

電界解析を用いた導体作用クーロン力の計算

谷辺 俊幸*・足立 宜良**・佐伯 節夫***

Calculation of Coulomb Force to a Conductor Based on the Analysis of Electric Field Strength

Toshiyuki TANIBE, Takayoshi ADACHI and Setsuo SAEKI

Abstract

Vibration of a transmission-line conductor is set up by corona discharge on water drops hanging beneath the conductor under rainy weather. This corona-induced vibration of a transmission-line conductor has become more serious problem owing to the rise of transmission voltage. To make the mechanism of corona-induced vibration clear theoretically, it is important to investigate force to a conductor.

As the first step, calculation of coulomb force caused by space charge is described in this paper. The calculation model is the co-axial cylindrical electrodes, and the inner conductor has a knife edge which shames hanging water drops. In computing coulomb force, the analysis method of electric field strength is used. The calculation of electric field strength is performed with the method of successive approximation. In general, it is difficult to determine boundary conditions in calculation of corona electric field. Therefore, in order to determine the boundary condition for the space charge density, we adopted electric field strength in the vicinity of the tip of the knife edge. Using electric field strength at the surface of the inner conductor, which is calculated in the manner described above, it is able to compute coulomb force working the conductor.

Coulomb force was calculated under various conditions such as applied voltage, diameter of a conductor, and length of projection. As a result, it was showed to be able to treat of force to a conductor quantitatively. And we obtained a guide to analyse corona-induced vibration theoretically.

1. まえがき

送電線におけるコロナ障害の一つに、線のコロナ振動^{1),2)}が挙げられる。この現象は雨や霧などによって送電線に水滴が付着している場合に発生することが報告されており³⁾、このとき送電線には次の(1)から(5)に示す力が働くため上向きの作用力が生じるものと考えられる⁴⁾。

- (1) コロナ放電時に発生する空間電荷によるクーロン斥力
- (2) 分離水滴がもつ電荷によるクーロン斥力
- (3) 付着水滴分離によるクーロン引力の減少
- (4) 付着水滴分離による重力の減少
- (5) コロナ放電に伴って生じるイオン風^{5),6)}の作

用力

以上の力の中で、(1)の空間電荷によるクーロン斥力が、最も大きくコロナ振動の主因と考えられている⁷⁾。しかし、従来の作用力の取扱いは定性的なものであり、コロナ振動解析のためには、さらに作用力を定量的に求める必要があると考える。その際個々の作用力を測定することは非常に困難である。よって、適当な条件の下で計算によって作用力の大きさを求めることが有効な方法である。

本研究では、作用力の理論計算の第一段階として、差分法による電解計算法を利用してクーロン力の算出を試みた。

2. 計算モデル

計算モデルとして、Fig. 1に示す同軸円筒電極系を考える。内部導体(以下導体と略称する)を放電極、外部導体を接地電極とする。導体には付着水滴を模擬

* 大学院電気工学専攻(現・三菱電機(株))

** 大分大学工学部電気工学科

*** 電気工学科

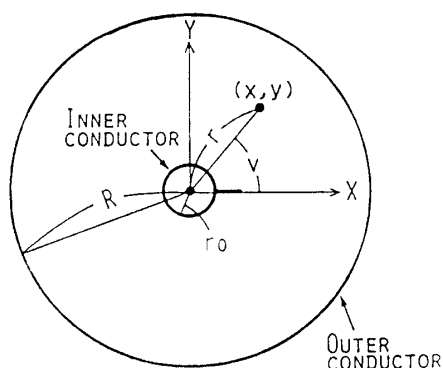


Fig. 1 Calculation model of experimental apparatus in (X-Y) co-ordinate.

した刃形突起が付いている。この電極系の放電空間について電界解析を行ない、導体の表面電界強度計算値から導体に作用するクーロン力を求める。

電界解析法として差分法を用いるため、放電空間を四角形格子に分割する必要がある。そこで、

$$\begin{cases} x=r_0e^u \cos v \\ y=r_0e^u \sin v \end{cases} \quad (1)$$

によって (x, y) 座標から (u, v) 座標への座標変換を行なえば、Fig. 1 の円形領域が Fig. 2 の方形領域に変

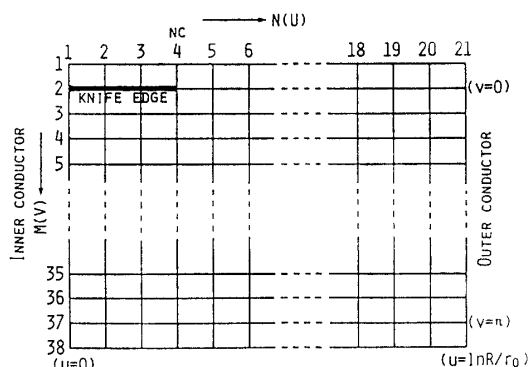


Fig. 2 Schematic diagram for (U-V) co-ordinate divided by meshes.

換される。ここで (1) 式中、 r_0 は導体半径 (cm)、 v は x 軸からの角度、 u は原点からの距離 (cm) を r としたとき

$$u=\ln (r/r_0) \quad (2)$$

である。電極系は x 軸について対称だから、計算領域は、 $0 \leq u \leq \ln (R/r_0)$ 、 $0 \leq v \leq \pi$ となる。ただし、 R は外部導体半径 (cm) である。したがって、この方形の計算領域を四角形格子に分割して電界解析を行なえばよい。格子分割の間隔は任意に選ぶことができるが、本研究では u 方向を 20 等分、 v 方向を 36 等分とした。なお、 u 方向を等間隔に分割することは、Fig. 1

において半径方向を対数間隔で分割することになる。

3. 電界解析

3.1 差分方程式の導出

差分法による電界解析とは、ポアソンの方程式と電流連続の式それぞれの差分方程式を連立させて逐次近似計算によって解き、各格子における電位及び空間電荷密度を求めることである。そこで、まず初めにポアソンの方程式及び電流連続の式を差分方程式に置換する必要がある。

ポアソンの方程式は、電界強度 (V/m) を E 、空間電荷密度 (C/m^3) を ρ 、誘電率 (F/m) を ϵ_0 とすると

$$\int_V \nabla \cdot E dv = \int_V \rho / \epsilon_0 dv \quad (3)$$

である。(3) 式の左辺はガウスの定理によって

$$\int_V \nabla \cdot E dv = \int_C E \cdot dS \quad (4)$$

と変形されるから、(3) 式は

$$\int_C E \cdot dS = \int_V \rho / \epsilon_0 dv \quad (5)$$

と書き直せる。

差分方程式を導くために、Fig. 3 の格子と電位及び空間電荷密度の関係を用いて (5) 式の積分を行なう。電位 ϕ は各格子点上に与える。空間電荷密度は格子に与え、一つの格子内では一定とする。また、積分領域の境界面における電界強度は

$$\begin{cases} E_1=(\phi_0-\phi_1)/\{\Delta ur_0e^{(u+\Delta u/2)}\} \\ E_2=(\phi_0-\phi_2)/\{\Delta vr_0e^u\} \\ E_3=(\phi_0-\phi_3)/\{\Delta ur_0e^{(u-\Delta u/2)}\} \\ E_4=(\phi_0-\phi_4)/\{\Delta vr_0e^u\} \end{cases} \quad (6)$$

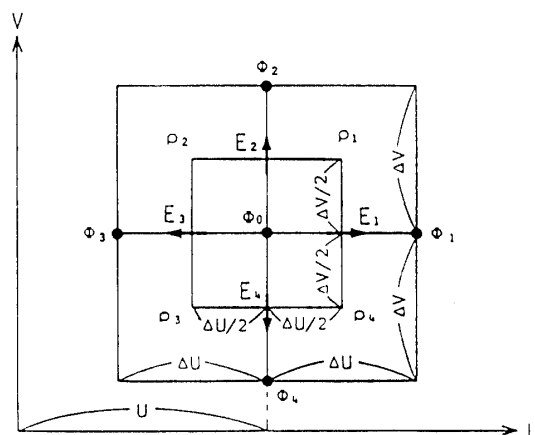


Fig. 3 Calculation grids.

で、境界面内で一定とする。ここで Δu , Δv は、それぞれ u 方向及び v 方向の格子間隔、 u は中心の格子点の u 座標値である。以上の条件から (5) 式の左辺は

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} &= E_1 \Delta v r_0 e^{(u+\Delta u/2)} + E_2 \Delta u r_0 e^u \\ &\quad + E_3 \Delta v r_0 e^{(u-\Delta u/2)} + E_4 \Delta u r_0 e^u \\ &= (\phi_0 - \phi_1) \frac{\Delta v}{\Delta u} + (\phi_0 - \phi_2) \frac{\Delta u}{\Delta v} \\ &\quad + (\phi_0 - \phi_3) \frac{\Delta v}{\Delta u} + (\phi_0 - \phi_4) \frac{\Delta u}{\Delta v} \end{aligned} \quad (7)$$

右辺は

$$\int_V \rho / \epsilon_0 dv = r_0^2 e^{2u} \Delta u \Delta v (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) / 4\epsilon_0 \quad (8)$$

と表わせる。したがって

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{(\phi_1 + \phi_3) \Delta v / \Delta u + (\phi_2 + \phi_4) \Delta u / \Delta v}{2(\Delta v / \Delta u + \Delta u / \Delta v)} * \\ &\quad * \frac{r_0^2 e^{2u} \Delta u \Delta v (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) / 4\epsilon_0}{} \end{aligned} \quad (9)$$

すなわち、中心の格子点の電位 ϕ_0 が周囲の格子点の電位 $\phi_1 \sim \phi_4$ によって求まる。

電流連続の式は、 \mathbf{J} を電流密度 (A/m^2) とすると

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (10)$$

であるが、これにガウスの定理を適用すると

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{J} dv = \int_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (11)$$

ここで

$$\mathbf{J} = k\rho\mathbf{E} \quad (12)$$

ただし、 k はイオン移動度 ($\text{m}^2/\text{V}\cdot\text{S}$)

を用いて (11) 式の積分計算を Fig. 3 の領域で行なえば

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \int_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} &= \rho_1 \left(\frac{\phi_0 - \phi_1}{\Delta u} \frac{\Delta v}{2} + \frac{\phi_0 - \phi_2}{\Delta v} \frac{\Delta u}{2} \right) \\ &\quad + \rho_2 \left(\frac{\phi_0 - \phi_3}{\Delta u} \frac{\Delta v}{2} + \frac{\phi_0 - \phi_2}{\Delta v} \frac{\Delta u}{2} \right) \\ &\quad + \rho_3 \left(\frac{\phi_0 - \phi_3}{\Delta u} \frac{\Delta v}{2} + \frac{\phi_0 - \phi_4}{\Delta v} \frac{\Delta u}{2} \right) \\ &\quad + \rho_4 \left(\frac{\phi_0 - \phi_1}{\Delta u} \frac{\Delta v}{2} + \frac{\phi_0 - \phi_4}{\Delta v} \frac{\Delta u}{2} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。したがって、任意の格子の空間電荷密度を周囲の 3 個の格子における空間電荷密度から計算できる。突起先端のようにコロナ輝点が含まれる場合には、(11) 式を

$$\int_C \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = I_c \quad (14)$$

と置き換える。ここで I_c はコロナ電流 (A) である。

(14) 式の積分計算を Fig. 4 の領域で行なうと、(13)

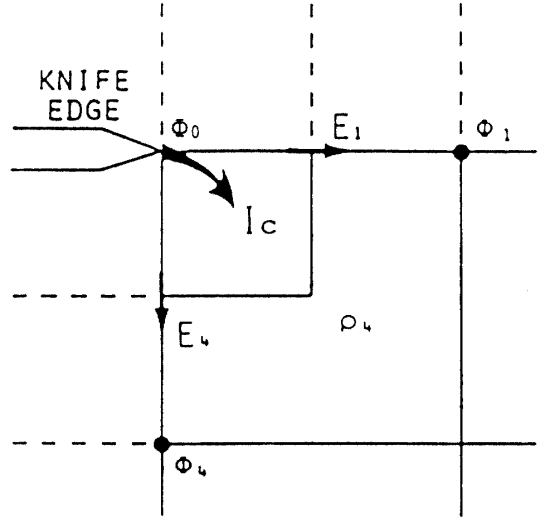


Fig. 4 Calculation grid at the tip of knife edge.

式に相当する差分方程式

$$\rho_4 \left(\frac{\phi_0 - \phi_1}{\Delta u} \frac{\Delta v}{2} + \frac{\phi_0 - \phi_4}{\Delta v} \frac{\Delta u}{2} \right) = I_c \quad (15)$$

が得られる。

3.2 計算手法

電界解析の逐次近似計算はコンピュータを用いて行なう。その場合のフローチャートを Fig. 5 に示す。

計算プログラムは大きく分けて二つの部分から成っている。(I) では空間電荷密度を零として、(9) 式を用いて静電界における電位分布を計算する。(II) では、(I) の計算結果を電位の初期値として、放電界における電位分布及び空間電荷密度分布を求める。電位計算は、(9) 式を用いて各格子点について逐次行ない、収束するまで計算を繰り返す。電位が求まれば、その値を (13) 式及び (15) 式に代入して空間電荷密度を計算する。求めた空間電荷密度を用いて、電位を計算し直す。このように、電位計算と空間電荷密度計算を交互に繰り返し、収束したときに計算を完了する。

計算において最も重要な点は、境界条件並びに収束条件である。これによって計算結果が大きく左右される。本計算では、電位の境界条件として、導体表面及び突起上の格子点において印加電圧値、外部導体表面上の格子点においては零とした。また v 方向の境界については、 $v=0$ 及び $v=\pi$ の境界に対して計算領

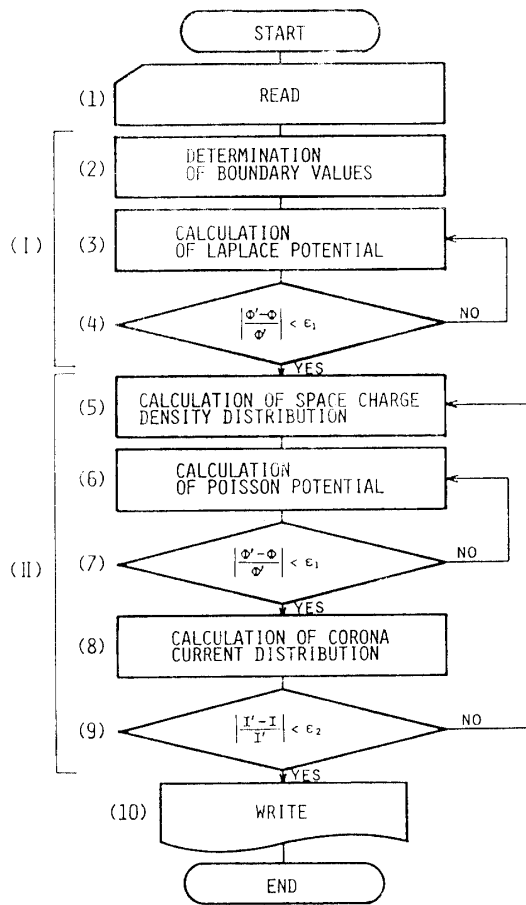


Fig. 5 Flow chart of calculation.

域が対称であることを利用して、計算の繰り返し毎に境界の一つ内側の格子点の電位値を一つ外側の格子点へシフトする。一方、空間電荷密度については、すべてのコロナ電流が突起先端から流れ出ると仮定して突起先端の格子における値を (15) 式によって与える。したがって、導体表面に接する格子においては空間電荷密度は零である。また、 v 方向の境界に関しては電位の場合と同様に、計算の繰り返し毎に $v=0$ 及び $v=\pi$ の境界の内側格子の空間電荷密度値を外側格子へシフトする。

収束判定は二種類ある。第一の判定は電位の計算が一通り終わった時点で行なう。収束と判定されれば次の段階の計算に進むが、そうでない場合は電位の計算を繰り返す。判定には、繰り返し計算における前回の計算値と今回の計算値を比較する方法を用いる。すなわち、

$$\left| \frac{\sum_{m=4}^{10} \sum_{n=2}^{20} \phi'(m, n) - \sum_{m=4}^{10} \sum_{n=2}^{20} \phi(m, n)}{\sum_{m=4}^{10} \sum_{n=2}^{20} \phi(m, n)} \right| < \epsilon_1 \quad (16)$$

が成立する場合を収束と判定する。ここで、 ϕ' は前回

の電位計算値、 ϕ は今回の電位計算値、 m, n はそれぞれ v 方向及び u 方向の格子点番号である。また ϵ_1 は判定定数で、本計算においては 0.1% とした。

第二の収束判定は計算の完了に関するものである。計算は電位計算と空間電荷密度計算を交互に繰り返しているが、電位計算が終了した時点で判定を行なう。これには外部導体に流れ込むコロナ電流の計算値を用いる。すなわち、電位計算の終了時点毎に (15) 式によって外部導体に流れ込むコロナ電流を計算し、

$$|(I'_c - I_c) / I_c| < \epsilon_2 \quad (17)$$

が成立した場合、収束と判定して計算を完了する。ここで、 I'_c は前回のコロナ電流計算値、 I_c は今回のコロナ電流計算値、 ϵ_2 は判定定数で 0.1% である。

3.3 計算結果

計算において、外部導体半径 R は 40 cm とし、導体半径 r_0 を 1.0~2.2 cm、突起長 L を 0.2~3.0 cm、電界強度を 7.0~14.0 KV/cm と変化させた。なお、電界強度とは、次式

$$E = V / \{r_0 \ln(R/r_0)\} \quad (18)$$

によって印加電圧 V から求まる突起が無い場合の導体の表面電界強度で、計算のパラメータとして用いたものであり、以下基準電界強度と呼ぶ。

計算結果の一例を Fig. 6 及び Fig. 7 に示す。Fig. 6 は突起を含む半径方向の電位分布である。静電界の場合、電位は指数関数的に減少している。放電界では、空間電荷のために静電界の場合より電位が高くなっている。なお、導体径や突起長の変化は電位分布にほとんど影響を与えないが、これは変化の幅が外部導体径に比べて小さ過ぎるためと考えられる。Fig. 7 は外部導体表面上におけるコロナ電流密度分布である。コロナ電流密度は、突起直下で最大値をとる山型の分布を示す。基準電界強度が高いほど、また同一基準電界強

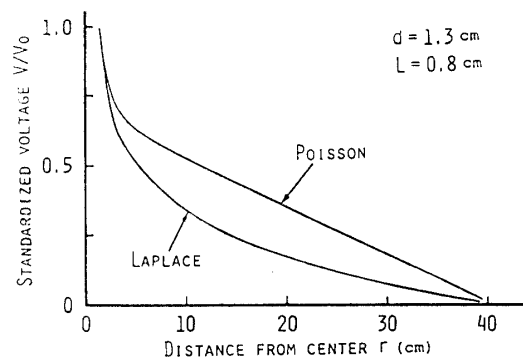


Fig. 6 Voltage distribution in X-direction.

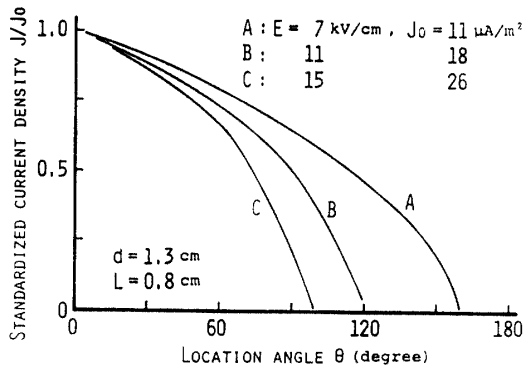


Fig. 7 Distribution of corona current density.

度においては導体径が大きいほど分布の山が急峻になる。これは、クーロン力が強いために空間電荷が外部導体方向へ直進し易くなる結果と考えられる。

4. クーロン力の計算

4.1 計算方法

電界解析の結果を利用して導体に作用するクーロン力を計算する。

まず次式によって導体の表面電界強度 E_s を近似的に求める。

$$E_s(m) = \frac{V(m, 0) - V(m, 1)}{\Delta r_0 e^{4u/2}} \quad (19)$$

ただし、 $V(m, 0)$ は導体の電位 (V)、 $V(m, 1)$ は導体の隣の格子点の電位 (V)、 m は v 方向の格子点番号である。表面電界強度が $E_s(m)$ である導体の微小面積 ΔS が受けるクーロン力 $\Delta F_c(m)$ は

$$\Delta F_c(m) = \epsilon_0 E_s(m)^2 \Delta S / 2 \quad (20)$$

であり、その方向は導体表面に垂直である。 ΔS として幅が格子間隔 Δv で単位長さの領域をとれば $\Delta F_c(m)$ のうちで導体に鉛直方向に働く成分は、上向きを正にとると

$$\Delta F_{c_v}(m) = -\epsilon_0 E_s(m)^2 \Delta v \cos v(m) \quad (21)$$

となる。ただし、 $v(m)$ は番号 m の格子点の v 座標値である。以上より、導体に作用するクーロン力は

$$F_c = \sum_m \Delta F_{c_v}(m) = -\frac{\epsilon_0 \Delta v}{2} \sum_{m=2}^{37} a(m) E_s(m)^2 \cos v(m) \quad (22)$$

によって求めることができる。ただし、 $a(m)$ は係数で

$$a(m) \begin{cases} = 1 & (\text{at } m=2 \text{ or } 37) \\ = 2 & (\text{at } m=3, 4, \dots, 36) \end{cases} \quad (23)$$

4.2 計算結果

Fig. 8, Fig. 9, 及び Fig. 10 にクーロン力の計算結果を示す。クーロン力の大きさは 10^{-2} N のオーダーとなっている。計算モデルと同じ寸法で導体の長さが 3 m の装置を試作してコロナ振動実験を行ない⁸⁾、導体に働く減衰力を計算したところ 10^{-2} N のオーダーとなった。このことから、確かにクーロン力がコロナ振

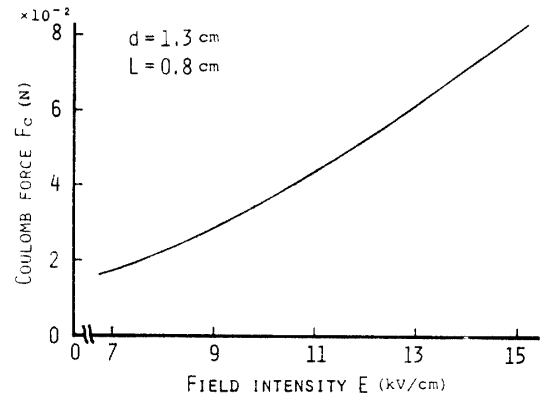


Fig. 8 Relation between coulomb force and field intensity.

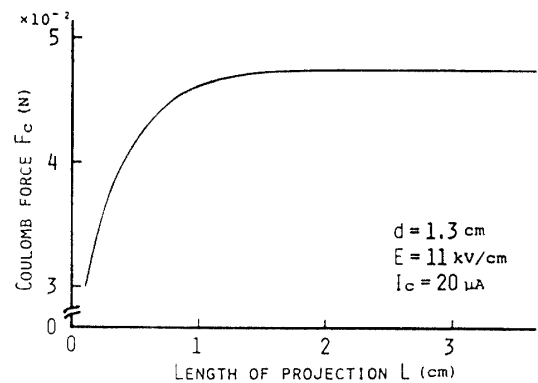


Fig. 9 Relation between coulomb force and length of projection.

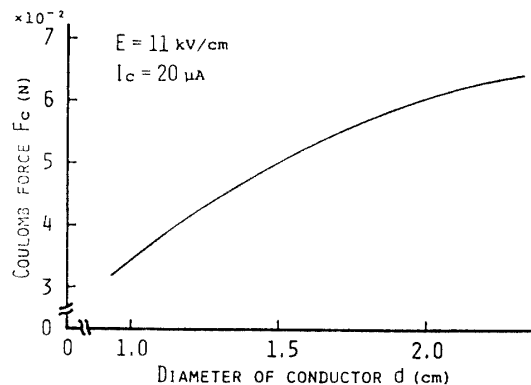


Fig. 10 Relation between coulomb force and diameter of conductor.

動に最も大きく寄与していると言える。

Fig. 8 に示すように、クーロン力は基準電界強度の増加に伴って大きくなる。これは、計算領域内の各位置における電界強度が基準電界強度にほぼ比例していると考えられることから、当然の結果である。Fig. 9 は突起長に対する特性である。突起長が 1 cm 以上ではクーロン力がほぼ一定であるのに対し、1 cm 以下では非常に小さくなる。本計算で用いた手法では、突起先端より導体側の格子において空間電荷密度が零となる。したがって、突起長が 1 cm 以上では導体表面の電界分布に乱れが無くなると考えられる。Fig. 10 に示すように、導体径が大きいほどクーロン力は大きくなる。これは、同一基準電界強度で比較を行なったので導体径が大きいほど印加電圧が高いためである。なお、試作した装置による実験において直径 1.0 cm の導体ではコロナ振動を生じなかった。その原因の一つとして、上述のようにクーロン力の小さいことが挙げられる。

5. ま と め

本研究では、コロナ振動時における導体への作用力の理論計算の第一歩として、クーロン力の計算を行なった。計算には差分法による電界解析法を利用した。その結果、従来定性的な取扱いを強いられていた作用

力を定量的に扱い得ることを示し、コロナ振動を理論的に解析するための指針を得た。

計算に用いたモデルは、付着水滴を刃形突起に模擬した簡単な二次元モデルで導体の変位や振動による付着水滴の伸縮などを無視している。今後はこれらの点についてさらに改良した計算手法を確立するとともに、クーロン力以外の作用力についても計算を行なう必要がある。

終わりに、本研究を行なうにあたって御支援いただいた本学松本久男教授、羽野光夫助手、池田隆技官に深く謝意を表わす。

参 考 文 献

- 1) 熊谷三郎, 長屋準: 電気学会誌, **53**, 426 (1933)
- 2) A. Edwards: *Electra*, **12**, 33 (1970)
- 3) 吉田定博, 松林義数: 住友電気, 送電線特集号, 74 (1958)
- 4) 足立宜良, 川崎元之, C. Luan Phan: 静電気学会誌, **5**, 36 (1981)
- 5) 足立宜良, 増田閃一, 阿久津顕右: 電気学会論文誌, **52-A**, 256 (1977)
- 6) 足立宜良, 川崎元之: 静電気学会誌, **2**, 158 (1978)
- 7) 武藤三郎, 津田一男, 渡辺高宏: 名古屋工業大学学報, **5**, 118 (1954)
- 8) 羽野光夫, 谷辺俊幸, 柴田典顕, 渡辺雅人, 足立宜良: 山口大学工学部研究報告, **32**, 173 (1981)

(昭和 57 年 4 月 12 日 受理)