

# 後ろ向きステップの層流剥離に関する研究

中西 助次\*・大坂 英雄\*\*

## On the Laminar Separation of the Flow over a Backward Facing Step

Suketsugu NAKANISHI\* and Hideo OSAKA\*\*

### Abstract

The flow over a backward facing step mounted in a two-dimensional channel was investigated numerically, and was especially examined for the zone of recirculating flow. A stream function-vorticity formulation for the flow equations was used, and was solved by the finite difference method using the pseudo-unsteady technique. The calculation was performed for the range of step Reynolds number (the Reynolds number based on the step height) of  $25 \leq Re_h \leq 250$ , and for the range of step ratio of  $0.1 \leq h_s \leq 1.0$ . The results of calculation are reported, and are compared with other numerical and experimental results. The present study also includes the experimental results utilizing the flow-visualization technique by the authors, and an example ( $Re_h=40$ ) of those results is presented in this paper. Good agreement was obtained between the experimental and numerical results.

In most of the available work, the step Reynolds number was used as a single parameter that defined the reattachment length (the length of recirculating flow zone) in the laminar two-dimensional backward facing step flow. However, B.F. Armaly et al. (1983) suggested that the reattachment length in laminar two-dimensional backward facing step flow was not a function of a single variable but was more likely to be a function of three or more variables, including the step or expansion ratio, the step or inlet-section Reynolds number and the velocity profile at the inlet section. In this paper, this suggestion was examined by utilizing the numerical and experimental results.

### 1. まえがき

後ろ向きステップ流れは剥離・再付着を伴う基礎的な流れ場で、流体工学あるいは伝熱工学の分野の重要な問題の一つである。したがって、この流れについての研究は多く<sup>1)~4)</sup>、特に層流におけるこの流れは十分調べつくされているかに思える。また、この流れ場の幾可学的形状は単純であり、しかも、ステップ角で剥離

した流れがステップ下流壁へ再付着して、その間で流れは循環渦領域を形成する、比較的理解しやすい流れ構造を示す。さらに、ステップ下流で形成される循環渦は、その領域の長さ $X$ （以下、循環渦長さと呼ぶ）とステップの高さ $h$ との比 $X/h$ とステップ・レイノルズ数 $Re_h = Uh/\nu$ との間に $X/h = f(Re_h)$ の相似則が存在する。したがって、この流れの検証および他の結果との比較検討は、一般に一つの方法として、 $Re_h$ 数に対する循環渦長さ $X/h$ を調べることによりなされている。

ところが、B.F. Armalyらは、後ろ向きステップ流れも今だ十分に解明されておらず、循環渦長さ $X/h$ もステップ・レイノルズ数 $Re_h$ の単一関数でなく、ステッ

\*広島工業大学基礎教育物理教室

\*\*機械工学科

プ入口の流速分布等にも影響されるだろうことを述べている<sup>5)</sup>。

また一方、GAMM-workshop (1981) で、これまでのキャビティ流れ（キャビティ角の特異点が問題となる）や円柱廻りの流れ（高レイノルズ数で流れは不安定、この点で数値解との間に問題点を残している）に代わり、後ろ向きステップ流れがナビエ・ストークス方程式の数値解のテスト問題として選ばれ、新しい計算スキームの検証に使われるようになった<sup>6)</sup>。この会議で決定された入口境界条件は十分発達した流れであるが、B.F.Armalyの推測が正しいならば、この条件で計算された結果と実験結果との比較検討を行うには十分な注意が必要である。

上述のような点に注目して、ナビエ・ストークス方程式を数値的に解き、この流れを調べた。また、著者らの可視化実験<sup>7)</sup>の一例を示し、計算結果との比較を行った。

## 記号

- $U$  : 平均流速 (代表速度)
- $H$  : ステップ上流の流路幅 (代表長さ)
- $h$  : ステップ高さ
- $h_s$  : ステップ比 ( $=h/H$ )
- $u$  : 流速の $x$ 方向成分
- $v$  : 流速の $y$ 方向成分
- $p$  : 圧力
- $\psi$  : 流れ関数 ( $u = \partial\psi/\partial y$ ,  $v = -\partial\psi/\partial x$ )
- $\omega$  : 渦度 ( $=\partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ )
- $\nu$  : 動粘性係数
- $\rho$  : 密度
- $Re$  : レイノルズ数 ( $=UH/\nu$ )
- $Re_h$  : ステップ・レイノルズ数 ( $=Uh/\nu$ )

$X$  : 循環渦領域の長さ (ステップから再付着点までの距離)

## 2. モデルと基礎方程式

計算モデルはFig. 1のようなステップ高さ $h$ の後ろ向きステップをもつ2次元流路である。そうすると、流れを記述する方程式は、連続の式とナビエ・ストークスの方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v \quad (3)$$

ここで、 $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$

で与えられる。ここで、方程式(1)、(2)および(3)は代表速度を平均流速 $U$ 、代表長さをステップ上流の流路幅 $H$ に選んだ無次元表示である。また、 $Re$ は $Re = UH/\nu$ で定義されるレイノルズ数であり、無次元時間 $t$ および無次元圧力 $p$ はそれぞれ $H/U$ および $\rho U^2/2$ で無次元化した。

流路の幾何学的形状はGAMM-workshopで決定された入口境界からステップまでの距離 $L_{in} = 3$ 、ステップから出口境界までの距離 $L = 22$ 、ステップ比 $h_s = h/H = 0.5, 1.0$ に従った<sup>8)</sup>。ただし、ステップによる下流への影響は $Re$ 数および $h_s$ の値により異なるので、低 $Re$ 数および小さな $h_s$ の値に対しては $L < 22$ とした。 $L$ の値はステップ下流の循環渦長さの2倍以上の長さを取れば良いことが予備計算で確かめられており<sup>9)</sup>、また $L_{in}$ についても低 $Re$ 数あるいは小さな $h_s$ に対しては $L_{in} < 3$ でよいことを確かめた。

計算した $Re_h$ 数は $Re_h = 25 \sim 250$ であり、 $h_s$ の循環渦長さにおよぼす影響を調べるため $h_s = 0.1 \sim 1.0$ についても

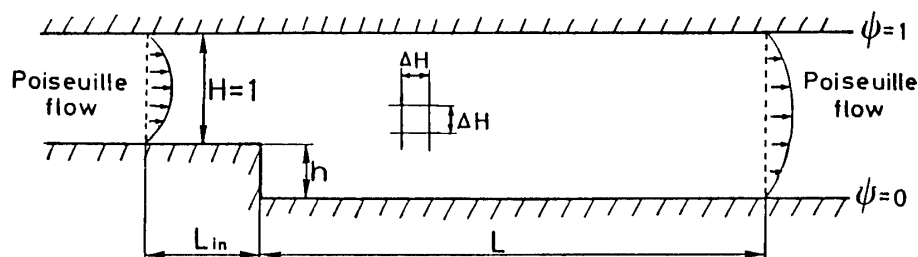


Fig. 1 Computational model for the backward facing step

Table 1. Parameter defining geometry of the computational model and calculated condition

$h_s$ ; step ratio  $h/H$ ,  $L_{in}$ ; length measured from the step to the inlet of calculation domain,  $L$ ; length measured from the step to the end of calculation domain,  $Re_h$ ; Reynolds number based on the step height (step Reynolds number),  $H$ ; mesh constant

$h_s$	$L_{in}$	$L$	$Re_h$	$\Delta H$
1.0	2	40	25, 50, 100, 150	
	3		200, 250	
0.7	2	40	50, 100	0.05
	3		200	
0.5	1	8	1, 5, 12.5	
	2	15	25, 40, 55, 70, 85	
	3	31	100, 150, 200, 250	
0.4	1	11	50, 100, 200	0.04
0.25	1	14	50, 60, 70, 80, 90, 100, 200	0.05
0.2	1	10	50, 100, 200	0.04
0.1	1	6	50, 75, 100, 125	0.02
		10	150, 175, 200	

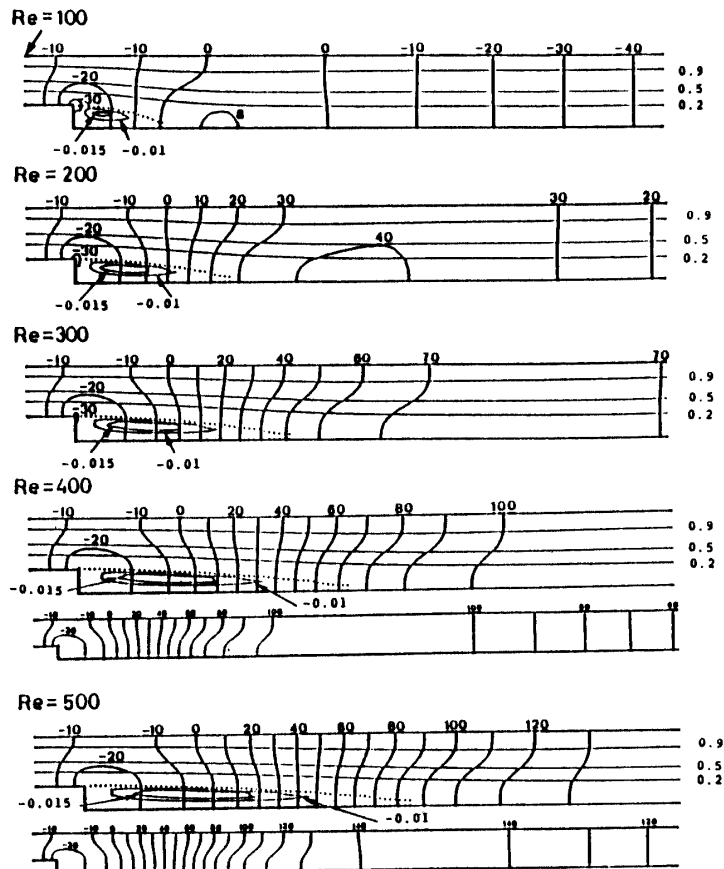


Fig. 2 Stream line and pressure distribution

計算した. Table 1に計算に用いた $L_{in}$ ,  $L$ , 格子間隔 $\Delta H$ そして $Re_h$ 数を示した.

実際の計算は方程式(1), (2), (3)に過度 $\omega$ と流れ関数 $\psi$ を導入した.

$$\omega = -\nabla^2 \psi \quad (4)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad (5)$$

ここで $\partial(\psi, \omega)/\partial(x, y)$ はヤコビアンで与えられる過度輸送方程式を有限差分法で解いた. 計算に用いた差分格子は正方格子である (Table 1 参照).

境界条件は入口境界および出口境界で, 流れは十分発達した流れ (2次元ポアズイユ流) とし, 壁で粘着条件 (流れはすべり無し) とした. 後で述べるが, 入口境界条件の違いによるステップ下流の循環渦におよぼす影響を調べる目的で,  $h_s=0.5$ について, 3種類の入口境界条件についても計算した.

### 3. 結果

数値解で得られた $\psi$ ,  $\omega$ を用い, 流線, 等過度分布, 流速分布, 等圧力分布および循環渦の特性 (渦中心, 渦の長さ) について他の研究結果と比較検討した. この報告では, 流線, 等圧力分布そして循環渦長さを示し議論する. 圧力は, 数値解で得られた $\psi$ ,  $\omega$ を用い,

$$Re \times p(x, 1) = -2 \int_0^x \{ Re \times (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}) - \nabla^2 u \}_{y=1} dx \quad (6)$$

$$Re \times p(x, y) = -2 \int_1^y \{ Re \times (u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}) - \nabla^2 v \}_{x=x} dy + p(x, 1) \quad (7)$$

で数値的に積分して得られる無次元圧力 $Re \times p$ , で示した. ここで圧力の基準はステップから上流へ1の距離 (この位置を $x=0$ とし) の上壁で $p=0$ とした.

流れの再付着点は $(\partial u / \partial y)_{at \ wall} = 0$ で決定し, ステップからこの点までの距離 $X$ を循環渦長さとした.

#### 3.1 流線と等圧力線

Fig. 2は流れの様子を示したもので, 得られた結果のうち,  $h_s=0.5$ ,  $Re=100, 200, 300, 400, 500$ を選んで流線と等圧力線を合わせて図示した.

図から,  $Re=100, 200$ では再付着点下流に高圧力の閉じた領域が存在する.  $Re=300$ では高圧力の閉じた領域はなく, 再付着点下流の高圧力領域は流路断面全域に広がる.  $Re$ 数の小さい場合, この高圧力領域は局所的であるが,  $Re$ 数の増加とともに, その領域は流路断面全域および下流に広がる. これらの傾向は, 図示し

た精度の範囲では他の計算結果と良く一致している<sup>10)</sup>.

#### 3.2 循環渦長さ $X/h$ とステップ・レイノルズ数 $Re_h$ との関係

Fig. 3は $X/h$ と $Re_h$ との関係を示したもので, GAMM-workshopで決められた幾可学的形状で, しかも実験や計算が過去によく行なわれている $h_s=0.5, 1.0$ を選んでプロットした. 図から,  $X/h$ は $Re_h$ の関数 $X/h=f(Re_h)$ で,  $X/h$ は $Re_h$ の2次関数とみてよい. I.J. Sobey<sup>11)</sup>はこれを1次関数と近似しているが, 広範囲の $Re_h$ について表現するには無理があり,  $Re_h$ の低い領域で,  $X/h$ は直線よりずれている. 図のG. Dhattらの計算結果<sup>12)</sup>(三角形ペナルティ有限要素を用いたニュートンラプソン法)と著者らの計算結果 ( $\psi$ - $\omega$ 式の有限差分法)は良く一致しており, 計算手法による差はない. また, J.L. Kuenyらの実験結果<sup>13)</sup>とも良く一致している.  $h_s=0.5$ と $h_s=1.0$ を比較すると, 明らかに異なった曲線をとる. これは, 循環渦長さ $X/h$ は単なる $Re_h$ 数のみの関数でないとの, B.F. Armalyの推測を裏づけるものである.

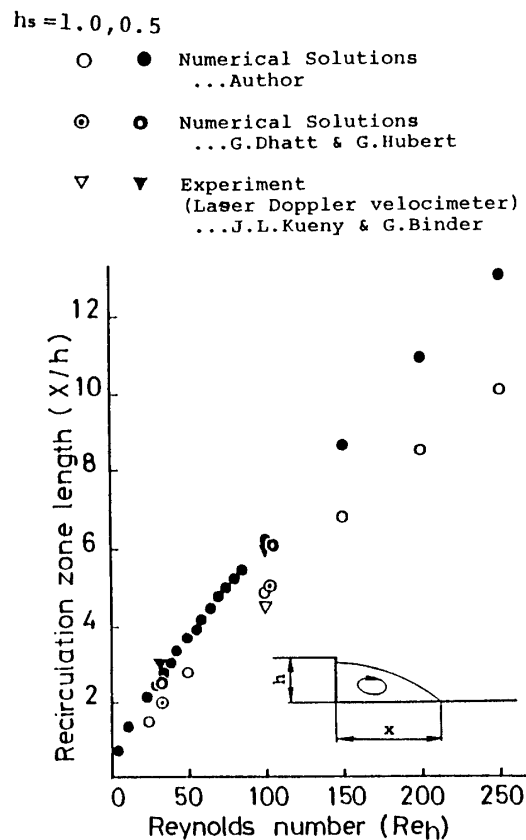


Fig. 3 Recirculation zone length (Comparison with other numerical and experimental results,  $h_s=0.5$  and  $h_s=1.0$ )

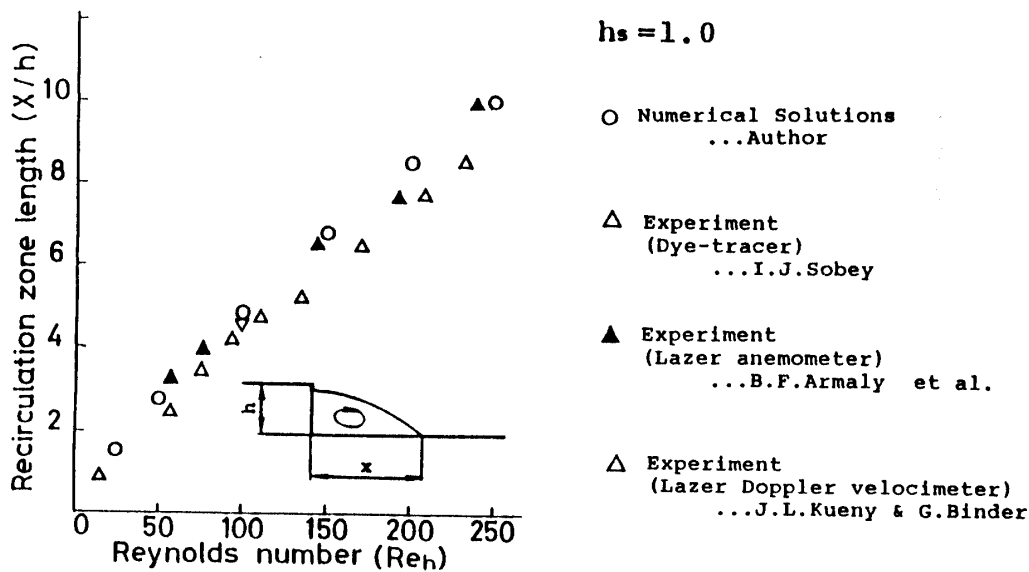


Fig. 4 Recirculation zone length (Comparison with other experimental results,  $h_s=1.0$ )

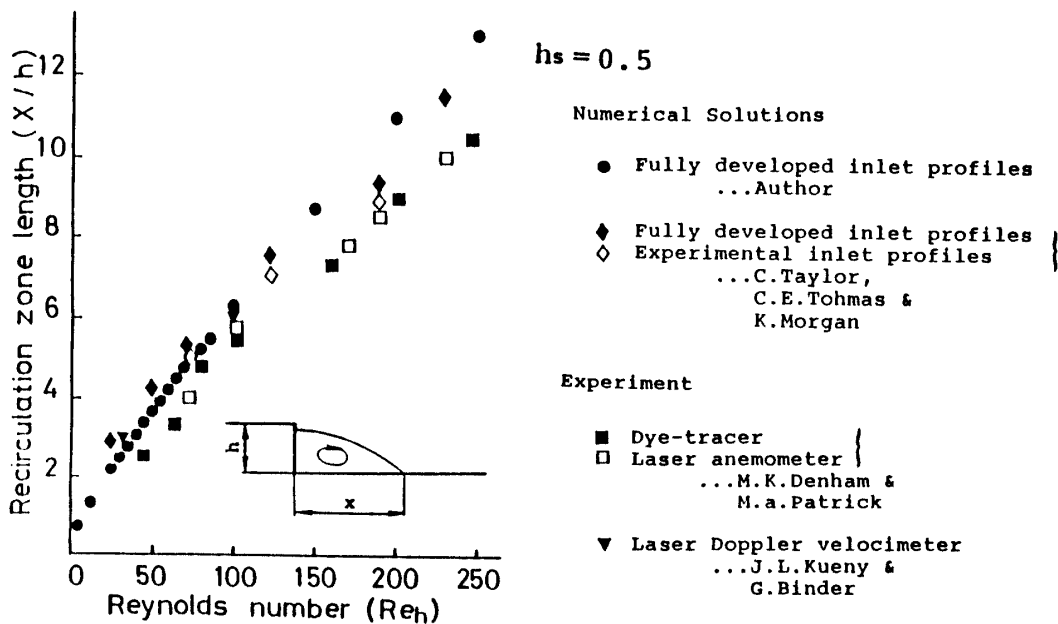


Fig. 5 Recirculation zone length (Comparison with other numerical and experimental results,  $h_s=0.5$ )

Fig. 4は $h_s=1.0$ の場合を選んでプロットしたもので、著者らの計算結果と他の実験結果との比較を行なったものである。図から、著者らの計算結果と他の実験結果は良く一致している。ただし、I.J.Sobeyの結果は全体的に循環渦長さ $X/h$ が小さい値である。これは、彼の実験がトレーサーを用いた可視化実験によるもので、再付着点の決定の困難さが一原因であると考えられる。

Fig. 5で $h_s=0.5$ の場合について検討する。C. Taylorらの計算結果(有限要素法)<sup>14)</sup>と著者らの計算結果(有限差分法)とを比較すると、同じ入口境界条件(十分発達した流れ)とした場合の結果は一致している。したがって、計算手法による差はないことが明らかとなった。ただし、境界条件を実験値の流速分布とした場合は、著者らの結果と彼ら自身の結果(境界

条件が十分発達した流れ)とも高レイノルズ数の領域で一致しない。したがって、境界条件の取り扱いには十分な検討考察が必要であると考え<sup>9)</sup>。M. K. Denhamらの実験結果<sup>9)</sup>は他の結果と比べて小さな $X/h$ の値となっている。これは、彼らの実験条件が他の実験、計算の境界条件と異なることが原因であると推測する。つまり、彼らの実験によると計算の入口境界の位置で流れは十分に発達した流速分布となっておらず、このことが原因であると考えられる。このことに関しては、後で若干の検討考察を行う (3.3参照)。

著者らも、十分発達した流れ場に設けた後ろ向きステップ流れについて、ステップ後流に形成される循環渦に注目し、可視化実験を行ない確かめた<sup>7)</sup>。その実験結果の一例をFig. 6に示した。実験結果は著者らの計算結果と全く一致する。

上で示した結果から考えると、B.F. Armalyらの推測は妥当なものであると思われる。

### 3.3 入口流速分布の循環渦に与える影響

先に少しふれたが、ステップ上流で流れが十分に発

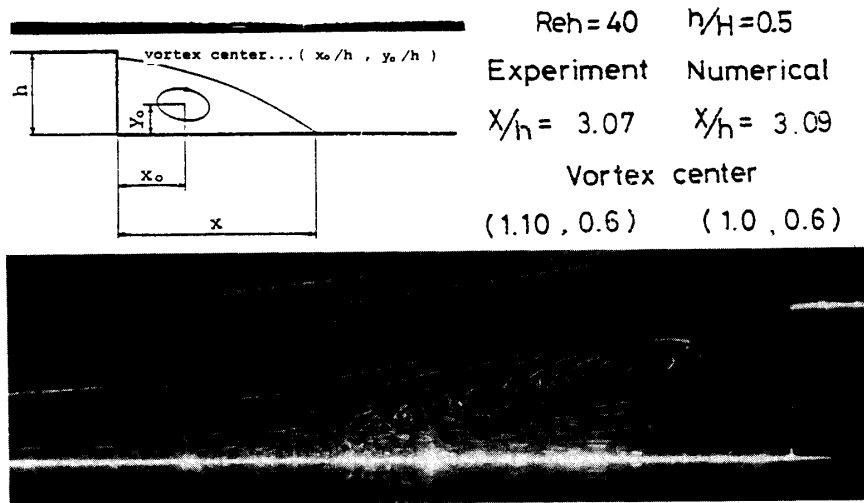


Fig. 6 Visualized picture of recirculating flow pattern photographed by authors ( $h_s=0.5$ ,  $Re_h=40$ ,  $\rightarrow$ ; reattachment point, Flow is light to left)

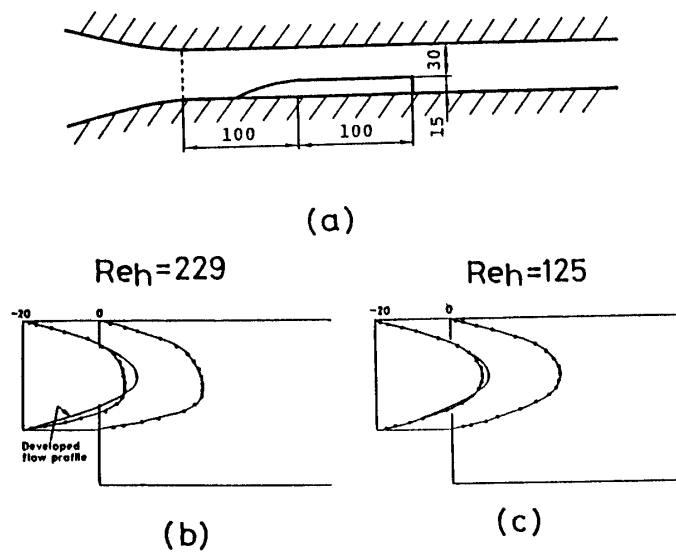


Fig. 7 Experimental condition of M. K. Denham et al.  
 (a) Schematic of water tunnel,  
 (b) Velocity profile for  $Re_h=229$ ,  
 (c) Velocity profile for  $Re_h=125$

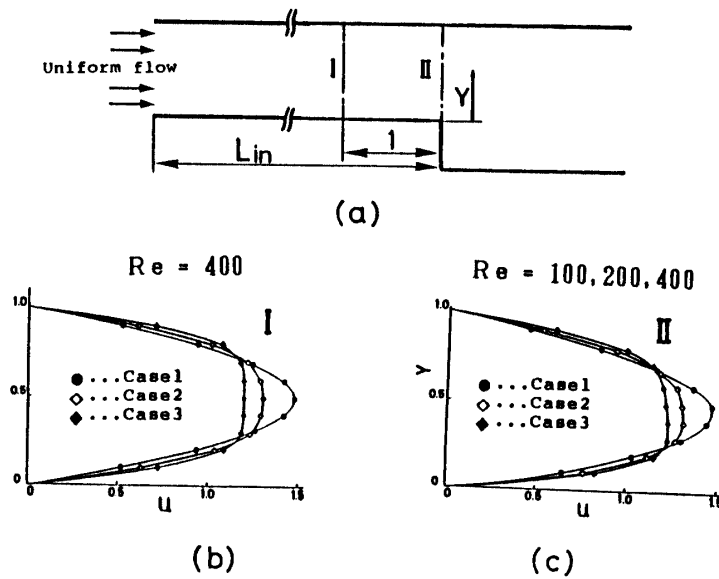


Fig. 8 Numerical results for the inlet length flow  
 (a) Computational model for the inlet length flow,  
 (b) Velocity profile for the inlet length flow at the location I,  
 (c) Velocity profile for the inlet length flow at the location II

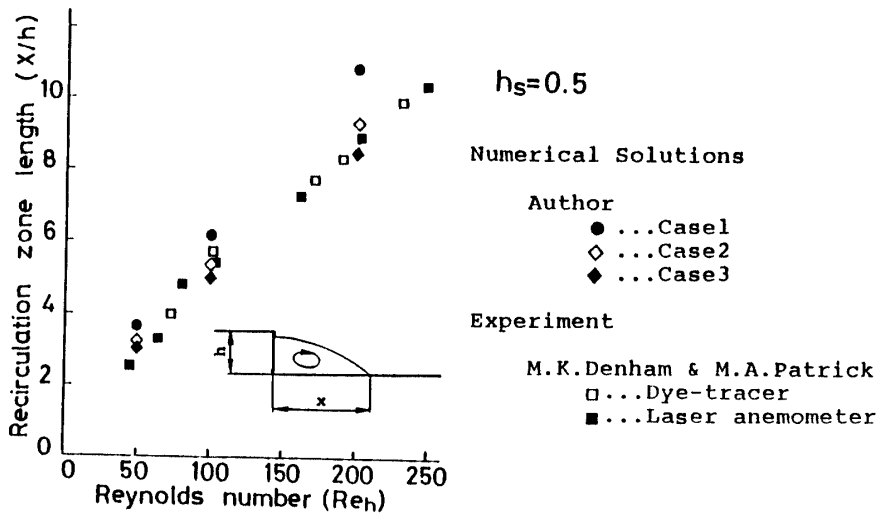


Fig. 9 Recirculation zone length (Comparison with Denham and Patric's results)

達していない場合、計算結果、実験結果ともに、 $X/h$  は小さな値となる結果であった。このことをさらに確かめるため、M.K.Denhamらの実験<sup>3)</sup>を数値的にシミュレートし、調べた。Fig. 7は彼らの用いた測定流路の概略とステップ近傍の流速分布を示したものである。図から、流路の入口からステップまでの距離は、十分小さなレイノルズ数を除いて、十分発達した流れを得るには、不十分である。確かに彼らの結果も十分発達

した流れの流速分布となっていない(Fig. 7 (b), (c)参照)。この流速分布を入口境界条件として計算し、彼らの実験結果との比較を行い、著者らの計算法を確かめると同時に、あわせて、ステップ入口での流れが循環渦におよぼす影響を調べる。

入口流速分布は、次のようにシミュレートした。Fig. 8 (a)に示すように、一様な流速分布で流入した助走区間流を考え、入口からステップまでの距離 $L_{in}$ を適当に

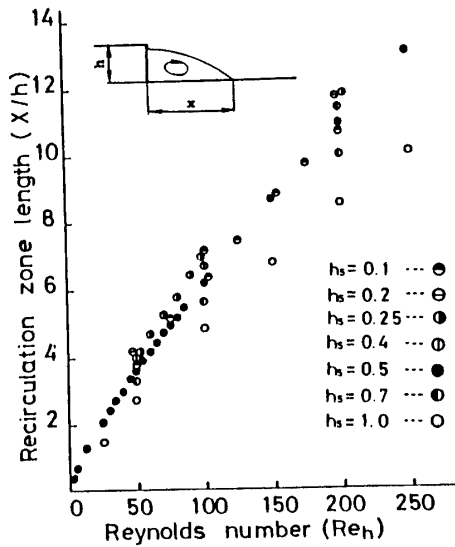


Fig. 10 Recirculation zone length for the various step ratio ( $h_s = 0.1 \sim 1.0$ )

選ぶことにより、ステップ近傍の流速分布が彼らの結果と類似した流速分布となるようにする。Fig. 8 (b), (c)のCase 2., 3.はその結果を示したものである。また、Case 1.は比較のためIの位置で十分発達した流れの流速分布となるようにしたものである。

Fig. 9は、入口境界条件をCase 1., 2., 3.の流速分布としたときの計算結果とM. K. Denhamらの結果との比較をしたもので、循環渦長さ $X/h$ と $Re_h$ 数の関係で示した。図から、Case 1.はCase 2., 3.に比べて循環渦は伸びた値であり、また、Case 2., 3.はM. K. Denhamらの実験結果と良く一致する。このことから、ステップ入口での流れはステップ下流の渦形成に大きな影響をおよぼし、B. F. Armalyらの推測は妥当と考えられる。また、ステップ入口での流れが発達した流れであるほど、循環渦はよく伸びると言える。

### 3.4 循環渦におよぼすステップ比 $h_s$ の影響

ステップ比 $h_s = 0.5$ と $h_s = 1.0$ の結果から見ると、 $h_s = 0.5$ の方が $h_s = 1.0$ に比べて循環渦は伸びる、すなわち、ステップ下流の渦形成にステップ比 $h_s$ が影響することが分かった。B. F. Armalyは循環渦長さ $X/h$ は $h/H = h_s$ ,  $H/(H+h) = 1/(1+h_s)$ などの関数でもあると述べている<sup>5)</sup>。そこで、 $h_s = 0.1 \sim 1.0$ の値 (Table 1参照) について計算し、循環渦におよぼす影響を調べた。

それらの結果をFig. 10とFig. 11に示した。図10は $X/h$ と $Re_h$ の関係を示したもので、図から $X/h$ は $Re_h$ のみでは整理できないことがわかる。

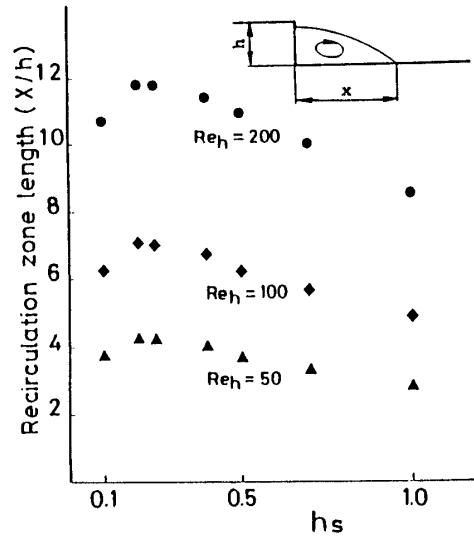


Fig. 11 Relation between the recirculation zone length and step ratio as a parameter  $Re_h$

したがって、 $X/h$ は単に $Re_h$ のみの関数でなく、相似則を成り立たせるためには何らかの形状関数を導入する必要がある。Fig. 11は $X/h$ と $h_s$ の関係を $Re_h$ をパラメータにして示したものである。この計算結果からはステップ比 $h_s$ が約0.25で渦は最も良く伸びることが分かる。

### 4. 検討とまとめ

以上の結果をまとめると、

- (1) ステップ下流に形成される循環渦長さ $X/h$ はステップ・レイノルズ数 $Re_h$ の増加とともに大きくなる。
- (2) ステップ比 $h_s$ が固定されている場合、循環渦長さ $X/h$ はステップ・レイノルズ数 $Re_h$ の2次関数として表わせる。
- (3) 循環渦長さ $X/h$ は単にステップ・レイノルズ数 $Re_h$ のみの関数でなく、ステップ比 $h_s$ にも依存する。
- (4) ステップ入口の流れが発達した流れである方が、循環渦はよく伸びる。
- (5) ステップ比 $h_s = 0.1 \sim 1.0$ の範囲で、循環渦は $h_s = 0.25$ でもっともよく伸びる。
- (6) B. F. Armalyの推測、すなわち、循環渦長さ $X/h$ を表現するには $Re_h$ 数に加えて何らかの形状関数の導入が必要となる。

である。

上述したことから考えて、後ろ向きステップ流れも十分に調べつくされているとは言いきれないと考える。



ここで取扱った問題は、層流でしかも2次元流路における後ろ向きステップ流れであり、比較的単純で理解しやすい構造の流れ場である。それにもかかわらず、なお議論の余地があると思う。また、流れが乱流になると、考慮すべき因子は多くなり、増々問題は複雑になり、研究すべき多くの問題を残していると考ええる。

この論文で取扱った主なる問題は、ステップ下流に形成される循環渦領域についてである。このとき、最も重要となるのは再付着点の決定についてであり、流れが層流であるので、乱流ほどその決定は困難ではない。またその定義も明確であり層流における再付着点に関する信頼性は高い。この研究で取扱ったような、層流、2次元流路内定常流、十分発達した流れの領域にステップを置く、そして再付着点の決定が明確であるなど、比較的条件的そろったもとの測定および計算された結果を用いても、循環渦長さ $X/h$ を表現する関数関係は明確でない。この関数関係に関するパラメータとして、いくつか考えられるが、系統的な検討不足であるので、この論文では議論をさける。

さらに、流れの3次元性が問題になる場合、あるいは、2次元流であっても、外部問題、例えば境界層における後ろ向きステップ流などを含めて普遍則を考えると、問題は簡単ではない。しかし、このことは工学的に重要な問題で、その解明への新たな努力が必要であると考ええる。

本論文で調べた結果から、強いて結論を述べるとすれば、そのぞれの実験結果あるいは計算結果の比較検討を行うには、使用した実験モデルあるいは計算モデルの幾可学的相似とステップ入口流速分布あるいは圧力分布などの流体力学的相似が満足されているかどうかの確認が必要である。

最後に、研究の遂行にあたり、名古屋大学工学部の中村育雄教授に貴重なご助言ならびに文献を手配して

頂いた。また、広島工業大学機械工学科の西茂夫助教授に有益な討論を頂いた。記して感謝の意を表します。

#### 参考文献

- 1) D. E. Abbott & S. J. Kline : Trans. ASME. D, J. Basic Engng **84**, 317 (1962)
- 2) R. J. Goldstein, V. L. Eriksen, R. M. Olson & E. R. G. Eckert : Trans. ASME. D, J. Basic Engng **92**, 732 (1970)
- 3) M. K. Denham & M. A. Patrick : Trans. Inst. Chem. Engrs **52**, 361 (1974)
- 4) J. K. Eaton & J. P. Johnston : AIAA J. **19-9**, 1093 (1981)
- 5) B. F. Armaly, F. Durst, J. C. F. Pereira & B. Schönung : J. Fluid Mech. **127**, 473 (1983)
- 6) K. Morgan, J. Periaux & F. Thomasset : Notes on Numerical Fluid Mechanics, vol. 9 "Analysis of Laminar Flow over a Backward Facing Step" Friedr. Vieweg & Sohn, (1984) p.1
- 7) 中西助次, 大坂英雄 : 広島工業大学研究紀要, **22-26** (1988)
- 8) 文献 6) の p. 372~404
- 9) 中西助次, 大坂英雄 : 広島工業大学研究紀要, **22-26** (1988)
- 10) 例えば文献 6) の p.372~404
- 11) I. J. Sobey : J. Fluid Mech. **151**, 395 (1985)
- 12) G. Dhatt & G. Hubert : 文献 6) の p.162
- 13) J. L. Kueny & G. Binder : 文献 6) の p.32
- 14) C. Taylor & K. Morgan : Computational Techniques in Transition and Turbulent Flow, vol. 2, Pineride P. L. (1981) p.283

(昭和62年10月7日受理)