

境界要素法による弾塑性解析

上西 研*・河野 俊一*・清水 茂俊*

Elasto-Plastic Stress Analysis by Boundary Element Method

Ken KAMINISHI, Shun-ichi KAWANO and Shigetoshi SHIMIZU

Abstract

The finite element method (FEM) is one of the most important and useful methods of the numerical analyses in the all fields of the engineering problems as well as structural analyses by using the large capacity of computers.

On the other hand, integral equation technique have been considered to be a different type of analytical method through the works of Russian authors, such as Muskhelishvili, Miklim, et al. The work at the Southampton University group culminated in the first book in 1978 for which the title "Boundary Element Method (BEM)" was used. BEM was demonstrated in linear elastic problems by Brebbia and more recently the work of BEM was extended to elasto-plastic problems. However, the accuracy of BEM calculation for elasto-plastic problems has not yet been clarified perfectly.

This investigation presented the formulation of elasto-plastic boundary element analysis by divergence's theorem. The issue of accuracy of the solutions calculated by the BEM programs was discussed for uni-axial tension and contact problems in the range of elastic and elasto-plastic problems, respectively.

1. 諸 言

近年、構造解析のみならず、極めて広い分野において、汎用性に富む有効な数値解析法として、有限要素法 (FEM) が用いられている。これに対して、積分方程式法に FEM 的な離散化を応用した境界要素法 (BEM) が、FEM を代表とする領域型解法にない、さまざまな利点を有するために注目されるようになった。しかし、BEM による非線形問題の解析例は少なく、また計算精度の検討も十分でないように思われる^{1)~6)}

そこで、本報告では、BEM による弾塑性解析の基礎式となる積分方程式を Divergence の定理⁷⁾ よりエネルギーの面から導くことによって、従来の重み付き残差法によって定式化された弾塑性境界積分方程式の物理的意味を明確にした。次に、BEM の計算精度を検討するために、弾塑性 BEM のプログラムを作成し⁸⁾⁹⁾ 以下に示すような計算を行った。まず、塑性域の領域積分の精度が解に及ぼす影響を調べるため、一様な引張り荷重が作用する平板の弾塑性解析を行い、その結

果を理論解と比較した。さらに、弾塑性接触問題を解析し、FEM 計算結果との比較検討を行った。

2. 弾塑性境界要素法の基礎式の導入

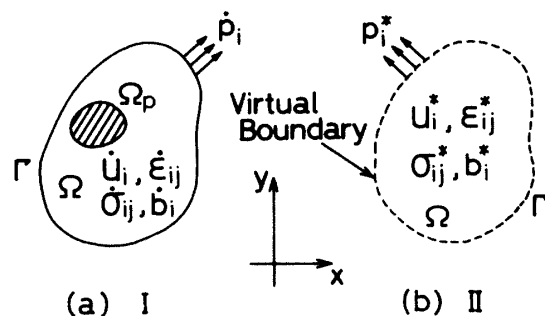


Fig. 1

Fig. 1 に示すように、独立な 2 つの系を考える。(a) に示す系 I は計算の対象となる系であり、領域を Ω 、境界を Γ および塑性域を Ω_p とする。(b) に示す系 II は無限弾性平面の系であり、この系に系 I と同じ Ω および Γ を仮想する。また、応力増分 σ_{ij} 、ひずみ増分 ϵ_{ij} 、変位増分 u_i 、トクラクション増分 p_i および体積力増分 b_i を系 I では \cdot 、系 II では $*$ を付けて表す。この 2 つ

*機械工学科

の系に対して Divergence の定理より次式が成り立つ.

$$\iint_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} u_i^* \dot{p}_i d\Gamma + \iint_{\Omega} \dot{u}_i b_i^* d\Omega \quad \dots\dots(1)$$

あるいは

$$\iint_{\Omega} \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \dot{u}_i p_i^* d\Gamma + \iint_{\Omega} \dot{u}_i b_i^* d\Omega \quad \dots\dots(2)$$

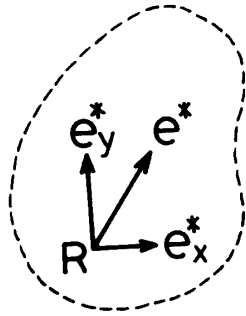


Fig. 2

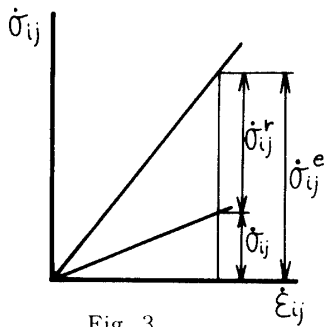


Fig. 3

ここで, Fig. 2 のように, 系 II の R 点に単位体積力 e^* が作用する場合を考えると, 式(2)の b_i^* は $\delta(R) e_i^*$ となるので, 式(2)の最後の項は次のように表される.

$$\iint_{\Omega} \dot{u}_i e_i^* \delta(R) d\Omega = \dot{u}_i(R) e_i^*(R) \quad \dots\dots(3)$$

なお, $\dot{u}_i(R)$ は R 点の変位増分である.

式(1)から式(2)を引いて, さらに式(3)を用いると次式を得る.

$$\iint_{\Omega} (\dot{\sigma}_{ij} \epsilon_{ij}^* - \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij}^*) d\Omega = \int_{\Gamma} (\dot{p}_i u_i^* - \dot{u}_i p_i^*) d\Gamma - \dot{u}_i(R) e_i^*(R) \quad \dots\dots(4)$$

さらに, 塑性域 Ω_p 内における $\dot{\sigma}_{ij}$ を Fig. 3 のように定義する. すなわち,

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \dot{\sigma}_{ij}^r \quad \dots\dots(5)$$

したがって, 領域 Ω 全体で考えると

$$\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^e - \delta(\Omega_p) \dot{\sigma}_{ij}^r \quad \dots\dots(6)$$

ただし, $\delta(\Omega_p)$ は Ω_p 内では 1, それ以外の領域では 0 となる関数である. 式(6)を式(4)に代入すると

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \{ (\dot{\sigma}_{ij}^e - \delta(\Omega_p) \dot{\sigma}_{ij}^r) \epsilon_{ij}^* - \dot{\epsilon}_{ij} \sigma_{ij}^* \} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (\dot{p}_i u_i^* - \dot{u}_i p_i^*) d\Gamma - \dot{u}_i(R) e_i^*(R) \quad \dots\dots(7) \end{aligned}$$

ここで

$$\iint_{\Omega} \{ \dot{\sigma}_{ij}^e \epsilon_{ij}^* - \sigma_{ij}^* \dot{\epsilon}_{ij} \} d\Omega = 0 \quad \dots\dots(8)$$

式(8)を式(7)に代入すると次式のようになる.

$$- \iint_{\Omega_p} \epsilon_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}^r d\Omega_p = \int_{\Gamma} (\dot{p}_i u_i^* - \dot{u}_i p_i^*) d\Gamma - \dot{u}_i(R) e_i^*(R) \quad \dots\dots(9)$$

式(9)は塑性域のみに関する領域積分 $\iint_{\Omega_p} \epsilon_{ij}^* \dot{\sigma}_{ij}^r d\Omega_p$

を左辺に残している. なお, u_i^*, p_i^* および ϵ_{ij}^* は単位力の作用点 R と観測点 \bar{R} による 2 点関数であるので, これらは $e_k^*(R)$ の線形結合として次式のように表すことができる.

$$\left. \begin{aligned} u_i^*(\bar{R}, R) &= u_{ik}^*(\bar{R}, R) e_k^*(R) \\ p_i^*(\bar{R}, R) &= p_{ik}^*(\bar{R}, R) e_k^*(R) \\ \epsilon_{ij}^*(\bar{R}, R) &= \epsilon_{ijk}^*(\bar{R}, R) e_k^*(R) \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

ただし, u_{ik}^*, p_{ik}^* および ϵ_{ijk}^* は R 点に k 方向単位力が作用した場合の観測点での変位, 表面力およびひずみであり, 平面応力問題に対しては, 次式で与えられている¹⁰⁾

$$\left. \begin{aligned} u_{ik}^*(\bar{R}, R) &= \frac{1+\nu}{4\pi E} \left\{ (3-\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ik} + (1+\nu) r_i r_k \right\} \\ p_{ik}^*(\bar{R}, R) &= -\frac{1}{4\pi E} \left\{ (1-\nu) \delta_{ij} + 2(1+\nu) r_i r_k \right\} \frac{\partial r}{\partial n} \\ &\quad + (1-\nu) (r_i n_k - r_k n_i) \\ \epsilon_{ijk}^*(\bar{R}, R) &= \frac{1+\nu}{4\pi E r} \left\{ (1-\nu) (r_i \delta_{kj} + r_j \delta_{ki}) \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu) r_k \delta_{ij} + 2(1+\nu) r_i r_j r_k \right\} \end{aligned} \right\} (11)$$

観測点 \bar{R} を領域内部では Q, 境界上では P とすると, 式(9)および式(10)より

$$\begin{aligned} & - \iint_{\Omega_p} \epsilon_{ij}^*(Q, R) \dot{\sigma}_{ij}^r(Q) e_k^*(R) d\Omega_p \\ &= \int_{\Gamma} \{ \dot{p}_i(P) u_{ik}^*(P, R) e_k^*(R) - \dot{u}_i(P) p_{ik}^*(P, R) e_k^*(R) \} d\Gamma \\ &\quad - \dot{u}_k(R) e_k^*(R) \quad \dots\dots(12) \end{aligned}$$

$e_k^*(R) \neq 0$ であるので, 式(12)は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{u}_k(R) &= \int_{\Gamma} \{ \dot{p}_i(P) u_{ik}^*(P, R) - \dot{u}_i(P) p_{ik}^*(P, R) \} d\Gamma \\ &\quad + \iint_{\Omega_p} \epsilon_{ijk}^*(Q, R) \dot{\sigma}_{ij}^r(Q) d\Omega_p \quad \dots\dots(12') \end{aligned}$$

式(12')の e^* の作用点 R を境界までもってくる, 特異点を考慮して次の境界積分方程式が得られる.

$$C_{ni} \dot{u}_n(P_0) = \int_{\Gamma} \{ \dot{p}_i(P) \dot{u}_n^*(P, P_0) - \dot{u}_i(P) p_{,n}^*(P, P_0) \} d\Gamma + \iint_{\Omega_p} \varepsilon_{ij,n}^*(Q, P_0) \dot{\sigma}_{ij}^*(Q) d\Omega_p \quad \dots\dots(13)$$

ただし

$$C_{ni} \dot{u}_n(P_0) = \frac{1}{4\pi} \begin{bmatrix} 4\pi - 2\alpha - \frac{1+\nu}{2} \sin 2\alpha & -(1+\nu) \sin^2 \alpha \\ -(1-\nu) \sin^2 \alpha & 4\pi - 2\alpha + \frac{1+\nu}{2} \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

一方、応力とひずみの関係より次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_{xx}^e &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial \eta} \right) \\ \dot{\sigma}_{yy}^e &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\nu \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial \eta} \right) \\ \dot{\tau}_{xy}^e &= \tau_{xy}^e = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial \xi} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(14)$$

式(12)'を式(14)に代入すると、次の内部応力をもとめる積分方程式を得る。

$$\dot{\sigma}_{ij}^e = \int_{\Gamma} G_{nii} \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} H_{nii} \dot{u}_n d\Gamma + \iint_{\Omega_p} \varepsilon_{ij,n}^* \dot{\sigma}_{ni}^* d\Omega_p + g_{ij} \quad \dots\dots(15)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} G_{nii} &= \frac{1+\nu}{4\pi E} \left\{ \frac{1-\nu}{1+\nu} (\delta_{ni} r_{,j} + \delta_{jn} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,n}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,n} \right\} \\ H_{nii} &= \frac{E}{4\pi r^2} \left[\frac{\partial r}{\partial n} \{-8r_{,i} r_{,j} r_{,n} + 2(\delta_{ni} r_{,j} + \delta_{ij} r_{,n} + \delta_{jn} r_{,i}) / (\delta_{ij} + \delta_{jn} + \delta_{ni}) + \{\delta_{ij} \{ \delta_{ni} r_{,n} + (\delta_{ni} - 1) r_{,j} \} + (1 - \delta_{ij}) \{ \delta_{ni} r_{,j} + (1 - \delta_{ni}) r_{,i} \} + 1\} - (\delta_{ni} n_{,j} - \delta_{jn} n_{,i} + \delta_{ij} n_{,i}) \right] \\ \varepsilon_{ij,n}^* &= \frac{1}{4\pi(1-\nu^2)} \{ (1-2\nu) (\delta_{in} \delta_{ij} + \delta_{jn} \delta_{ii} - \delta_{ij} \delta_{nn} + 2\delta_{ij} r_{,n} r_{,i}) + 2\nu (\delta_{ij} r_{,i} r_{,n} + \delta_{jn} r_{,i} r_{,i} + \delta_{in} r_{,j} r_{,i} + \delta_{ij} r_{,i} r_{,i}) + 2\delta_{ni} r_{,i} r_{,j} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,n} r_{,i} \} \\ g_{ij} &= \frac{1}{8(1-\nu)} \{ 2(4\nu - 3) \dot{\sigma}_{ij}^*(R) + (1-4\nu) \dot{\sigma}_{ii}^*(R) \delta_{ij} \} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

上で \dot{u}_i, \dot{p}_i が線形に変化すると仮定する。また、領域

3. 計算方法

3.1 積分方程式の離散化

本報告の計算には、式(14)および式(16)を用いるが、両式ともに解析的に解けるのは、極めて特殊な場合に限られており、一般的な問題を取り扱うためには、数値計算を必要とする。そこで、境界 Γ を数個の境界要素と呼ばれる線分に分割し、さらに、これらの境界要素上で \dot{u}_i, \dot{p}_i が線形に変化すると仮定する。また、領域

Ω_p もいくつかの小領域(セル)に分割し、 $\dot{\sigma}_{ij}^e$ がセル内で一定であると仮定する。

以上のように仮定すると、式(14)および式(16)は、それぞれマトリックスに変換することができ、これを簡略化すると次のように表すことができる。

$$[A] \{ \dot{u}_i \} = [B] \{ \dot{p}_i \} + [Q] \{ \dot{\sigma}_{ij}^e \} \quad \dots\dots(17)$$

$$\{ \dot{\sigma}_{ij}^e \} = [G] \{ \dot{p}_i \} - [H] \{ \dot{u}_i \} + [QS] \{ \dot{\sigma}_{ij}^e \} \quad \dots\dots(18)$$

ただし、 $[A]$ 、 $[B]$ 、 $[Q]$ 、 $[G]$ 、 $[H]$ 、 $[QS]$ はいずれもマトリックスの成分が幾何学的形状によって決定される2点関数の積分である。したがって、これらを以後、係数マトリックスと呼ぶ。

3.2 係数マトリックスの計算

上述の係数マトリックスは、解析的に求めることが非常に困難であるため、一般に数値積分が用いられている。その際、数値積分の精度が大きく解の精度に影響を及ぼすために、領域積分に対しては、解析的処理を施し、領域積分を一次元積分に変換した後、ガウス数値積分を用いた。以下にその方法を示す。

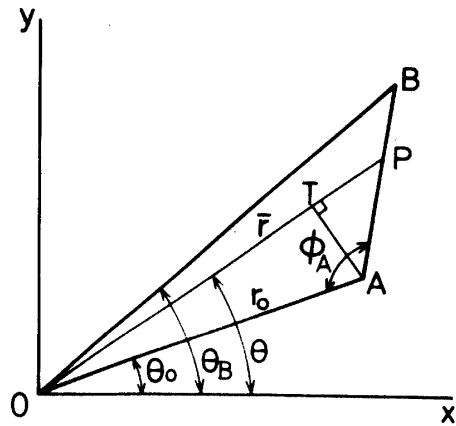


Fig. 4

Fig. 4 に示すように、原点 O から ΔOAB への領域積分を考える。x 軸から線分 OA への角度を θ_0 、線分 OA の長さを r_0 、 $\angle OAB$ を ϕ_1 、線分 AB 上の任意の点を P 、 OP の長さを r 、点 A から線分 OP へおろした垂線と線分 OP の交点を T 、x 軸から線分 OP へ角度を θ とすると、原点 O から線分 AB への長さ \bar{r} は次式で表すことができる。

$$\bar{r} = r_0 \cos(\theta - \theta_0) - \frac{r_0 \sin(\theta - \theta_0)}{\tan(\theta - \theta_0 + \phi_1)}$$

したがって、式(17)および式(16)の領域積分は次のようになる。

$$\iint_{\Delta OAB} \epsilon_{ijk}^* d\Omega = \frac{1+\nu}{4\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_B} \{ (1-\nu)(r_i \delta_{kj} + r_j \delta_{ki}) - (1+\nu)r_k \delta_{ij} + 2(1+\nu)r_i r_j r_k \} \bar{r} d\theta \quad \dots\dots(11)'$$

$$\iint_{\Delta OAB} \epsilon_{ijk}^* d\Omega = -\frac{1}{4\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_B} \{ (1-\nu)(\delta_{ik} \delta_{ij} + \delta_{jk} \delta_{ii} - \delta_{ij} \delta_{ki} + 2\delta_{ij} r_k r_i) + 2\nu(\delta_{ij} r_j r_k + \delta_{jk} r_i r_i + \delta_{ik} r_i r_j + \delta_{ji} r_i r_k) + 2(1+\nu)\delta_{ki} r_i r_j - 8(1+\nu)r_i r_j r_k \} \ln(\bar{r}) d\theta \quad \dots\dots(16)'$$

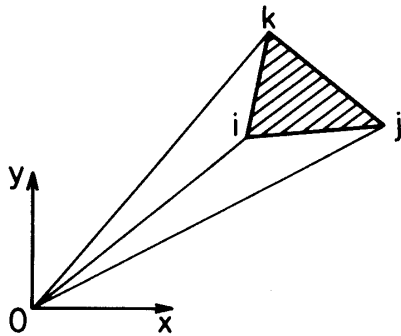


Fig. 5

しかし、Fig. 4 に示す ΔOAB は単位力の作用点が頂点にあるという特殊な場合であるので、一般性をもたせるために、さらに Fig. 5 に示すような Δijk を考える。被積分関数を $f(x, y)$ とおくと次式が成り立つ。

$$\iint_{\Delta ijk} f(x, y) d\Omega = \iint_{\Delta ois} f(x, y) d\Omega + \iint_{\Delta ojk} f(x, y) d\Omega + \iint_{\Delta oki} f(x+y) d\Omega \quad \dots\dots(19)$$

したがって、式(19)に式(11)および式(16)'を用いれば、任意の三角形の領域積分の計算に対して、ガウスの二次元積分を用いることが出来る。

3.3 計算手順

境界条件によって与えられる \dot{u}_i, \dot{p}_i の既知量を \bar{u}_i, \bar{p}_i として分離すると式(17)および式(18)は、それぞれ次式のようになる。

$$[\tilde{A}] \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{p}_i \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p}_i \end{Bmatrix} + [Q] \{\dot{\sigma}_{ij}^r\} \quad \dots\dots(20)$$

$$\{\dot{\sigma}_{ij}^e\} = [\bar{G}] \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p}_i \end{Bmatrix} - [\tilde{H}] \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p}_i \end{Bmatrix} + [QS] \{\dot{\sigma}_{ij}^r\} \quad \dots\dots(21)$$

さらに、弾性マトリックスを $[D^e]$ 、弾塑性マトリックスを $[D^p]$ とすると、 $\{\dot{\sigma}_{ij}^e\}$ と $\{\dot{\sigma}_{ij}^p\}$ の関係は次式で表される。

$$\{\dot{\sigma}_{ij}^r\} = \{ [D^e] - [D^p] \} \cdot [D^e]^{-1} \{\dot{\sigma}_{ij}^e\} \quad \dots\dots(22)$$

未知量 $\{\dot{u}_i, \dot{p}_i\}^T, \{\dot{\sigma}_{ij}^e\}$ および $\{\dot{\sigma}_{ij}^p\}$ に対して式(20), (21), (22)が成立するが、 $\{ [D^e] - [D^p] \}$ は逆行列が存在しない。したがって、式(22)は不定の方程式であるので、弾塑性問題を境界要素法で解析する場合、反復計算が必要である。そこで、計算効率を考慮して、式(20)を次のように変形する。

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{p}_i \end{Bmatrix} = [\tilde{A}]^{-1} [B] \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p}_i \end{Bmatrix} + [\tilde{A}]^{-1} [Q] \{\dot{\sigma}_{ij}^r\} \quad \dots\dots(23)$$

さらに、式(23)を式(21)に代入すると

$$\{\dot{\sigma}_{ij}^e\} = \{ [\bar{G}] - [\tilde{H}] [\tilde{A}]^{-1} [B] \} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{p}_i \end{Bmatrix} + \{ [QS] - [\tilde{H}] [\tilde{A}]^{-1} [Q] \} \{\dot{\sigma}_{ij}^r\} \quad \dots\dots(24)$$

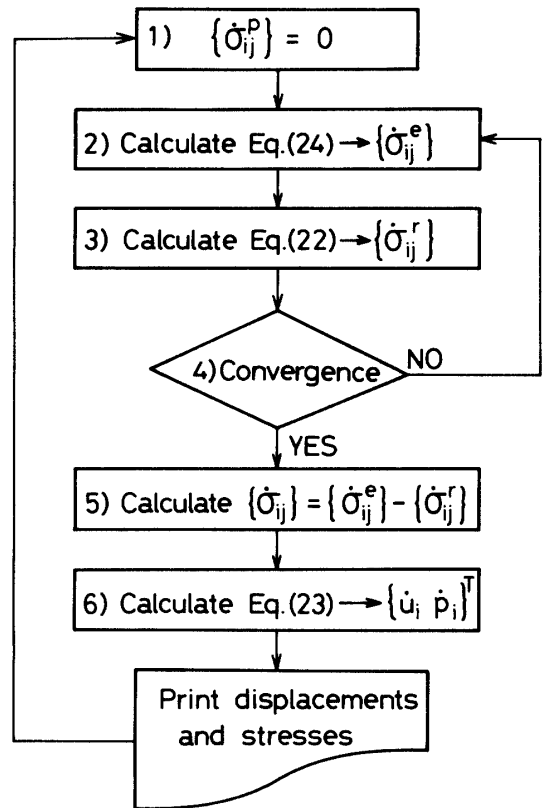


Fig. 6

Fig. 6 にその計算手順を示す。すなわち、

- 1) 反復計算の初めは $\{\dot{\sigma}_{ij}^p\} = 0$ とする。
- 2) 式(24)から $\{\dot{\sigma}_{ij}^e\}$ を計算する。
- 3) 2) で求めた $\{\dot{\sigma}_{ij}^e\}$ を式(22)に代入して $\{\dot{\sigma}_{ij}^p\}$ を計算する。

- 4) 収束判定を行う。収束条件を満足しない場合、2)にもどり、3)で求めた $\{\dot{\sigma}_{ij}\}$ を式(24)に代入して再計算を行う。この2)から4)のループを収束条件を満足するまで繰り返し、収束条件を満足した場合、ループから飛び出す。なお、収束条件は反復計算における相当塑性ひずみ増分が規準以内になった時とした。
- 5) $\{\dot{\sigma}_{ij}\} = \{\dot{\sigma}_{ij}\} - \{\dot{\sigma}_{ij}\}$ より真応力増分 $\{\dot{\sigma}_{ij}\}$ を求める。
- 6) 式(23)から $\{\dot{u}, \dot{p}_r\}^T$ を計算する。
- 7) 解の書き込みを行い、1)にもどり次の反復計算を行う。

4. 計算例

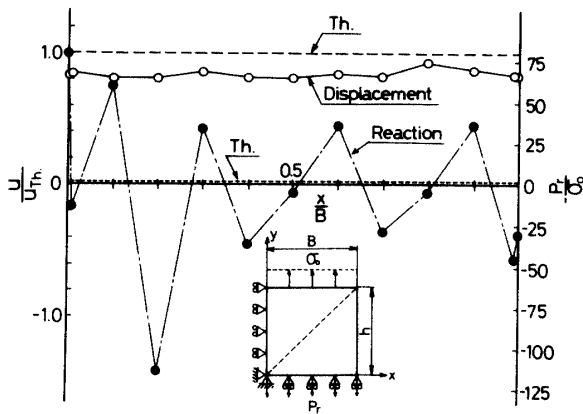


Fig. 7 Distributions of u and P_r using by numerical integration formulas for triangles

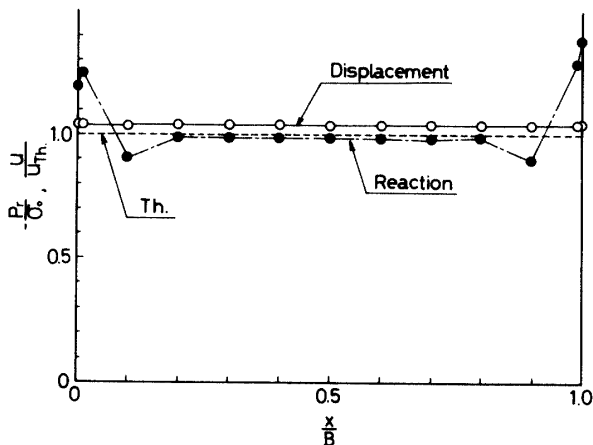


Fig. 8 Distributions of u and P_r using by Eq. [19]

弾塑性計算でのBEMの精度を検討するために、Fig. 7に示すような一様なり張り荷重 (σ_0) が作用する平板について解析を行った。なお、総節点数および総要素数40、内部セル数2とした。Fig. 7は3.2節で

述べた領域積分に対する解析的手法を用いず、直接ガウスの領域積分(7点)を行った場合の変位 u と反力 P_r を示したものである。横軸は x を平板の半幅 B で、縦軸は変位 u を理論解 u_{th} で、また反力 P_r を σ_0 でそれぞれ無次元化して表している。 u/u_{th} は理論解より約20%程低く、また P_r/σ_0 は+80から-110まで大きくバラついた。これに対して、Fig. 8は式(11), (16), (19)を用いて求めた計算結果である。 u が理論解に対して3%程高く、また P_r も板中央部では1.5%程低くなったが、Fig. 7と比較して格段に精度が向上した。このことより、領域積分に対しては、できるだけ解析的处理を施した後に数値積分を行わなければならないことがわかった。

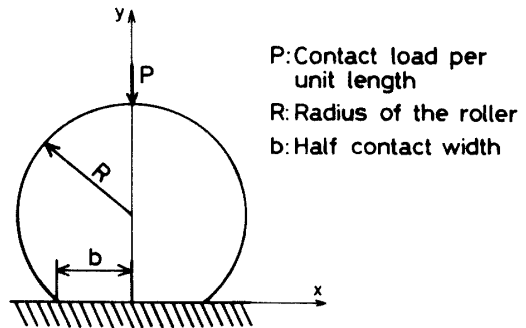
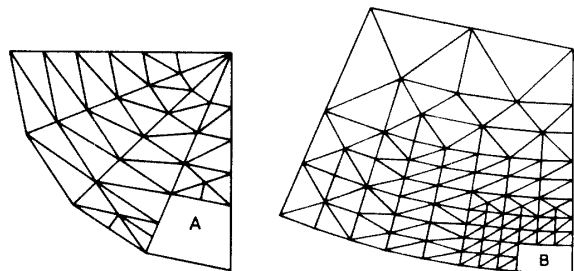


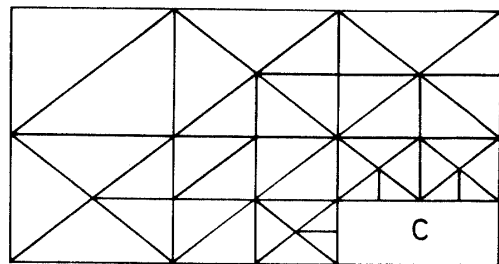
Fig. 9 Model of contact problem

次に、Fig. 9に示すような弾塑性接触問題に対してBEMによる解析を行い、FEMによる計算結果との比較検討を行った。

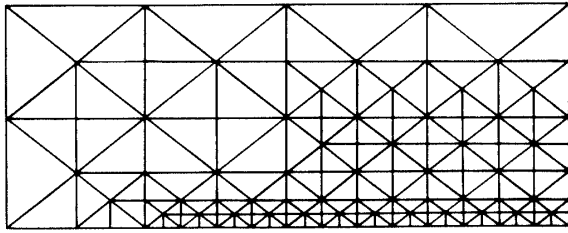


(a)

(b) Section A



(c) Section B



[d] Section C

Fig. 10 Mesh subdivisions

Fig. 10 に FEM 要素分割を示す. 総節点数242, 総要素数412である. BEM の節点は FEM の境界上の節点をそのまま用い, セルは FEM の C 部と同じものを用いた.

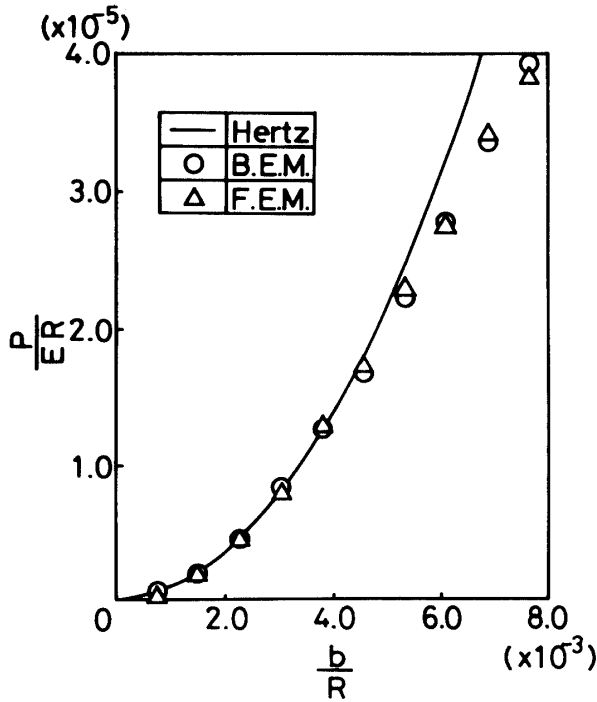


Fig. 11 Relation between contact load and half contact width

Fig. 11 に接触荷重 P と接触半幅 b の関係を示す. なお, 弾塑性接触問題に対する理論解がないために, 参考のために Hertz の弾性解を実線で示した. BEM 計算結果は FEM 計算結果とほぼ一致し, b/R が 4.0 以上で, 塑性域の影響で弾性解と比較して P/ER が小さくなる傾向がみられた.

Fig. 12~14 に降伏前の y 軸上における応力の分布を示した. 横軸は $-\sigma_x, -\sigma_y, \tau_{max}$ を Hertz 応力 q_0 で, 縦軸は y 座標を接触半幅 b でそれぞれ無次元化した. BEM 計算結果 (○印) は, いずれも FEM 計算結果 (△印) と比較して, 極めて良く Smith の理論解 (実線)

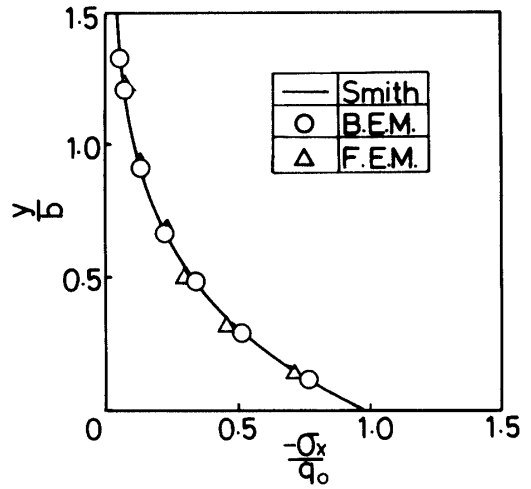


Fig. 12 Distribution of σ_x along y -axis [elastic]

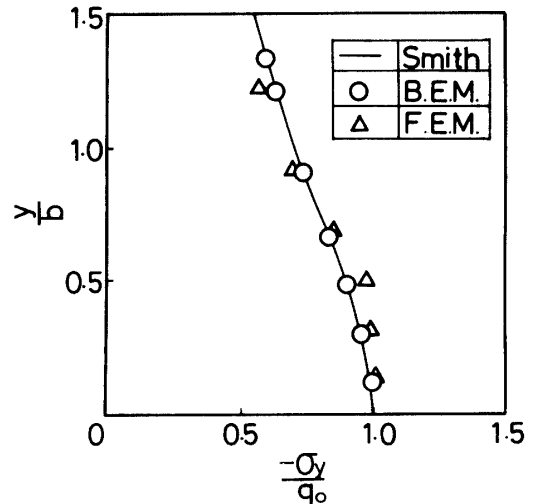


Fig. 13 Distribution of σ_y along y -axis [elastic]

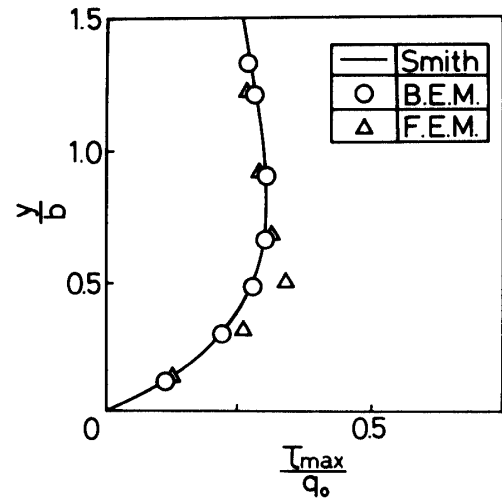


Fig. 14 Distribution of τ_{max} along y -axis [elastic]

と一致した。このことより、弾性状態に対する BEM の計算精度は FEM より優れていると思われる。また、この結果を得るための計算時間は、山口大学情報処理センターの ACOS850 を用いて BEM が 31 秒、FEM が 37 秒であった。

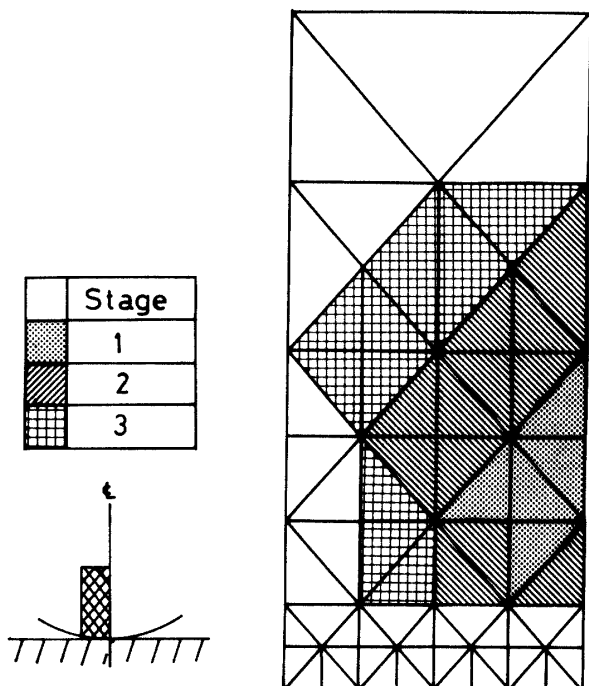


Fig. 15 Spread of yield zone in vicinity of contact surface

Fig. 15 は接触部近傍の塑性域の進展を示したものである。同図に示す Stage 1, 2, 3 はそれぞれ Fig. 11 の b/R が 0.0047, 0.0055, 0.0062 に相当する計算結果である。

Fig. 16~18 に Fig. 15 の Stage 3 での $y/b = 0.197$ の位置における応力の分布を示した。なお、弾塑性接触問題に対する理論解がないために、参考のため弾性の理論解を実線で示した。Fig. 16 に示す σ_x の分布は、BEM と FEM の計算結果とに有意な差が認められず、いずれも $|x/b|$ が 0.5 以内では弾性解よりも低い値であった。これに対して、 σ_y および τ_{max} の分布は Fig. 17, 18 に示すように、BEM の計算結果は $|x/b|$ が小さい時には弾性解より若干低い値を示したが FEM 計算結果は逆に高い値を示した。 $|x/b|$ が小さいところでは、塑性域の影響で応力は弾性解より低くなるので、弾塑性状態に対する計算結果も、弾性と同様に BEM が FEM より優れているように思われる。しかし、弾塑性接触問題に対する理論解がないことから BEM と FEM の正確な精度比較を行うためには、今後、弾塑

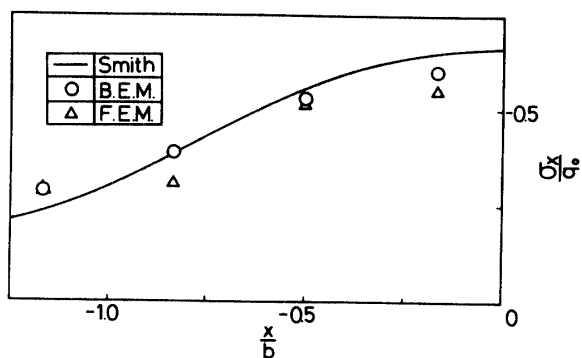


Fig. 16 Distribution of σ_x along $y/b = 0.197$ [elasto-plastic]

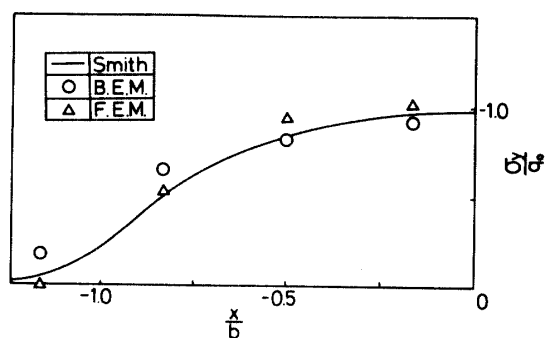


Fig. 17 Distribution of σ_y along $y/b = 0.197$ [elasto-plastic]

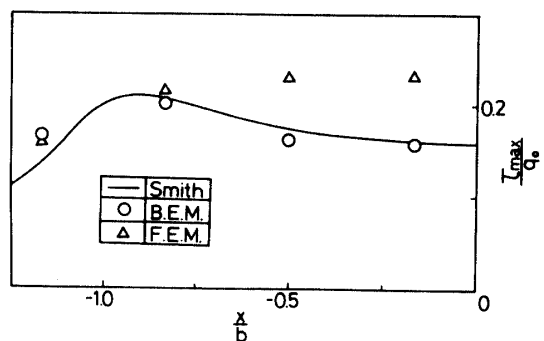


Fig. 18 Distribution of τ_{max} along $y/b = 0.197$ [elasto-plastic]

性接触問題に対する理論解を導くか、あるいは接触部近傍の正確な応力を測定できる実験を行わなければならないように思われる。

5. 結 言

弾塑性境界要素法の基礎式である弾塑性積分方程式の物理的意味を明確にするため、Divergence の定理より弾塑性積分方程式を導いた。次に、弾塑性境界要素法プログラムを作成し、塑性域の領域積分の精度が解に及ぼす影響を調べるために、一様な引張り荷重が

作用する平板の弾塑性解析を行い、さらに弾塑性接触問題を解析し、FEM 計算結果と比較検討を行った。

以上によって得られた結果を要約して次に示す。

- 1) Divergence の定理を用いて積分方程式を導くことにより、従来の重み付き残差法により定式化された弾塑性積分方程式中の塑性域に関する領域積分の物理的意味を明らかにすることができた。
- 2) 平板の弾塑性引張り解析によって、塑性域の領域積分の精度が非常に大きく計算結果に影響を与えることがわかった。
- 3) 弾塑性接触問題の解析結果は、BEM と FEM との間に若干の差異が認められた。

参 考 文 献

- 1) Telles, J. C. F., Brebbia, C. A., The Boundary Element Method in Plasticity, in New Development in Boundary Element Methods (1981)
- 2) Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A., Boundary elements: new developments in elastoplastic analysis, Appl. Math. Modelling, **5**, 376-382 (1981)
- 3) Cathie, D. N., On the implementation of elastic boundary element analysis, Appl. Math. Modelling, **5**, 39-44 (1981)
- 4) Telles, J. C. F. and Brebbia, C. A., The boundary element method in plasticity, Appl. Math. Modelling, **5**, 275-281 (1981)
- 5) Winter, P., Cyclic Plastic Deformation of a Circular Plate With Work Hardening, Transactions of the ASME, **106**, 336-341 (1984)
- 6) 田中正隆, 浜田実, 田中喜久昭, 吉井正明, 境界要素による平面弾塑性問題の解析例, 機講論, No. 824-1, 51-53 (1982) pp. 51-53
- 7) 鷺津久一郎, エネルギー原理入門, 培風館 (1982)
- 8) 山田嘉昭, 塑性粘弾性, 培風館 (1980)
- 9) Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method, 3ed. McGRAWHILL (1977)
- 10) Brebbia, C. A., The Boundary Element Method for Engineers Pentech Press, London (1978)

(昭和60年4月15日受理)