

バックラッシュのある二次元制御系の有限整定時間応答

川 添 容 宏*・神 谷 健 児**

A Finite Settling Time Response of the 2nd-order Control System with Backlash

Yasuhiro KAWAZOE and Kenji KAMIYA

Abstract

This paper is concerned with a consideration of a finite settling time response of the 2nd-order sampled data control system with backlash by the aid of a state-transition method.

The transfer-function of the linear part of the control process is $G(s)=K/s(s+1)$, and sampling period is $T(\text{sec})$.

The slope and the total displacement associated with the backlash are assumed to be p and $2h$ respectively. The control system is designed on the basis of transient behavior in response to a step-function input whose magnitude is R .

The desired digital controller such that the system will respond with deadbeat performance, and the backlash-element are treated as a variable gain element, which has different values during different sampling periods. To simplify, the authors assumed zero initial conditions.

The pulse-transfer function of the desired digital controller is obtained as

$$D(z) = (1 + az^{-1} + bz^{-2}) / (1 + cz^{-1} + dz^{-2})$$

where a , b , c and d are as follows:

$$a = f_1(R, p, h, T)$$

$$b = f_2(p, T)$$

$$c = f_3(T)$$

$$d = f_4(T)$$

where f_i , $i=1, 2, 3, 4$, denotes a function. The system compensated by the digital controller could be made to settle in two sampling periods to a step function input.

1. ま え が き

著者は、先に、状態空間法を用いて、可変ゲイン変化法による非線形補償、特に、一般化された特性を有する不感帯要素を持った二次元制御系のデジタル制御器の設計について報告した¹⁾。

本報告は、非線形要素としてバックラッシュを有する二次元制御系の有限整定時間応答に関するものである。制御系への入力としてはステップ関数によるものとする。また、状態空間法による可変ゲイン変化法はここでも有力な最適制御系設計の手段として適用した。バックラッシュは理論的に、一入力に対して、多値出力をとることが、従来から取り扱われている飽和

特性、不感帯特性と異なるところである。

2. 非線形性のある二次元系の最適設計

考察の対象とする系のブロックダイアグラムを、Fig. 1 にて図示する。ここで、制御系の線形部分の伝達関数は、

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)} \quad (1)$$

で表わされるものとする。また、考察する非線形性のバックラッシュ特性は、Fig. 1 で示されているように幅が $2h$ で、勾配が p の対称形で表わされるものとする。状態空間法によるため、Fig. 1 のブロックダ

* 工業短期大学部電気工学教室

**電気工学教室

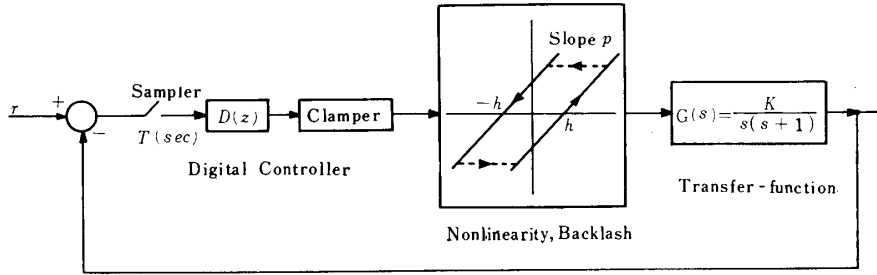


Fig.1 Block diagram of the nonlinear control system with backlash

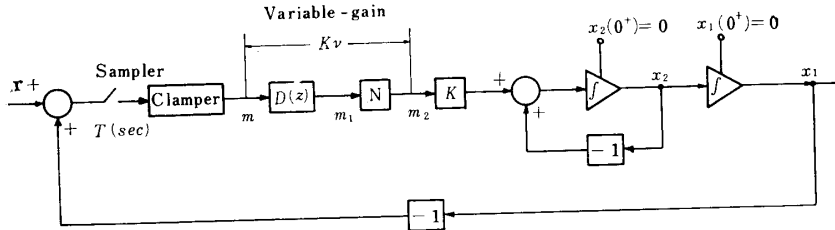


Fig.2 State-variable diagram illustrated in Fig.1

イヤグラムを Fig. 2 にて図示する状態変数線図に描き変える。ここでは、所望のデジタル制御器とバックラッシュ特性を結合して、各サンプリング時点でのその特有の値をとる可変ゲイン要素として考えるために、Fig. 1 におけるデジタル制御器（パルス伝達関数 $D(z)$ で表わされる）とクランプ、あるいは零次ホールドの位置が置き換えられる。各部における状態量は図示のとおりとする。考察する系では、各積分器の初期値は全部零とする。すなわち、

$$x_1(0^+) = 0 \tag{2}$$

$$x_2(0^+) = 0 \tag{3}$$

を満足するものとする。状態ベクトルを、

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} r \\ x_1 \\ x_2 \\ m \end{bmatrix} \tag{4}$$

と置くと、初期状態ベクトルは、

$$\mathbf{v}(0) = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

で表わせる。ただし、ここで、 R は次式で表わされる制御系のステップ入力の大きさである。

$$r = R u(t) \tag{6}$$

$u(t)$: 単位ステップ関数

任意のサンプリング時点間の繰り返し関係は、式(7)、(8)によって示される。

$$\mathbf{v}(nT^+) = \mathbf{B} \mathbf{v}(nT) \tag{7}$$

$$\mathbf{v}(n+1 T) = \Phi(k_n) \mathbf{v}(nT^+) \tag{8}$$

ここで、行列 \mathbf{B} 、 $\Phi(k_n)$ は Fig. 2 の状態変数線図より求めることができ²⁾、それぞれ、次式で表わされる。

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\Phi(k_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\varepsilon^{-T} & K(T-1+\varepsilon^{-T})k_n \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-T} & K(1-\varepsilon^{-T})k_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

ここで、 k_n は $(n+1)$ 番目のサンプリング区間における可変ゲイン要素のとり値である。 k_n は次式により関係づけられる。

$$m_2(nT^+) = k_n m(nT^+) \tag{11}$$

2.1 可変ゲインの決定

$n=0$ より、逐次計算により状態量を求めていく。

$n=0$:

$$\mathbf{v}(0^+) = \mathbf{B} \mathbf{v}(0)$$

$$= \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ R \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\therefore m(0^+) = R \tag{13}$$

$$\mathbf{v}(T) = \Phi(k_0) \mathbf{v}(0^+)$$

$$= \begin{bmatrix} R \\ RK(T-1+\varepsilon^{-T})k_0 \\ RK(1-\varepsilon^{-T})k_0 \\ R \end{bmatrix} \quad (14)$$

$n=1$:

$$\mathbf{v}(T^+) = \mathbf{B} \mathbf{v}(T)$$

$$= \begin{bmatrix} R \\ RK(T-1+\varepsilon^{-T})k_0 \\ RK(1-\varepsilon^{-T})k_0 \\ R[1-K(T-1+\varepsilon^{-T})k_0] \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\therefore m(T^+) = R [1-K(T-1+\varepsilon^{-T})k_0] \quad (16)$$

$$\mathbf{v}(2T) = \Phi(k_1) \mathbf{v}(T^+)$$

$$= \begin{bmatrix} R \\ \alpha \\ \beta \\ -R[1-K(T-1+\varepsilon^{-T})k_0] \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで,

$$\alpha = RK(T+\varepsilon^{-2T}-\varepsilon^{-T})k_0 + RK(T-1+\varepsilon^{-T}) [1-K(T-1+\varepsilon^{-T})] k_1 k_0 \quad (18)$$

$$\beta = RK\varepsilon^{-T}(1-\varepsilon^{-T})k_0 + RK(1-\varepsilon^{-T}) [1-K(T-1+\varepsilon^{-T})] k_1 k_0 \quad (19)$$

ここで、いま、考察している制御対象は2次元であるから、有限整定時間応答の条件式として、

$$\begin{cases} x_1(2T) = R & (20) \\ x_2(2T) = 0 & (21) \end{cases}$$

の連立方程式が成立する。勿論、 $n \geq 2$ については、

$$\mathbf{v}(2T^+) = \mathbf{v}(3T) = \mathbf{v}(3T^+) = \dots$$

$$= \begin{bmatrix} R \\ R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

を満足する。(20)、(21)の連立方程式を解いて、 k_0 、 k_1 を求めると、

$$k_0 = \frac{1}{KT(1-\varepsilon^{-T})} \quad (23)$$

$$k_1 = \frac{\varepsilon^{-T}}{K[\varepsilon^{-T}(T+1)-1]} \quad (24)$$

となる。

2.2 バックラッシュに対する非線形補償—ディジタル制御器

可変ゲイン要素の、各サンプリング区間での値が求められると、(11)式の関係からディジタル制御器の入力に対する非線形特性(バックラッシュ)の出力値が決まり、かつ、その入力値は出力値より、特性曲線から逆算出されなければならない。

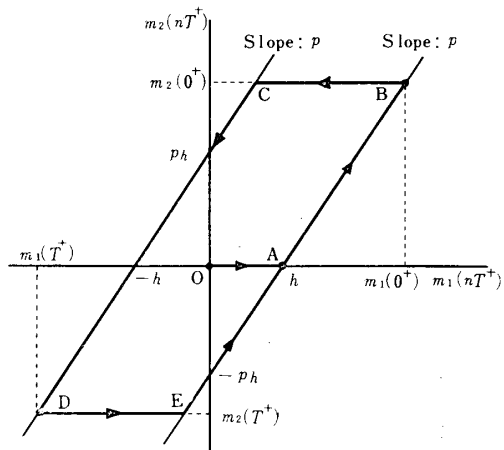


Fig.3 Determination of $m_1(nT^+)$ from $m_2(nT^+)$

各サンプリング区間における可変ゲイン要素の入力 $m(0^+)$ 、 $m(T^+)$ は(13)、(16)式で求められている。

いま、便宜上、バックラッシュ特性曲線上の初期状態を、 $m_1(nT^+) - m_2(nT^+)$ 座標の原点に仮定すれば、Fig. 3を参照して、

$$m_2(0^+) = k_0 m(0^+) = \frac{R}{KT(1-\varepsilon^{-T})} > 0 \quad (25)$$

より、特性曲線上の点Bが $[m_1(0^+), m_2(0^+)]$ を表わすことになり、 $m_1(0^+)$ の値は、

$$m_1(0^+) = \frac{R}{pKT} \cdot \frac{1}{1-\varepsilon^{-T}} + h \quad (26)$$

となる。すなわち、第一サンプリング区間に、バックラッシュ特性上の運動は初期状態の原点0を出発点として、A点を経由してB点に至る。ところで、つぎの区間においては、

$$m_2(T^+) = k_1 m(T^+) = -\frac{R}{KT} \cdot \frac{\varepsilon^{-T}}{1-\varepsilon^{-T}} < 0 \quad (27)$$

となり、 $m_2(0^+) > 0$ から $m_2(T^+) < 0$ と符号が反転している。したがって、バックラッシュ特性曲線上の運動は、第二サンプリング区間において、点Bで左に折り返し、C点で m_2 は減少の方向に動き、 $m_2(T^+) < 0$ なる点Dに落ち着く。D点の座標の $m_2(T^+)$ に対する $m_1(T^+)$ の値を求めると、

$$m_1(T^+) = \frac{R}{pKT} \cdot \frac{\varepsilon^{-T}}{\varepsilon^{-T}-1} - h \quad (28)$$

となる。また、この時点で、制御系の出力は一定の値に落ち着いている。

さらに、つぎの区間では、

$$m_2(2T^+) = 0 \quad (29)$$

となり、 $m_1(2T^+)$ は

Table 1

n	$m(nT^+)$	$m_2(nT^+)$	$m_1(nT^+)$	$x_1(nT^+)$
0	R	$\frac{R}{KT} \cdot \frac{1}{1-\epsilon^{-T}}$	$\frac{R}{pKT} \cdot \frac{1}{1-\epsilon^{-T}} + h$	0
1	$\frac{R}{T} \cdot \frac{1-\epsilon^{-T}(T+1)}{1-\epsilon^{-T}}$	$\frac{R}{KT} \cdot \frac{\epsilon^{-T}}{\epsilon^{-T}-1}$	$\frac{R}{pKT} \cdot \frac{\epsilon^{-T}}{\epsilon^{-T}-1} - h$	$\frac{R}{T} \cdot \frac{T-1+\epsilon^{-T}}{1-\epsilon^{-T}}$
2	0	0	h	R
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

$$m_1(2T^+) = h \tag{30}$$

であり、以後、

$$m_2(lT^+) = 0 \tag{31}$$

$$m_1(lT^+) = h \tag{32}$$

の状態が保たれる。

Table 1 に $m(nT^+)$, $m_2(nT^+)$, $m_1(nT^+)$, $x_1(nT^+)$ の各サンプリング時点における値をまとめて示す。

以上より、 m_1 の z -変換は、

$$\begin{aligned} M_1(z) &= m_1(0^+) + m_1(T^+)z^{-1} + m_1(2T^+)z^{-2} + \dots \\ &= m_1(0^+) + m_1(T^+)z^{-1} + hz^{-2} + hz^{-3} + \dots \\ &= \frac{m_1(0^+) - [m_1(0^+) - m_1(T^+)]z^{-1} - [m_1(T^+) - h]z^{-2}}{1 - z^{-1}} \end{aligned} \tag{33}$$

一方、 m の z -変換 $M(z)$ は

$$M(z) = m(0^+) + m(T^+)z^{-1} \tag{34}$$

ゆえに、デジタル制御器のパルス伝達関数は

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{M_1(z)}{M(z)} \\ &= \frac{1 + az^{-1} + bz^{-2}}{1 + cz^{-1} + dz^{-2}} \end{aligned} \tag{35}$$

ここで

$$a = -1 + \frac{m_1(T^+)}{m(0^+)} = -\left(1 - \frac{1}{pKT} \cdot \frac{\epsilon^{-T}}{\epsilon^{-T}-1} + \frac{h}{R}\right) \tag{36}$$

$$b = -\frac{m_1(T^+)}{m(0^+)} = \frac{1}{pKT} \cdot \frac{\epsilon^{-T}}{1-\epsilon^{-T}} \tag{37}$$

$$c = \frac{m(T^+)}{m(0^+)} - 1 = \frac{1}{T} \cdot \frac{1-\epsilon^{-T}(T+1)}{1-\epsilon^{-T}} - 1 \tag{38}$$

$$d = -\frac{m(T^+)}{m(0^+)} = \frac{1}{T} \cdot \frac{\epsilon^{-T}(T+1) - 1}{1-\epsilon^{-T}} \tag{39}$$

として求まる。(35)式のパルス伝達関数を発生させるパルス伝達関数発生装置は Fig. 4 で構成される。

ここで、式(36)からも明らかなように、係数 a はステップ入力の大さを表わす R を含んでおり、 R が増大するにつれて、 a は負の方向に減少する。他の係数器

b, c, d はステップ入力の大さきによる影響を受けない。したがって、ステップ入力の大さが決まっていない場合、パルス伝達関数発生装置の係数器 a のみを、入力の大小によって変化できるものとしておけば、Fig. 4 のデジタル制御器は制御系への入力ステップ関数であるかぎり、すべて、有限整定時間応答をさせることが可能である。バックラッシュの特性については、すでに、ある程度の知識が制御系設計の前に得られているのが普通だから、バックラッシュ特性の h, p は一定値として取り扱うことができる。

よって、サンプリング周期ならびに制御系の線形部分の伝達関数 $G(s)$

が決まっていると、Fig. 4 のパルス伝達関数発生装置—デジタル制御器の係数器 b, c, d はそれぞれ固

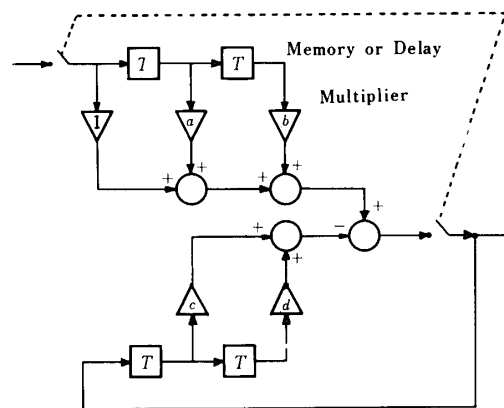


Fig.4 Digital Controller discussed in this paper

$$a = 1 + \frac{1}{pKT} \cdot \frac{\epsilon^{-T}}{\epsilon^{-T}-1} - \frac{h}{R}$$

$$b = \frac{1}{SKT} \cdot \frac{\epsilon^{-T}}{1-\epsilon^{-T}}$$

$$c = \frac{1}{T} \cdot \frac{1-\epsilon^{-T}(T+1)}{1-\epsilon^{-T}} - 1$$

$$d = \frac{1}{T} \cdot \frac{\epsilon^{-T}(T+1) - 1}{1-\epsilon^{-T}}$$

定値として扱われる。ただ、係数 a のみがステップ入力
の大きさにより最適に可変されるようにしておけば
よい。

3. 数 値 例

線形部分の伝達関数を

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

とし、バックラッシュ特性を、 $h=0.5$, $p=1$, サンプ
リング周期を $T=1$ (sec) とし、単位ステップ関
数入力の基で最小時間にて応答を整定させる系を設計
する。

推移行列 $=\Phi(k_n)$, 行列 \mathbf{B} はそれぞれ、

$$\Phi(k_n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.632 & 0.368k_n \\ 0 & 0 & 0.368 & 0.632k_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1-1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、可変ゲイン k_0 , k_1 は

$$k_0 = 1.582$$

$$k_1 = -1.394$$

である。したがって a , b , c , d は

$$a = -2.082, b = 0.582, c = 0.165,$$

$$d = -1.165$$

として求められる。よつて、パルス伝達関数は、

$$D(z) = \frac{1 - 2.082z^{-1} + 0.582z^{-2}}{1 + 0.165z^{-1} - 1.165z^{-2}}$$

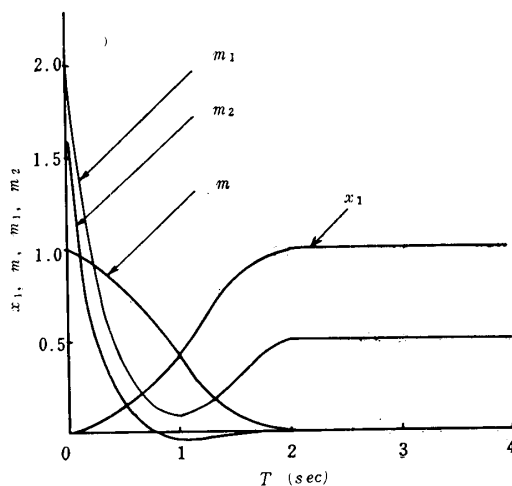


Fig.5 Curves of output x_1 , m , m_1 and m_2
for the example system

となる。このデジタル制御器によつて補償された系
の有限整定時間応答曲線は Fig. 5 で図示される。ま
た、ここでは、デジタル制御器の入力 m , その出
力、すなわちバックラッシュ特性の入力 m_1 , 出力 m_2
のそれぞれの時間に対する変化も示してある。これ
によると、デジタル制御器の出力は、系の応答が完
了後もバックラッシュの幅を補なうため h の値を継続
することになる。それによつて、バックラッシュの出
力、すなわち線形制御対象への入力は零に保たれる。

4. む す び

バックラッシュを含んだ制御系の有限整定時間応答
について、状態空間法の立場から考察した。本報告で
は線形対象を二次元で表わされるものとしたが、多次
元系でも同様な手法にてかなり容易に取り扱うことが
できる。ただし、次元数が増大すると有限整定時間応
答には、それだけ長い時間を必要とする。また、バック
ラッシュについては、その特性曲線上の初期条件を原
点に仮定したが、任意の初期条件のときでも、バック
ラッシュの取り扱い上からは平行移動をさせることに
よつて、なんら問題なくおこなえる。制御系への入力
がステップ関数である限りにおいて、非線形補償器の
パルス伝達関数発生装置の係数器は、一つを除いて
他は、一定係数器としておいてよく、ただ、一個のみ
は、入力関数の大きさにより値が変化するように構成
しておけば、すべてのステップ関数入力に対して適用
できる。ただし、系への入力がステップ関数入力でない
場合は、推移行列その他が全然違つた値をとるので
、本系は最適動作をしない。注意しなければならない
のは、どのような性質の入力が最適制御の基準とな
るかを最初に決定しておかなければ意味をなさない
ということである。また、数値例によつて、有限整定時
間応答の様子を示すと共に、バックラッシュ、ディ
ジタル制御器の入出力値が時間の経過につれてどのよ
うに変化するかを図示した。

終りに臨み、日頃、指導並びに激励を賜る 牧元教
授、種々討論いただいた足立宜良講師並びに許斐亮爾
講師に対し深く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 川添容宏：山口大学工学部研究報告，18，2 (1967) 65
- 2) J. T. Tou：“Modern Control Theory”，McGraw-Hill (1964) p.84

(昭和42年11月2日受理)