

物性値の温度依存性を考慮した非定常自由対流 熱伝達の近似解法*

——様温度垂直平板，空気の場合——

宮本政英**・村上進***

Analysis of Transient Free Convection with Temperature Dependent
Fluid Properties by an Integral Method

—An Isothermal Vertical Flat Plate in the Air—

Masahide MIYAMOTO, Susumu MURAKAMI

Abstract

Transient free convection from a vertical flat plate which is suddenly raised to a uniform higher temperature in a variable property fluid is treated by an integral method.

Numerical results are compared with more precise solutions of the differential equations for the initial stage of motion in a constant property fluid and for steady state in a variable property fluid.

The results show that present approximate solution gives a reasonable prediction of the transient free convection characteristics of the variable property fluid.

The effects of the temperature dependent properties on the time which purely one-dimensional heat conduction is terminated and on the time required to reach steady state for each position along the plate is not so significant for the air.

1. 緒 言

静止流体と同じ温度にある半無限の垂直平板の温度が、突然一様に上昇した場合の非定常自由対流の問題は、最も基本的な命題として多くの研究⁷⁾が行われている。近年電子計算機の発達に伴って、差分法を用いた数値解法が、自由対流の解析には多く行われているが、物性値の温度依存性を考慮して、自由対流の非定常特性を取扱った例は見あたらないようである****。

本報告の近似解法は、R. Siegel¹⁾の用いた特性曲線法を、 $Pr = 1$ の近傍でより高い精度を持った、物

性値の温度依存性を考慮した馬淵⁶⁾の、定常自由対流に対する近似解法を用いて拡張したものである。

温度差パラメター ε を用いて、自由対流の種々の特性値を解析的に表示し、非定常初期状態および定常状態の場合について温度分布、速度分布、熱伝達率さらにこれらの状態の継続する時間、におよぼす物性値変化の影響を明らかにした。

定常状態における厳密解^{4),9)}、および非定常初期状態における物性値一定の厳密解³⁾と、本解の結果を比較しその精度を吟味した。また実用上の見地、実験値との対比および本解の精度を吟味するために、熱伝達率、流量係数に対する reference temperature について検討した。

記 号

a : 温度伝導率

b : (10)式で与えられる定数

* 昭和48年10月、日本機械学会、第51期全国大会講演会において講演

** 機械工学科

*** 三菱重工業

**** 例えば、England¹¹⁾らは輻射の影響も含めて、一様熱流束の場合について物性値の変化を考慮して非定常自由対流熱伝達を、差分法によって解析しているが、定常解を求めるのが目的で、非定常状態についての結果は示されていない。

- c_p : 比熱
 - C_f : 摩擦係数 $\tau_w/(\nu\mu x)$
 - $C_{f\infty}$: 摩擦係数 $\tau_w/(\nu\infty\mu_\infty x)$
 - g : 重力の加速度
 - G_{rx} : グラスホッフ数 $\varepsilon g x^3/\nu^2$
 - $G_{rx\infty}$: グラスホッフ数 $\varepsilon g x^3/\nu_\infty^2$
 - Nu_x : ヌッセルト数 $\alpha x/\lambda$
 - $Nu_{x\infty}$: ヌッセルト数 $\alpha x/\lambda_\infty$
 - Pr_∞ : プラントル数 ν_∞/a_∞
 - T : 絶対温度
 - u : x 方向の速度
 - u_1 : (9)式で与えられる速度
 - u_{max} : x 一定, 面における最大速度
 - v : y 方向の速度
 - W : x 一定, 面を通過する流量
 - x : 壁面に平行に下端より測った座標
 - y : 壁面に垂直に壁面より測った座標
 - $y_{max,v}$: x 一定, 面における最大速度の位置の y 座標
 - T_r : reference temperature
 - α : 熱伝達率
 - δ : 境界層の厚さ
 - δ_* : $\int_0^\delta (\rho/\rho_\infty) dy$
 - ε : $(T_w - T_\infty)/T_\infty$
 - ζ : $y/(2\sqrt{a_\infty t})$
 - η : $\frac{1}{\delta_*} \int_0^y (\rho/\rho_*) dy$
 - θ : $(T - T_\infty)/(T_w - T_\infty)$
 - λ : 熱伝導率
 - μ : 粘性係数
 - ν : 動粘性係数 μ/ρ
 - ξ : $(G_{rx\infty}/4)^{1/4} \nu/x$
 - ρ : 密度
 - τ_w : 摩擦応力
 - τ_x : $t\sqrt{\varepsilon g/x}$
 - ω : 定数
- 添字
- w : 壁面
 - ∞ : 壁面より無限遠

2. 基礎方程式とその解

座標系はFig. 1のようにとる.

非定常自由対流に対する基礎方程式は次のようになる.

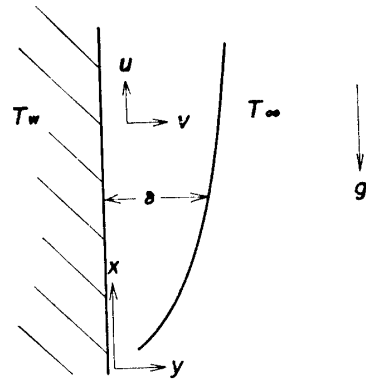


Fig. 1 Coordinate system

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = g(\rho_\infty - \rho) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \tag{2}$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) \tag{3}$$

Kármán-Pohlhausen の方法によって温度分布, 速度分布を定める場合の境界条件は次のようになる.

$$y=0 : \theta = 1, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0, \quad u = 0 \tag{4}$$

$$y=\delta : \theta = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0, \quad u = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

周囲気体として空気を考えれば常温の近傍では, 物性値を次のように表示することができる.

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{T_\infty}{T} \tag{6}, \quad \frac{\mu}{\mu_\infty} = \frac{\lambda}{\lambda_\infty} = \left(\frac{T}{T_\infty} \right)^m \tag{7},$$

$$c_p = \text{const.}$$

速度および温度分布を Doroditsyn 変換された無次元変数 η に関する四次の多項式で仮定して, 境界条件(4), (5)式によって未知定数を定めれば,

$$\theta = 1 + b\eta - (6 + 3b)\eta^2 + (8 + 3b)\eta^3 - (3+b)\eta^4 \tag{8}$$

$$u = u_1 \eta (1 - \eta)^3 \tag{9}$$

ただし

$$b = \frac{3}{1-\omega} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ -1 + \sqrt{1 - \frac{4}{3}(1-\omega) \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \right\} \tag{10}$$

となる.

(8), (9), (10)の関係は, 定常状態について馬淵⁶⁾が導出した結果と一致する. (1), (8), (9)式によって運動方程式(2), エネルギー式(3)は積分することができ, それぞれ次のようになる.

$$\frac{1}{20} \frac{\partial}{\partial t} (u_1 \delta_*) + \frac{1}{252} \frac{\partial}{\partial x} (u_1^2 \delta_*) = \frac{\varepsilon}{20} (8 + b) g \delta_*$$

$$-Pr_{\infty} a_{\infty} (\varepsilon + 1)^{\omega-1} \frac{u_1}{\delta_*} \quad (11)$$

$$\frac{1}{20} (8+b) \frac{\partial \delta_*}{\partial t} + \left(\frac{5}{168} + \frac{b}{252} \right) \frac{\partial}{\partial x} (u_1 \delta_*) = -\frac{ba_{\infty} (\varepsilon + 1)^{\omega-1}}{\delta_*} \quad (12)$$

(11)および(12)式は、未知関数 u_1 , δ_* に関する、双曲型の連立偏微分方程式となり、二つの特性曲線は次式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{63} u_1 \left\{ 1 \pm \sqrt{\frac{1}{16+2b}} \right\}; I_+, I_- \quad (13)$$

(11), (12)両式から、次の二種類の解およびそれらの解の成立する領域を簡単に求めることができる。

すなわち、加熱開始初期の、伝導のみによって伝熱の行われる、一次元非定常伝導伝熱の状態の解、と十分に時間が経過して下端の影響がおよんで後に達する定常状態の解とが得られる。

1) 加熱開始初期の一次元非定常伝導伝熱の状態の解

解は(11), (12)式において $\partial/\partial x = 0$ とおき、求められる。

$$\delta_* = 2 \sqrt{\frac{-10b}{8+b} (1+\varepsilon)^{\omega-1} \cdot \sqrt{a_{\infty} t}} \quad (14)$$

$$u_1 = \frac{-2b(8+b)}{-3b+Pr_{\infty}(8+b)} g \varepsilon t \quad (15)$$

加熱開始時から、一次元非定常伝導伝熱の継続する時間は、(13)式における I_+ に(15)式を代入して求められる。

$$t \sqrt{\frac{g \varepsilon}{x}} = \sqrt{\frac{63}{5} \sqrt{\frac{3b-Pr_{\infty}(8+b)}{b(8+b+\sqrt{4+0.5b})}}} \quad (16)$$

2) 定常状態における解

解は(11), (12)式において $\partial/\partial t = 0$ とおき求められる。

$$\delta_* = \left\{ \frac{4480(\varepsilon+1)^{2\omega-2}}{Pr_{\infty}^2} \cdot \frac{-b[-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)]}{(15+2b)^2(8+b)} \right\}^{1/4-1/4} \cdot x \cdot G_{rx\infty} \quad (17)$$

$$u_1 = \sqrt{\frac{504}{5} \sqrt{\frac{-b(8+b)\varepsilon g x}{-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)}}} \quad (18)$$

加熱開始時から定常状態に達するまでの時間は(13)式における I_- に(18)式を代入して求められる。

$$t \sqrt{\frac{g \varepsilon}{x}} = \sqrt{\frac{63}{10} \sqrt{\frac{-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)}{-b(8+b)}}} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{16+2b}} \right\}^{-1} \quad (19)$$

3. 物性値の変化を考慮した非定常自由対流の特性値

1) 一次元非定常伝導伝熱の状態における特性値

(14), (15)式から以下の結果が得られる。

1・1) 熱伝達率

$$\frac{Nu_{rx\infty}}{Gr_{rx\infty}^{1/4}} = \frac{(1+\varepsilon)^{\omega-1}}{2\sqrt{10}} \sqrt{-b(8+b)Pr_{\infty}} \tau_x^{-1/2} \quad (20)$$

物性値一定の場合には ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = \sqrt{\frac{3Pr_{\infty}}{10}} \tau_x^{-1/2} \quad (21)$$

1・2) 境界層の厚み

$$\frac{\delta}{x} = 2 \left\{ 1 + \frac{\varepsilon(8+b)}{20} \right\} \sqrt{\frac{-10b(1+\varepsilon)^{\omega-1}}{(8+b)Pr_{\infty}}} \tau_x^{1/2} Gr_{rx\infty}^{-1/4} \quad (22)$$

1・3) 壁面摩擦係数

$$C_{f\infty} = \frac{(1+\varepsilon)^{\omega-1}}{\sqrt{-10b}} \sqrt{Pr_{\infty} - \frac{-b(8+b)^{3/2}}{3b+Pr_{\infty}(8+b)}} \tau_x^{1/2} Gr_{rx\infty}^{3/4} \quad (23)$$

1・4) 最大速度

$$\frac{u_{max}}{\sqrt{\varepsilon g x}} = \frac{27}{128} \frac{-b}{-3b+Pr_{\infty}(8+b)} \tau_x \quad (24)$$

1・5) 最大速度の位置

$$\frac{y_{max} \cdot n \cdot}{x} = \frac{(1+\varepsilon)^{\omega-1}}{2\sqrt{Pr_{\infty}}} \sqrt{\frac{-10b}{8+b}} \left\{ \varepsilon \frac{142296+11557b}{157440} + 1 \right\} \times \tau_x Gr_{rx\infty}^{-1/4} \quad (25)$$

1・6) 流量係数

$$\frac{W}{\mu_{\infty}} = \frac{-b}{5\sqrt{Pr_{\infty}}} \sqrt{\frac{-10b(8+b)(1+\varepsilon)^{\omega-1}}{-3b+Pr_{\infty}(8+b)}} \tau_x^{3/2} Gr_{rx\infty}^{1/4} \quad (26)$$

物性値一定の場合 ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\frac{W}{\mu} = \frac{4}{\sqrt{30Pr_{\infty}}} \frac{1}{1+Pr_{\infty}} Gr_x^{1/4} \tau_x^{3/2} \quad (27)$$

2) 定常状態における特性値

(17), (18)式から求められる特性値は

2・1) 熱伝達率

$$\frac{Nu_{rx\infty}}{Gr_{rx\infty}^{1/4}} = -b \left\{ \frac{Pr_{\infty}^2 (1+\varepsilon)^{2\omega-2}}{4480} \times \frac{(15+2b)(8+b)}{-b[-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)]} \right\}^{1/4} \quad (28)$$

物性値一定の場合 ($\varepsilon \rightarrow 0$)

$$\frac{Nu_x}{Gr_x^{1/4}} = 2 \left\{ \frac{363Pr_{\infty}^2}{44 \cdot 0(20+33Pr_{\infty})} \right\}^{1/4} \quad (29)$$

$Pr_{\infty} = 0.733$ の時、(29)式の右辺と Ostrach⁴⁾ の厳密解の結果との差は1.5%以内である。

2・2) 境界層の厚み

$$\frac{\delta}{x} = \left\{ \frac{4480(\varepsilon+1)^{2\omega-2}}{Pr_{\infty}^2} \cdot \frac{-b[-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)]}{(15+2b)^2(8+b)} \right\}^{1/4} \times \left\{ 1 + \frac{\varepsilon(8+b)}{20} \right\} Gr_{rx\infty}^{-1/4} \quad (30)$$

2・3) 壁面摩擦係数

$$C_{f\infty} = (1 + \epsilon)^{\frac{\omega-1}{2}} \left\{ \frac{567}{250} Pr_{\infty}^2 \frac{-b(8+b)^3(15+2b)^2}{[-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)]^3} \right\}^{1/4} \times Gr_{x\infty}^{3/4} \quad (31)$$

物性値一定の場合 ($\epsilon \rightarrow 0$)

$$C_f = \left\{ \frac{14819112 Pr_{\infty}^2}{125(20+33Pr_{\infty})^3} \right\}^{1/4} Gr_x^{3/4} \quad (32)$$

$Pr_{\infty}=0.733$ の時(31)式右辺の係数と Ostrach⁴⁾ の厳密解の結果との差は 2% 程度となる。

2・4) 最大速度

$$\frac{u_{max}}{\sqrt{\epsilon g x}} = \frac{81}{128} \sqrt{\frac{14}{5}} \sqrt{\frac{-b(8+b)}{-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)}} \quad (33)$$

2・5) 最大速度の位置

$$\frac{v_{max} \cdot v}{x} = \frac{(1 + \epsilon)^{\frac{\omega-1}{2}}}{2\sqrt{Pr_{\infty}}} \left\{ 280 \frac{-b[-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)]^{1/4}}{(15+2b)^2(8+b)} \right\} \times \left\{ \epsilon \frac{142296+11557b}{157440} + 1 \right\} Gr_{x\infty}^{-1/4} \quad (34)$$

2・6) 流量係数

$$\frac{W}{\mu_{\infty}} = \frac{(1 + \epsilon)^{\frac{\omega-1}{2}}}{\sqrt{Pr_{\infty}}} \left\{ \frac{889056}{3125} \frac{-b^3(8+b)}{(15+2b)^2[-10b+3Pr_{\infty}(15+2b)]} \right\}^{1/4} \times Gr_{x\infty}^{1/4} \quad (35)$$

物性値一定の場合 ($\epsilon \rightarrow 0$)

$$\frac{W}{\mu} = \frac{12}{5} \frac{1}{\sqrt{Pr_{\infty}}} \left\{ \frac{2058}{605(20+33Pr_{\infty})} \right\}^{1/4} Gr_{x\infty}^{1/4} \quad (36)$$

3) reference temperature

非定常初期状態の場合について、物性値一定の場合の(36)式における物性値は、 T_w から T_{∞} までの任意の温度に対する値を用いることができる。この物性値を決める reference temperature を適当に選べば(36)式から求められる熱伝達率は、(36)式から得られる熱伝達率とほとんど差のない値を与える。

(36)式に対しては $Pr_{\infty}=0.733$, $\omega=0.76$ の時 reference temperature を

$$T_r = T_{\infty} + 0.78 (T_w - T_{\infty}) \quad (37)$$

とすれば、 ϵ が 0 ~ 3 の範囲内で、(36)式から得られる熱伝達率と、(36)式から得られる熱伝達率の差は、0.1% 以下となる。このことは、物性値一定の場合の結果を実用に供する場合には、極めて有効なことである。

同じく流量に対する式(35)の reference temperature は

$$T_r = T_{\infty} + 0.48 (T_w - T_{\infty}) \quad (38)$$

となり、(35)式から得られる流量との差は ϵ が 0 ~ 3 の範囲内で 0.1% 以下になる。

同じ様にして、定常状態における熱伝達率を与える(36)式に対しては

$$T_r = T_{\infty} + 0.73 (T_w - T_{\infty}) \quad (39)$$

定常状態における流量を与える(35)式に対しては

$$T_r = T_{\infty} + 0.52 (T_w - T_{\infty}) \quad (40)$$

4. 数値計算の結果および考察

数値計算は空気 ($Pr_{\infty}=0.733$, $\omega=0.76$) について行った。温度分布は(8), (9)式を物理面に逆変換して求められる。

Fig. 2 は、加熱開始初期の一次元非定常伝導伝熱の状態における温度分布の ϵ による変化を示す。破線は物性値一定の解で、R. Schetz³⁾ らの厳密解を示し、馬淵ら²⁾ の結果はこの厳密解に一致する。 $\epsilon=0$ の解が物性値一定の解に相当するが $\zeta=0.9$ 程度までは厳密解と本解はよく一致している。

Fig. 3 は、同じ状態の速度分布の ϵ による変化を示

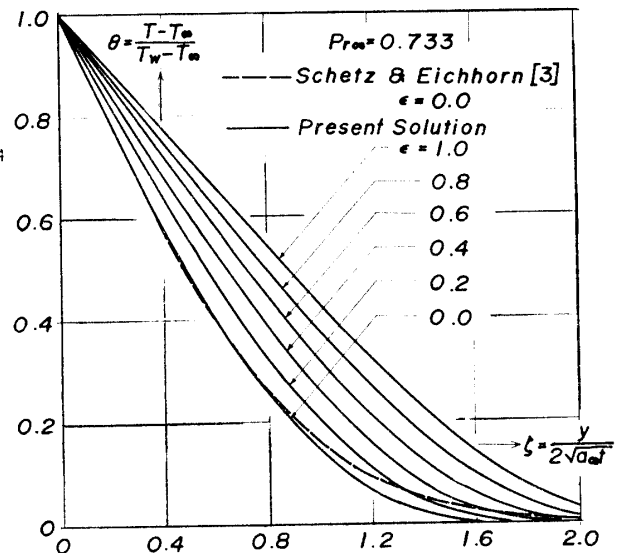


Fig. 2 The effects of variable fluid properties on dimensionless temperature profiles during initial one-dimensional transient flow development, $\omega=0.76$

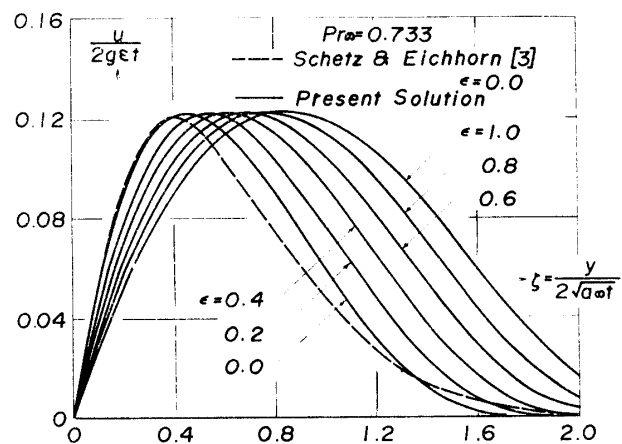


Fig. 3 The effects of variable fluid properties on dimensionless velocity profiles during initial one-dimensional transient flow development, $\omega=0.76$

す。温度分布の場合より厳密解との差が大きくなる。 ϵ が増加すると、無次元速度の最大値はほぼ一定で、その位置は壁面から遠ざかっている。

Fig. 4は、定常状態における温度分布の ϵ による変化を示す。加熱開始初期の温度分布, Fig. 1と同じ傾向を示している。

Fig. 5は、定常状態における速度分布の ϵ による変化を示す。厳密解との一致は、温度分布の場合より劣るがFig. 3の場合よりはよく一致している。

ϵ が増大すると本解では無次元速度の最大値は、ほ

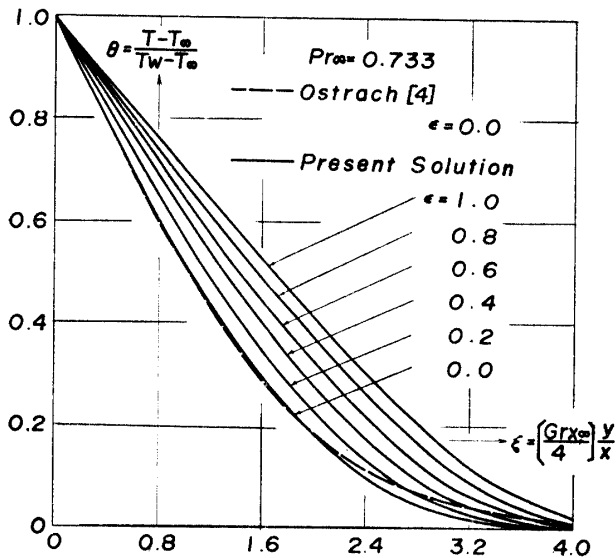


Fig. 4 The effects of variable fluid properties on dimensionless temperature profiles for steady-state free convection, $\omega=0.76$

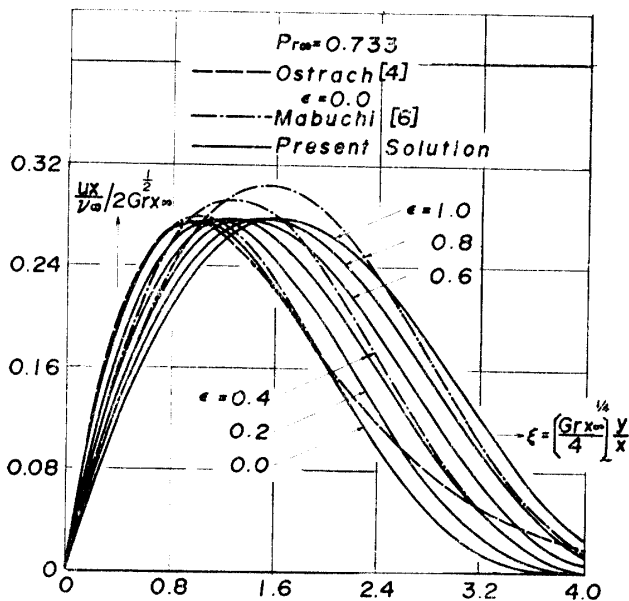


Fig. 5 The effects of variable fluid properties on dimensionless velocity profiles for steady-state free convection, $\omega=0.76$

ぼ一定であるのに対し、運動方程式(2)を壁面において適用して求めた馬淵⁹⁾の結果では増大している。差分法によって厳密に求めた長谷川ら¹⁰⁾の結果は、本解に近い傾向を示している (図は省略)。

Fig. 6は、 $N_{ux\infty}$ の時間変化と、初期状態, 定常状態の継続する時間におよぼす ϵ の影響を示す。南部⁸⁾は物性値一定の場合について、(1), (2), (3)式を解析的に吟味することによって、一次元伝導伝熱の継続する時間と、この終りの時間における熱伝達率を求めているが本解の結果とはよく一致している。破線は物性値一定の場合について差分法によって求めた Churchillら⁵⁾の結果を示す。一次元伝導伝熱の継続する時間、と定常状態に達するまでの時間におよぼす ϵ の影響は極めて小さく、 $\epsilon=0$ の場合と $\epsilon=1.0$ の場合とで図には、その差があらわれない。

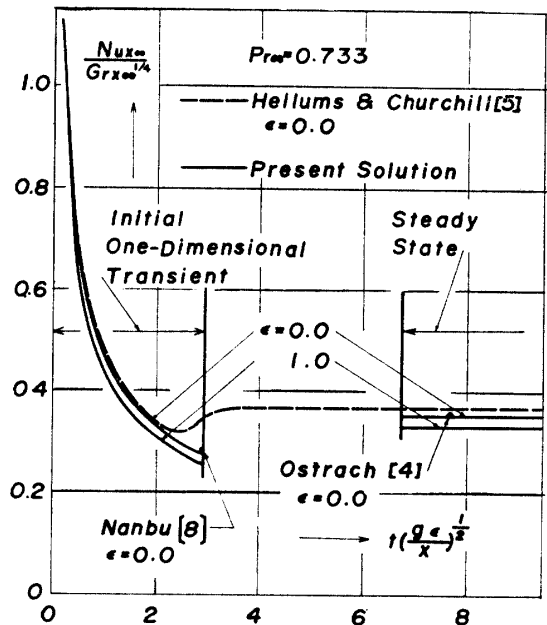


Fig. 6 The effects of variable fluid properties on transient Nusselt numbers, $\omega=0.76$

Fig. 7は、定常状態において、種々の reference temperature に対して物性値一定の解から求めた熱伝達率と、物性値の変化を考慮した解から求めた熱伝達率との比を示す。本解では $T_r = T_\infty + 0.73(T_w - T_\infty)$ とすれば、 ϵ が0~3の範囲で、0.1%以下の誤差で、この比は1となる。Sparrow⁹⁾は、 $T_r = T_\infty + 0.62 \times (T_w - T_\infty)$ を得ているが、この場合の ϵ は-1~3の範囲であり、 ϵ を0~3に限定すれば、本解の結果により近い値を示すことが予測される。

Fig. 8は、定常状態における流量係数について、同じく、種々の reference temperature に対する物性

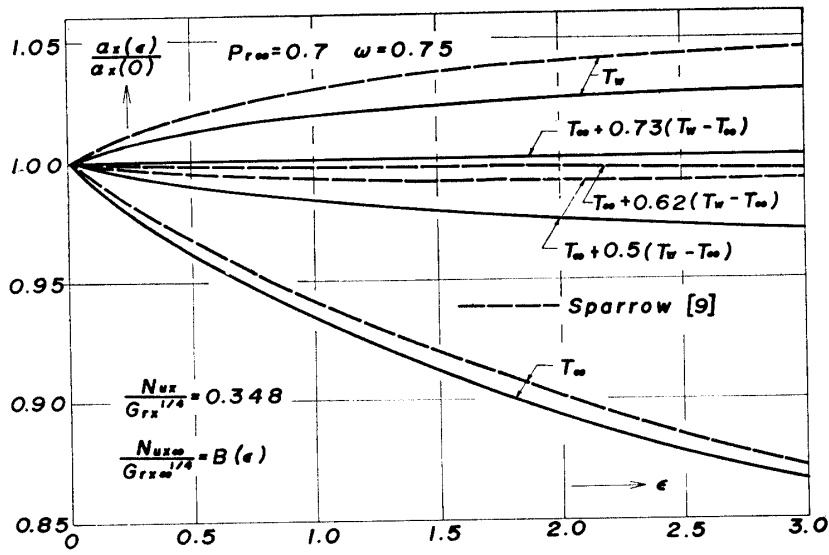


Fig. 7 Errors made in the prediction of the steady-state heat transfer coefficient by evaluating the constant property result at various temperatures, $\omega=0.75$

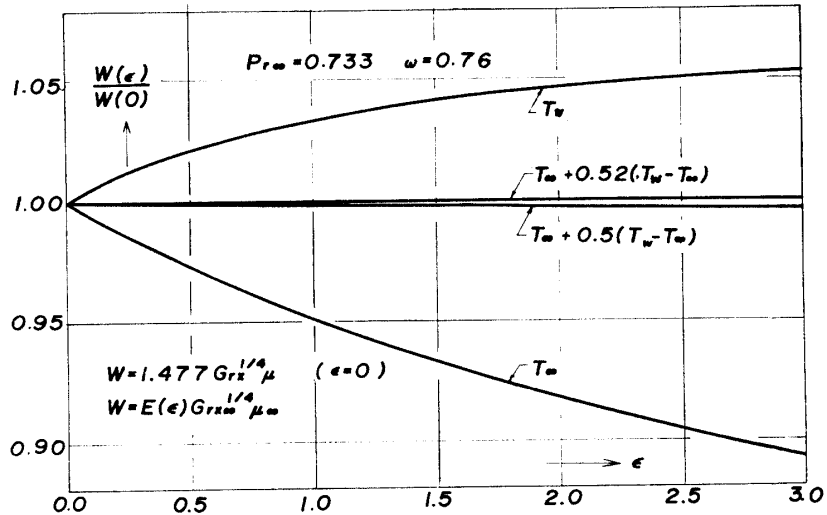


Fig. 8 Errors made in the prediction of the steady-state flow rate by evaluating the constant property result at various temperatures, $\omega=0.76$

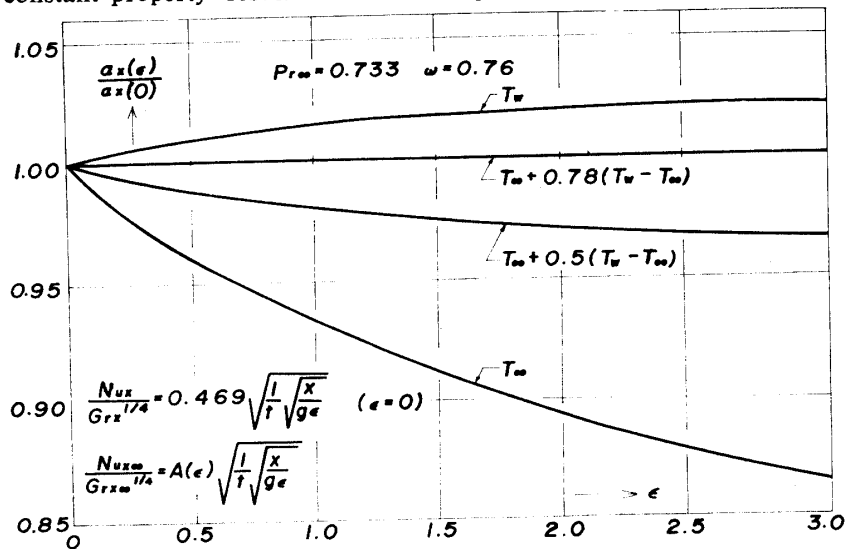


Fig. 9 Errors made in the prediction of the heat transfer coefficient during initial one-dimensional transient flow development by evaluating the constant property result at various temperatures, $\omega=0.76$

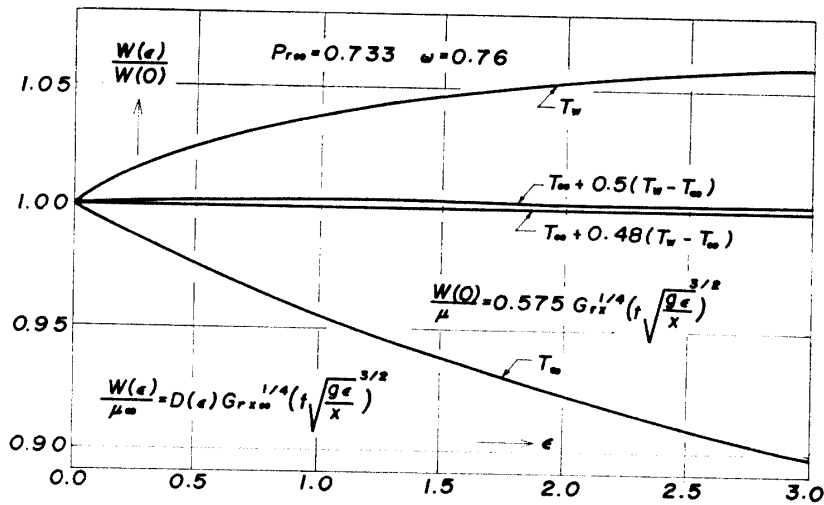


Fig. 10 Errors made in the prediction of the flow rate during initial one-dimensional transient flow development by evaluating the constant property result at various temperatures, $\omega=0.76$

値一定の解の結果の誤差を示す。

Fig. 9は、一次元非定常伝導伝熱の状態における熱伝達率について、同じく種々のreference temperatureに対する物性値一定の解の結果の誤差を示す。

Fig. 10は、一次元非定常伝導伝熱の状態における流量係数について、種々のreference temperatureに対する物性値一定の解の結果の誤差を示す。

5. 結 言

半無限垂直平板の温度が一様に、時間に対してステップ変化するとき、非定常自由対流熱伝達を物性値の温度依存性を考慮して、空気の場合について積分法を用いて解析した。

- 1) 非定常自由対流の特性値を、温度差パラメター ϵ を用いて解析的に表示した。
- 2) 温度分布、速度分布、熱伝達率におよぼす物性値の温度依存の影響は、初期段階と定常状態とは同じ傾向を示し、 ϵ が増大すると無次元速度の最大値は、ほぼ一定でその位置は境界層の外側へ移動する。
- 3) 初期段階の継続する時間、定常状態に到達する時間におよぼす ϵ の影響は小さく無視することができる。
- 4) 既存理論との比較によって本解法の妥当性を吟味した結果、近似理論としては、ほぼ満足すべき結果が得られたものと判断することができる。

終りに、本テーマと有益な御助言をいただきました山口大学工学部、村川勝弥教授、reference temperatureにつき、有益な御教示をいただきました、九州大学工学部、藤井哲教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) R. Siegel: Trans. ASME, 80, c, 347 (1958)
- 2) 馬淵幾夫, 藤樹賢司: 日本機械学会論文集26, 300 (1960)
- 3) J.A. Schetz and R. Eichhorn: Trans. ASME, 84, c, 334 (1962)
- 4) S. Ostrach: NACA TR 1111 (1953)
- 5) J. D. Hellums and S. W. Churchill: A.I.Ch. E. Journal, 8, 690 (1962)
- 6) 馬淵幾夫: 日本機械学会論文集 22, 530 (1956)
- 7) A.J. Ede: "Advances in Heat Transfer vol. 4", Academic Press (1967) p.33
- 8) K. Nanbu: Int. J. Heat and Mass Transfer, 14, 1531 (1971)
- 9) E.M. Sparrow: Ph. D. Thesis Harvard University (1956)
- 10) 長谷川修, 福田研二, 越路亮三: 九大工学部集報 45, 332 (1972)
- 11) W.G. England and A.F. Emery: Trans. ASME, 91, c, 37 (1969)

(昭和49年10月15日受理)