

波動歯車装置の回転伝達誤差の理論解析

石田 武*・日高照晃*・黄 水平**

Theoretical Analysis of Rotational Transmission Error of Strain Wave Gearing

Takeshi ISHIDA, Teruaki HIDAKA and Shuiping HUANG

Abstract

Strain wave gearing which is a compact mechanical device producing high mechanical advantage and speed reduction, has been used to accurately position the arms and wrists of robots. In this paper, the cup type strain wave gearing is transformed to an equivalent engagement model, in which a lot of tooth pairs can engage at the same time. Tooth deformation of flexible spline in circumference which are caused by the coning of flexible spline and accumulative pitch errors of the circular spline and flexible spline are taken into account in the model. Based on the equilibrium of the static forces on the model, the rotational transmission errors of strain wave gearing are calculated and compared with the measured results.

1. 緒 言

現在、産業用ロボットを始めとする各種の精密機械の減速機として、波動歯車装置が広く用いられている。しかしながら、技術の進歩に伴い、各種の精密機械に、高い位置決め精度が厳しく要求されているので、波動歯車装置にも回転伝達精度をさらに向上することが要求されている。この要求を満足させるため、波動歯車装置の回転伝達精度に直接影響を与えるねじり振動、ねじり剛性、回転伝達誤差などに関する研究が行われてきた⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。

波動歯車装置の回転伝達誤差に関しては、次のような研究がある。S. N. Istomin ら⁽³⁾は真円のフレキシブルスプラインが楕円形状に変形するとき、歯のピッチ角の変動が生じることによって、回転伝達誤差を計算している。L. M. Hise⁽⁴⁾は波動歯車装置を真円と楕円の転がり運動モデルに置き換えて、出力軸とするフレ

キシブルスプラインの1回転中に2周期の回転伝達誤差があることを理論的に解析している。しかし、これらの研究では、波動歯車装置における多数の歯のかみあいを忠実に考慮しているのではなく、歯車の加工誤差も考慮していない。また、最近、矢鍋ら⁽⁵⁾は波動歯車装置の回転伝達誤差を実測し、回転伝達誤差の主原因がサーキュラスプラインとフレキシブルスプラインの歯みぞピッチ角誤差であると報告しているが、回転伝達誤差を求めるとき、各歯対のかみあい状態を考慮しておらず、単に歯の誤差と回転伝達誤差の幾何学的な関係を述べているにとどまっている。したがって、上述の研究より、波動歯車装置において、回転伝達誤差が生じるメカニズムを十分に把握しているとは言い難い。

そこで、本研究では、カップ型の波動歯車装置を対象とし、フレキシブルスプラインのコーニングに起因する歯の円周方向の変形量を計算し、この変形量とピッチ誤差によるかみあい誤差を多数対の歯が同時にかみあうモデルに挿入し、回転伝達誤差を理論的に求める方法を示した。さらに、この理論的な方法により波動歯車装置の回転伝達誤差の特徴についても考察した。

*機械工学科

**大学院生産機械工学専攻

2. 対象としたカップ型波動歯車装置とねじれ特性、累積ピッチ誤差および回転伝達誤差

2.1 カップ型波動歯車装置

Fig. 1は波動歯車装置の概略図である。図からわかるように、波動歯車装置はサーキュラスプライン(CS)、フレキシブルスプライン(FS)とウェーブジェネレータ(WG)の3つの要素からなり、CSとFSがWGの長軸上のA部とB部の2箇所にかみあう。対象とした波動歯車装置の諸元をTable 1に示す。本研究では4

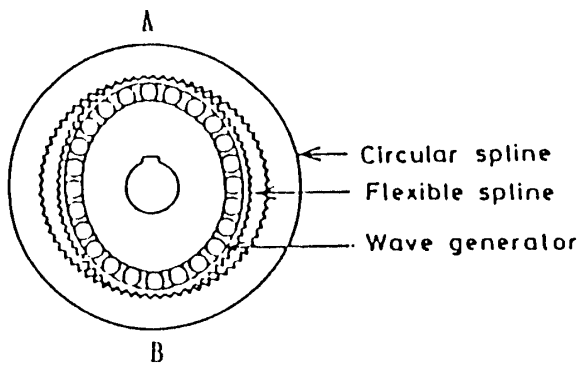


Fig. 1 General view of strain wave gearing

Table 1 Dimension of the strain wave gearing

	Flexspline	Circular spline
Tooth profile	involute	
Type of gear	spur gear	
Module m	0.4mm	
Pressure angle α	30°	
Output torque	310Nm	
Placement of teeth	external	internal
Number of teeth z	256	258
Diameter of addendum circle	102.01mm	101.98mm
Diameter of dedendum circle	100.82mm	103.22mm
Pitch arc thickness of tooth	0.57mm	0.57mm
Diameter of neutral circle $2r_0$	99.50mm	
δ	0.93mm	

つの波動歯車装置 No.1~No.4を取り扱う。

Fig. 2は対象とした波動歯車装置に用いられているFSの寸法を示す。カップ型の波動歯車装置において、真円状態で製作された薄肉円筒のFSは、長手方向の一端にダイヤフラムがあり、他端は開口部で、この開口部の外周に歯が切つてある。

2.2 カップ型波動歯車装置のねじれ特性

Fig. 3には、ねじり実験により求めたカップ型の波動歯車装置のねじれ特性の一例として、No.3の場合を示す。図からわかるように、カップ型波動歯車装置のねじれ特性は、負荷トルクの増加とともにねじれ角の増加の割合が小さくなっており、いわゆる硬性ばね特性を示す。また、トルクとねじれ角の関係は厳密にはヒステリシスを描くが、本研究では、そのヒステリシスを無視して、ばね特性をFig. 3中の破線のような3次式に近似した。これを次に示す。

$$T = k_1\beta + k_3\beta^3 \quad (1)$$

ここで、Tは負荷トルク、 β はねじれ角、 k_1 、 k_3 はばね特性を決定する係数である。研究対象とした4つの波動歯車装置の係数をTable 2に示す。

2.3 波動歯車装置の累積ピッチ誤差

Fig. 4にCSとFSの累積ピッチ誤差の一例として、No.3の場合を示す。なお、歯の累積ピッチ誤差をフー

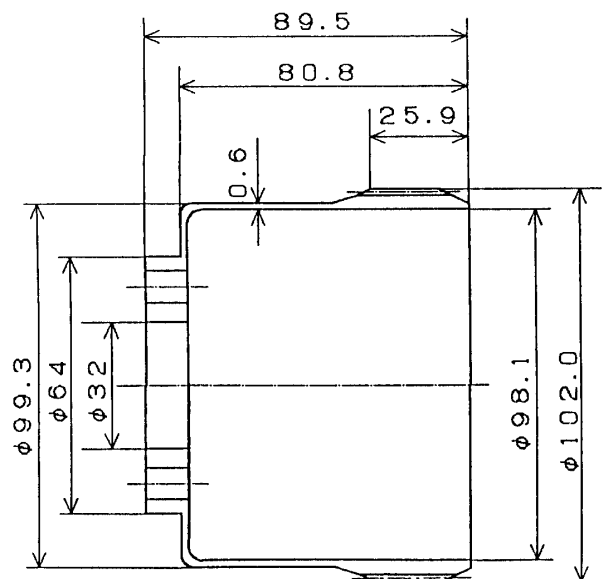


Fig. 2 Dimension of flexible spline

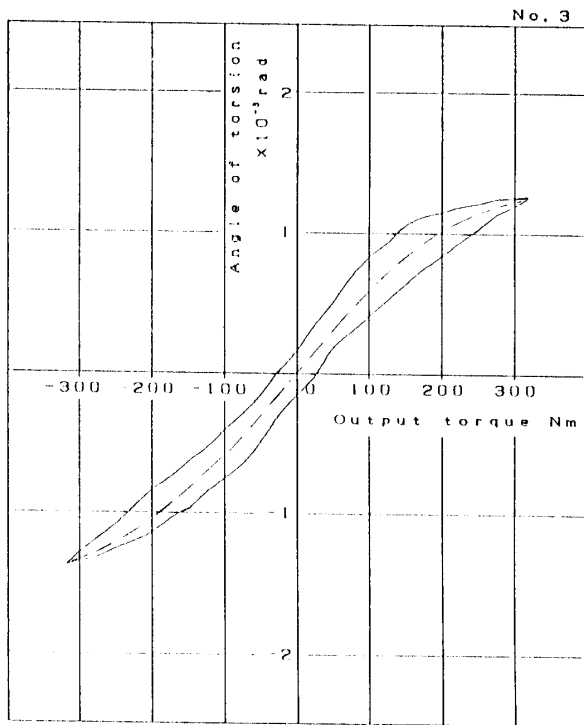


Fig. 3 Torsional stiffness characteristics of the strain wave gearing

Table 2 Coefficients of torsional stiffness

	K_1 (Nm/rad)	K_3 (Nm/rad ³)
No. 1	6.91×10^4	3.17×10^{10}
No. 2	3.20×10^4	2.22×10^{10}
No. 3	15.69×10^4	5.10×10^{10}
No. 4	11.48×10^4	2.83×10^{10}

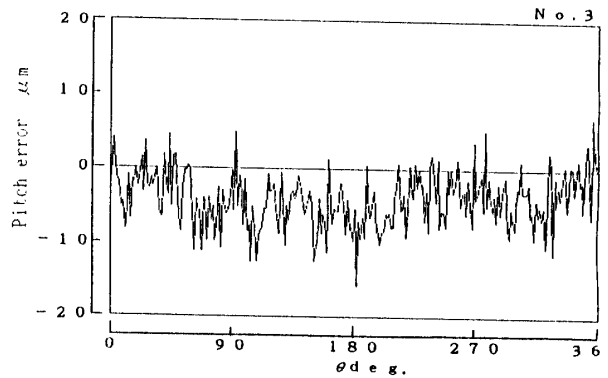
リエ級数に表示すると、式(2)、(3)のようになる。

$$e_{pc} = A_{c0} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{ci} \sin(i\theta_c + \psi_{ci}) \quad (2)$$

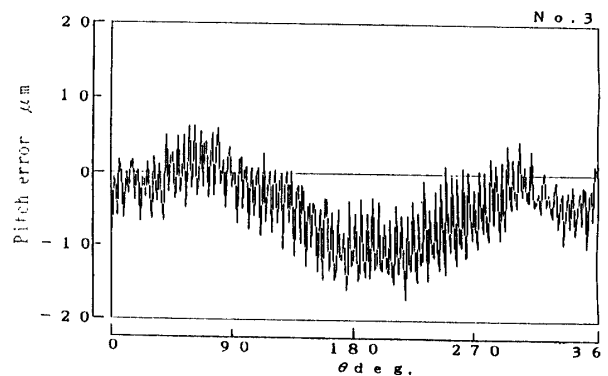
$$e_{pf} = A_{f0} + \sum_{i=1}^{\infty} A_{fi} \sin(i\theta_f + \psi_{fi}) \quad (3)$$

ここで、 θ_f 、 θ_c はFSとCSに対して、それぞれある基準位置からの中心角である。波動歯車装置 No.3の累積ピッチ誤差のフーリエ係数 A_{ci} 、 A_{fi} ($i=0, 1, 2, \dots, 10$) および位相角 ψ_{ci} 、 ψ_{fi} ($i=1, 2, \dots, 10$) を Table 3 に示す。

2.4 回転伝達誤差の測定



(a) Accumulative pitch errors of CS



(b) Accumulative pitch errors of FS

Fig. 4 Accumulative pitch errors of the strain wave gearing

Table 3 Fourier coefficients of accumulative pitch errors

		No. 3									
	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
		ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8	ψ_9	ψ_{10}
C.S (L)	-7.5	1.4	1.0	1.6	0.5	0.7	1.3	0.3	0.8	0.7	1.2
		121	43	66	52	293	136	10	95	125	129
C.S (R)	-8.2	1.7	0.7	1.3	0.3	0.3	0.6	0.4	0.8	0.3	0.6
		112	14	63	200	143	198	201	125	334	256
F.S (L)	-9.3	4.8	2.3	0.6	0.4	0.4	0.8	0.2	0.1	0.1	0.1
		57	259	293	310	68	39	142	32	138	331
F.S (R)	-1.6	2.8	0.7	0.3	0.6	0.2	0.7	0.2	0.3	0	0.3
		29	267	121	293	309	231	217	28	103	160

A_i : μm ψ_i : deg

回転伝達誤差の測定時には、波動歯車装置を Fig. 5 に示す測定装置に組み込み、CSを固定し、無負荷状態でWGをD.Cモーターにより約40rpmで回転させた。入力軸の回転角度の測定には1000パルス/回転のロータリーエンコーダを使用し、また、出力軸の回転角度の測定には432,000パルス/回転の精密ロータリーエンコーダを使用しており、秒単位の回転角の測定ができる。

3. カップ型波動歯車装置のかみあい状態

3.1 FSのコニング

Fig. 6の実線で示すように、楕円形状のWGをFSの開口部に挿入することによって、FSの開口部は楕円形状に変形し、開口部からダイヤフラム部方向に沿って各断面の楕円の長軸と短軸の差が小さくなり、FSのダイヤフラム部位置において、真円の形状が保たれている。FSがこのような楕円錐状になることを、FSのコニングと呼んでいる。FSが変形するとき、その中立線の長さが変わらないと仮定すると、開口部における断面の中立線の半径は、WGの長軸からの角度 θ に対して次式のように表される。

$$r_1 = r_0 + (\delta_1/2) \cos 2\theta \tag{4}$$

ここで、 r_0 は真円状態の中立線の半径、 δ_1 は開口部断面

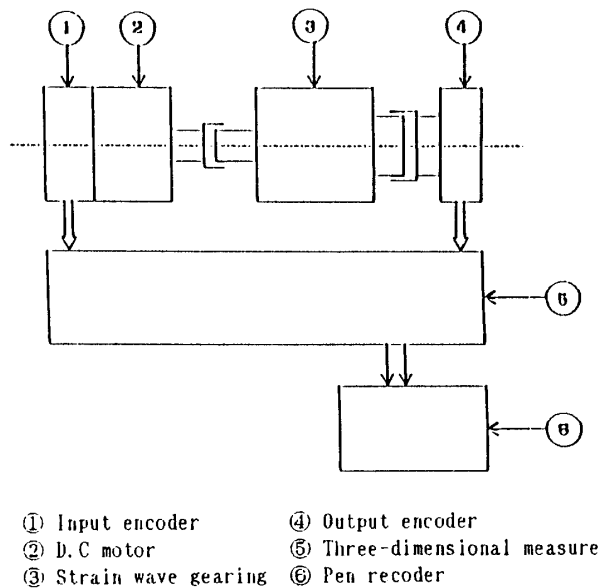


Fig. 5 Measuring device of rotational transmission errors for strain wave gearing

におけるFSの長軸と短軸の半径差であり、Table 1に示した波動歯車装置においては、 $\delta_1 = 1.17\text{mm}$ である。

3.2 FS開口部において、両歯面で接触するときの長軸と短軸の半径差の許容最大値 δ_2

文献(6)に示しているように、Table 1に示している波動歯車装置に対して、FSの開口部の長軸と短軸の半径差 δ_2 が0.97mmになると、WGの長軸上のFSの歯はCSと両歯面で接触し、円周方向の遊びがなくなる。その時、その開口部の中立線の方程式は次式のようになる。

$$r_2 = r_0 + (\delta_2/2) \cos 2\theta \tag{5}$$

WGの長軸をFSのNo.1の歯の中心線と一致させて、式(5)を用いて、FSとCSの対応歯面の隙間を求め、Fig. 7に示す。Fig. 7では、横軸にFSの歯の番号、縦軸に歯面間の隙間Dminを示す。

3.3 FSの圧縮による歯の円周方向の変位量

WGによって楕円錐状に変形したFSを厚肉真円のCSに組み込むとき、FSの開口部で楕円の長軸と短軸の半径差 δ が δ_2 より大きい断面の長軸付近がCSの歯に圧縮され、Fig. 6の破線で示すような変形をする。ここでは、FSの開口部の断面における歯がCSの歯に圧縮されることによって、FSの開口部の中立線が式(4)から式(5)に変形すると仮定するとして、FSの歯の円周方向の変位量を求めることにする。

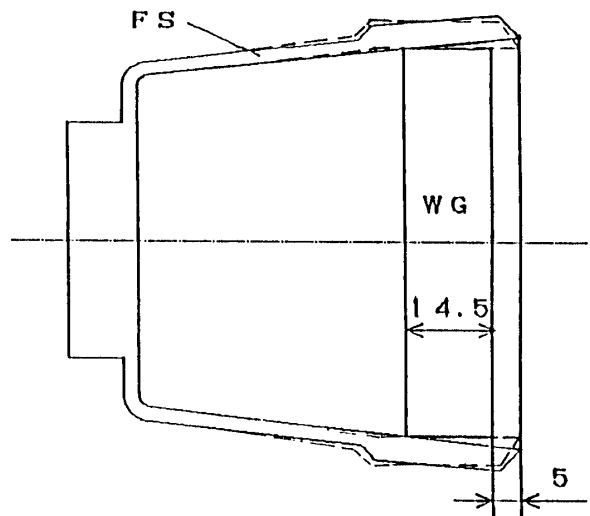


Fig. 6 The coning of flexible spline

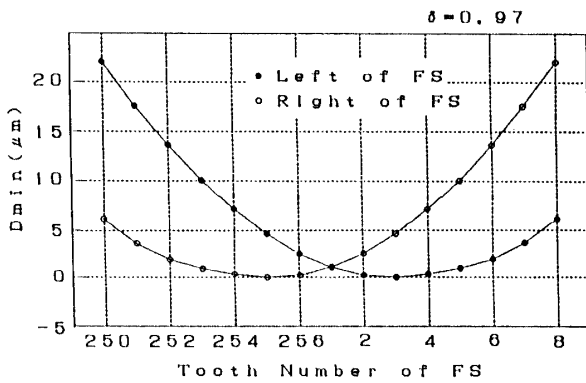


Fig. 7 Clearance between FS and CS

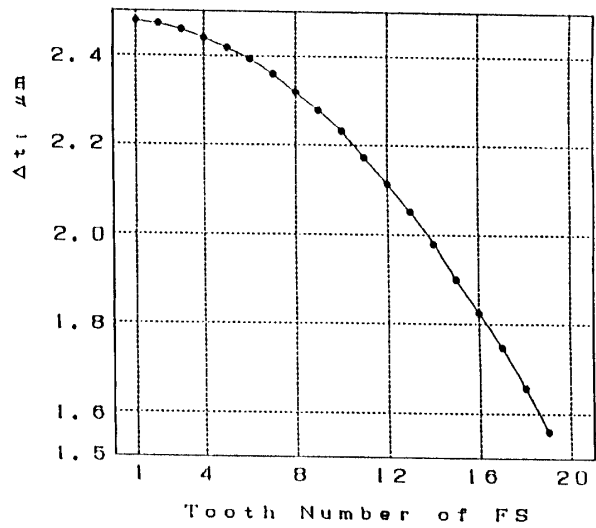


Fig. 9 Changes of tooth pitch of FS

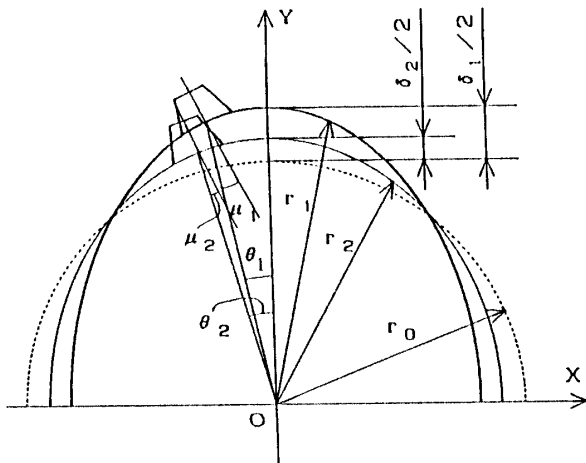


Fig. 8 Tooth deformation of FS

Fig. 8 に示すように、FS の歯の中心線と中立線の交点の極径と長軸のなす角が θ_1 から θ_2 に、歯の開き角が μ_1 から μ_2 に変化すると、真円の CS に対して、FS の歯の円周方向のピッチの変化 Δt_i は Fig. 9 に示すようになる。FS の各歯の相互間の影響を無視すると、歯の円周方向の変位量 u_i は次のように求められる。

$$u_i = \sum_{j=1}^i \Delta t_j - Dmin_i \quad (6)$$

ここで、 $Dmin_i$ は FS の長軸と短軸の半径差が δ_i になった場合、FS の第 i 番の歯と CS の対応歯面との隙間である。WG 長軸上の 2 ヶ所のかみあいのうち、1 ヶ所の A 部における u_i の変動を Fig. 10 に示す。本研究では、文献(6)を参考して、FS の歯の円周方向の変位量 u_i が次の条件を満足すれば、FS の第 i 番の歯が CS の歯とかみあっていると仮定する。

$$u_i \geq 0 \quad (7)$$

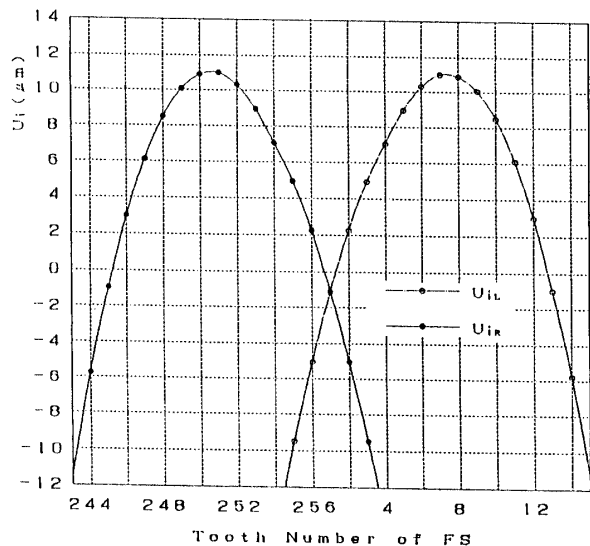


Fig. 10 The circumference deformation of FS teeth

式(7)を用いて、本研究で対象とした Table 1 の諸元の波動歯車装置における FS と CS のかみあい状態を解析すると、Fig. 11 のようになる。Fig. 11 では、YY が WG の長軸の位置を示す。この図によって、かみあい A 部には FS の歯の右歯面と左歯面が CS の歯とかみあっている歯数がそれぞれ 11 枚で、B 部のかみあい歯数を含

めると22枚となる。

うに定義する。

4. かみあいモデルと回転伝達誤差の解析方法

$$\beta = \beta_w/n - \beta_f \tag{11}$$

カップ型波動歯車装置では、多数対の歯が同時にかみあっているので、Fig.12のようなモデルを考え、回転伝達誤差を解析する。Fig.12において、固定部がCS、移動部がFSを表す。また、CSとFSの間にある k_i は歯対のばねこわさ、 e_i は歯対の累積ピッチ誤差によるかみあい誤差、 u_i はFSのコーニングに起因するFSの歯の円周方向の変位量である。このモデルの静的な力のつりあいより次式が得られる。

ここで、 β_w が入力軸とするWGの回転角度、 β_f が出力軸であるFSの回転角度を示し、 n が波動歯車装置の減速比を示す。これより、 β が正の場合はFSが正規の位置より遅れ、負の場合はFSが進むことになる。

e_i はFSとCSの第*i*番目のかみあい歯対のかみあい誤差を示し、次式によって求める。

$$e_i = e_{pci} - e_{pfi} \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{2n_1} \{k_{i1}(\beta - d_i/r) + K_{31}(\beta - d_i/r)^3\} + \sum_{j=1}^{2n_2} \{k_{j2}(\beta - d_j/r) + K_{32}(\beta - d_j/r)^3\} = 0 \tag{8}$$

ここで、WGが時計回りの場合では、 e_{pci} にはCSの左歯面の累積ピッチ誤差、 e_{pfi} にはFSの右歯面の累積ピッチ誤差を用い、WGが反時計回りの場合では、 e_{pci} にはCSの右歯面の累積ピッチ誤差、 e_{pfi} にはFSの左歯面の累積ピッチ誤差を用いる。また、 e_j はFSとCSの第*j*番目のかみあい歯対のかみあい誤差を示し、 e_i と同様にして次式により求める。

ここで、

$$d_i = e_i - u_i \quad (i=1 \sim 2n_1) \tag{9}$$

$$d_j = e_j + u_j \quad (j=1 \sim 2n_2) \tag{10}$$

n_1 はかみあいA部でFSの右歯面とCSの左歯面のかみあいの歯対数、 n_2 はFSの左歯面とCSの右歯面のかみあいの歯対数であり、本研究で対象とした波動歯車装置では $n_1 = n_2 = 11$ である (Fig.11参照)。 K_{11}, K_{31} はばね剛性の係数 ($K_{11} : \text{Nm/rad}, K_{31} : \text{Nm/rad}^3$) であり、各歯対において一定値 $K_{11} = K_1/(2n_1), K_{31} = K_3/(2n_1), K_{12} = K_1/(2n_2), K_{32} = K_3/(2n_2)$ として取り扱った。また、 r はCSのピッチ円半径(m)である。 β は波動歯車装置の回転伝達誤差(ねじれ角)であり、式(11)のよ

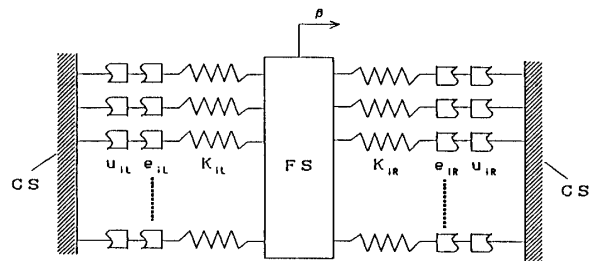


Fig.12 The engagement model of the cup type strain wave gearing

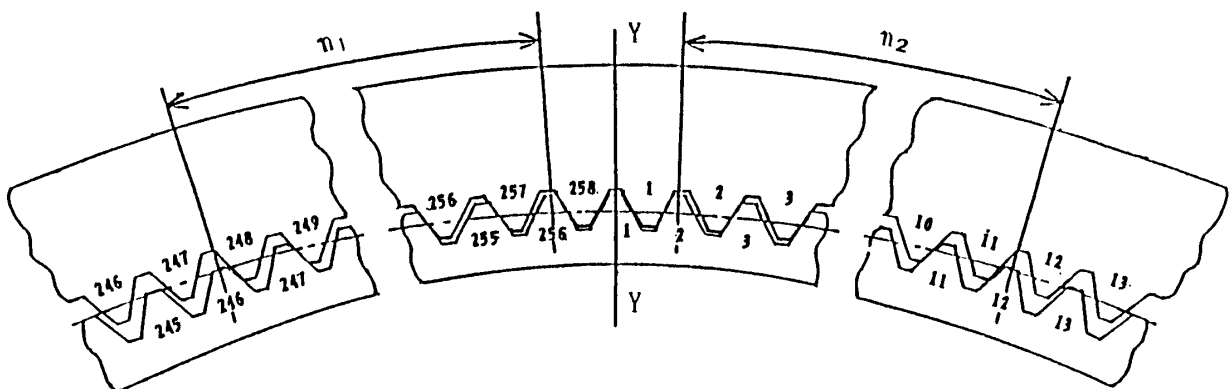


Fig.11 The engagement state of the cup type strain wave gearing

$$e_j = e_{pcj} - e_{prj} \quad (13)$$

ここで、WG が時計回りの場合では、 e_{pcj} にはCSの右歯面の累積ピッチ誤差、 e_{prj} にはFSの左歯面の累積ピッチ誤差を用い、WGが反時計回りの場合では、 e_{pcj} にはCSの左歯面の累積ピッチ誤差、 e_{prj} にはFSの右歯面の累積ピッチ誤差を用いる。

かみあい条件としては、かみあい範囲内の各歯対において、次式が成立すればその歯対はかみあっていると仮定した。

$$\beta - d_i/r \geq 0 \quad (i=1 \sim 2n_1) \quad (14)$$

$$\beta - d_j/r \leq 0 \quad (j=1 \sim 2n_2) \quad (15)$$

式(14)、あるいは式(15)が成立しなければ、その歯対はかみあわず、そのとき、FSの歯の反対の歯面のかみあい状態を以下のように判定する。

$$d_i = e_i + u_i \quad (16)$$

$$d_j = e_j - u_j \quad (17)$$

ここで、 u_i, u_j はFig.10に示すように、FSとCSのかみあい領域内の歯対のバックラッシュを意味する。 e_i, e_j はそれぞれ式(12)、式(13)のように求められる。そして、

$$\beta - d_i/r \leq 0 \quad (18)$$

$$\beta - d_j/r \geq 0 \quad (19)$$

の条件を満足すれば、FSの第*i*番目の歯の左歯面とFSの第*j*番目の歯の右歯面がCSの対応歯面とかみあっている。式(18)あるいは式(19)が成立しなければ、式(8)において $K_{11}=0, K_{31}=0$ 、あるいは、 $k_{1j}=0, k_{3j}=0$ となる。式(8)を解くことにより、波動歯車装置の静的な回転伝達誤差 β を求めることができる。

5. 理論解析結果と実測結果の比較及びその考察

5.1 入力軸1回転の回転伝達誤差について

Fig.13には一例として波動歯車装置 No.3の場合に対して、入力軸5回転分の回転伝達誤差の実測結果と理論解析結果を比較して示す。ここで、上段は理論解

析結果、下段は実測結果である。図より、入力軸1回転の伝達誤差の理論解析結果が実測結果とよく似ていることがわかる。さらに、入力軸の各回転に対して回転伝達誤差の形あるいは変動の振幅が少しずつ変わっていくことが認められる。これは、入力軸1回転につき、CSとかみあうFSの歯が2枚づつずれていくことによる。また、入力軸1回転の回転伝達誤差には、ねじり振動の場合⁽¹⁾と同様に、2周期の大きな変動と4周期、6周期の変動が認められる。

5.2 出力軸1回転の回転伝達誤差について

Fig.14の(a)にはWGが時計回りの場合、(b)には反時計回りの場合で波動歯車装置 No.3の回転伝達誤差を示す。上段は理論解析結果、下段は実測結果をそれぞれ示す。この図の測定値には出力軸1回転に1回のゆるやかな変動が認められるが、この変動は主に出力軸と出力軸につけたロータリーエンコーダの軸心のずれによるものと考えられるので、この変動を無視すると、出力軸1回転の回転伝達誤差の理論解析結果は測定結果とその形が類似している。時計回りの場合と反時計回りの場合を比較すると、理論解析結果と実測結果と共に、時計回りの場合と反時計回りの場合とで、

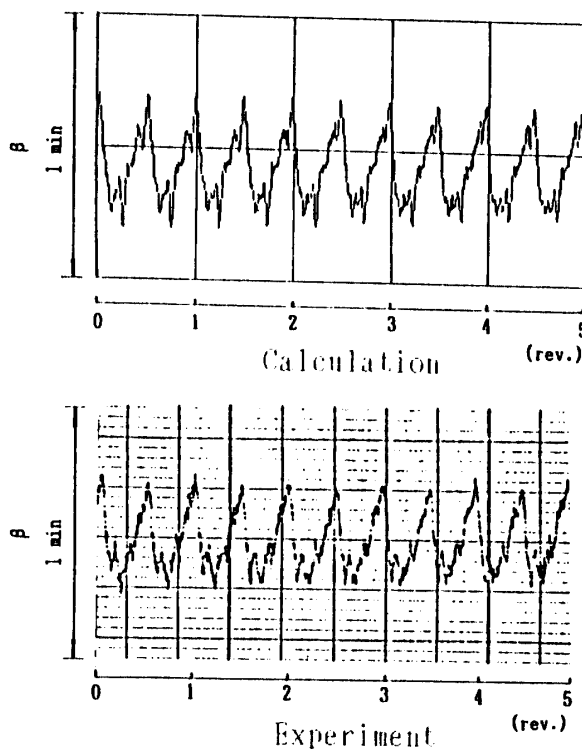


Fig.13 The rotational transmission errors for 5 revolutions of wave generator

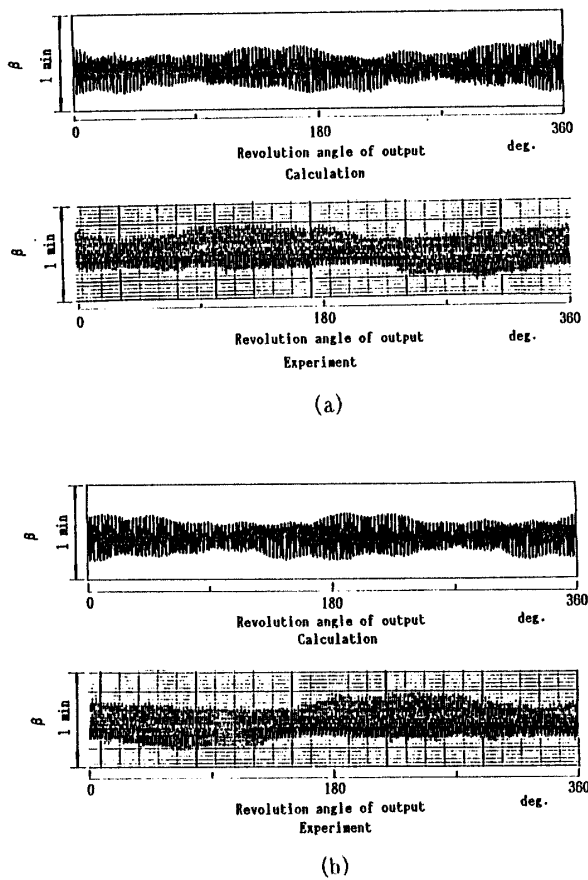


Fig.14 The rotational transmission errors for 1 revolution of flexible spline

Table 4 The maximum value of rotational transmission errors

	No. 1	No. 2	No. 3	No. 4
Calculation (min)	0.476	0.504	0.549	0.360
Experiment (min)	0.404	0.468	0.520	0.280

出力軸 1 回転の回転伝達誤差の形が反対称であること

を除けば、変動の傾向がほとんど同じであることがわかる。また、出力軸 1 回転の回転伝達誤差において振幅が最大となる位置で、その振幅をとり、実測値と理論値を比較したものを、Table 4 に示す。Table 4 より、回転伝達誤差の理論値は実測値よりやや大きいことが、実測値と近いことがわかる。

6. 結 言

本研究では、カップ型波動歯車装置の回転伝達誤差を理論的に求める方法を示し、さらに、回転伝達誤差の特徴についても考察した。その結果、以下のような結論を得た。

- (1) 波動歯車装置を多数対の歯が同時にかみあっている等価モデルに置き換えて、FS のコーニングに起因する歯の円周方向の変形量と歯の累積ピッチ誤差を考慮して、回転伝達誤差を理論的に解析する方法を示した。
- (2) 波動歯車装置の回転伝達誤差は主にフレキシブルスプラインとサーキュラスプラインの歯の累積ピッチ誤差によるものである。
- (3) サーキュラスプラインとフレキシブルスプラインが 2 箇所をかみあうので、入力軸 1 回転の回転伝達誤差には、偶数回の変動成分のみが表れることがわかった。

参考文献

- 1) 日高・ほか5名, 機論, 55-516, C(1989-8), 1864.
- 2) 杉本・ほか5名, 機論, 56-530, C(1990-10), 2732.
- 3) S.N. Istomin, S.G. Borisov, Soviet Engineering Research, 3-2, (1983), 19.
- 4) Lih-Min Hsia, 「THE ANALYSIS AND DESIGN OF HARMONIC GEAR DRIVES」, Proc. IEEE Int. Conf. Syst Man Cybern, 1988, 616-619.
- 5) 矢鍋・ほか5名, 機論, 56-521, C(1990-1), 148.
- 6) 石田・ほか4名, 機講論, No.925-1(1992), 131.

(平成 4 年 4 月 23 日受理)