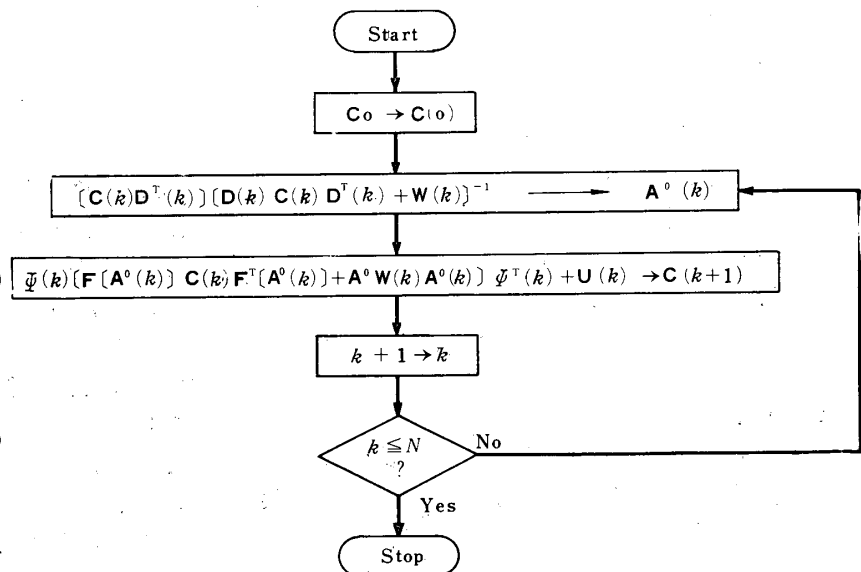


Fig.3 Flow chart for determination of the conversion matrix \mathbf{A}^0

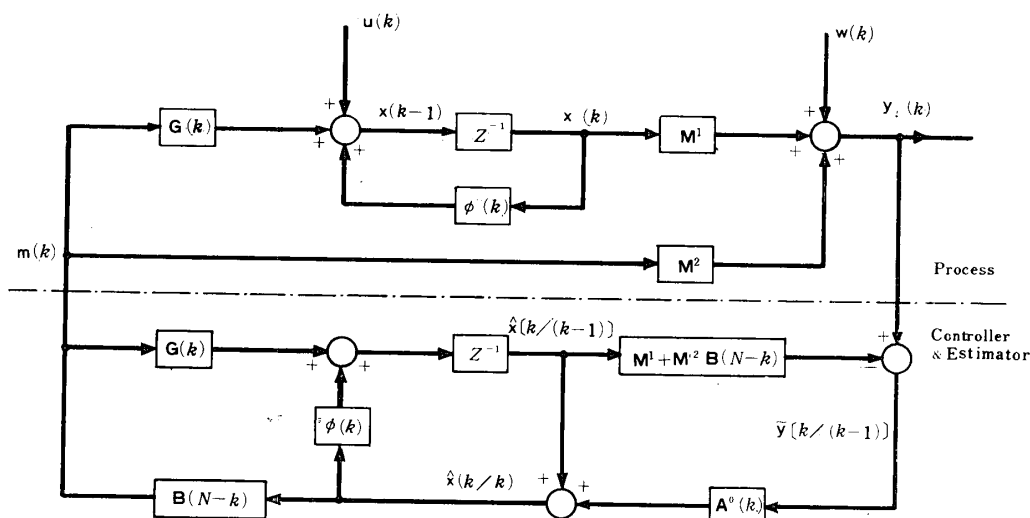


Fig.4 Structure of optimum control system with inaccessible state variables for measurement and observation, and the measurable output vector $y(k) = M^1 x(k) + M^2 m(k) + w(k)$

計算により求められる。

2) 状態変数の最良推定量の決定

状態変数の最良推定量は、変換修正行列 A^0 の関数になっている。 A^0 は共分散行列 C との繰り返し関係により求められる。

の二つに大きく分けることができる。結局、最適制御入力を求めるために、 B , A^0 , C の繰り返し関係をデジタル計算機にプログラムしていき、それらの値を決定していくことにより最適な制御入力を得られる。

したがって、この種の状態変数が測定、観測できず、外乱等の存在する制御系では、高速度のデジタル計算機が必要不可欠なものとなる。

可測な出力ベクトルが(4)式で表わされるとき、制御系の数値例については、稿を改めて報告する予定である。

終りに臨み、日頃御鞭撻いただく牧元教授、ならびに、御意見をいただいた神谷健児助教授、許斐亮爾講師に深甚の謝意を表す。

参考文献

- 1) J. T. Tou: "Optimum Design of Digital Control Systems"; Academic Press Inc., New York (1963)
- 2) R. Bellman: "Dynamic Programming"; Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1957), p.81.
- 3) L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanski, R. V. Gamkrelidze & E. F. Mishchenko: "The Mathematical Theory of Optimal Processes"; John Wiley & Sons, New York (1962), p. 9.
- 4) R. E. Kalman & R. W. Koepcke: Optimal Synthesis of Linear Sampling Control Systems Using Generalized Performance Indexes; ASME Transactions, 80(1958), 1800.
- 5) J. T. Tou: "Modern Control Theory", McGraw-Hill Book Company, New York (1964)

(昭和42年11月4日受理)