

粘性項をもつ双曲型分布系の一動的解析

沖田 豪*・木村 良一**

Dynamical Analysis and Identification of Hyperbolic Distributed System.

Tuyoshi OKITA and Ryōichi KIMURA

Abstract

An hyperbolic distributed parameter system is dynamically analyzed in consideration of the application to the ground vibration and then its green function is derived. The wave velocity and excess attenuation are investigated by the Fourier transform of the green function and compared with the usual results.

As, in the actual system, the system parameters are mostly unknown, we present an estimate of the system parameters in which the above green function is utilized with the measurements of the response wave. The excess attenuation can be evaluated from the estimated parameters and the amplitude of the vibration is estimated from the above excess and geometrical attenuation. Finally, it is evident from the experimental results that the parameters of the actual ground vibration system may be estimated by this method.

1. 緒 言

近年、分布定数系のシステム同定が工学、生物学、環境科学等多く分野で重要な課題となっている。工学においても、波動伝播系、熱系、流体系、構造力学系等は重要な例である。

これまでに、いくつかの分布定数系のシステム同定法が提案されているが、^{1) 2), 3), 4), 5), 6)} 具体的対象としては、拡散現象に伴う放物型分布定数系に比較して、双曲型分布定数系は少ないようである。しかし、波動振動系にみられるように、双曲型分布系も工学的に重要な位置を占めており、その同定も重要な課題である。特に、環境分野において、地盤振動による振動公害は一つの大きな問題となっている。このような地盤振動系で土の動的性質を正確に把握することは極めて困難といわれている。

このようなことから、本報告では地盤振動による振動公害を考慮に入れて、粘性項をもつ双曲型分布系の一動的解析を行ない、それに基づくシステム同定を提案している。まず、現実の地盤振動系をふまえて、これを抽象化し、一様な線形粘弾性を有する三次元運動方程式でモデル化している。次に、振動公害の振動源が地表面あるいはその近くに多いことを考慮して、自由

表面上にのみ外力があり、他端は固定された境界条件を設定している。このようなシステムの過渡解析によりインパルス応答を導出し、系の固有振動数および減衰定数について、若干の考察をしている。また、このインパルス応答をフーリエ変換することにより、従来の周波数領域における解析結果と比較検討している。

一般に、このような現実のシステムでは、そのシステム・パラメータは未知である場合がしばしば起る。特に、地盤振動系における土の動的性質はその置かれた周囲条件により変わるため、できれば原位置でシステム・パラメータを推定することが望ましい。このため、導出したインパルス応答を用いて、原位置における衝撃加振に対する応答の実測値より、システム同定を行なうことを試みている。この方法によれば、比較的少ない観測点で、暗振動の影響も軽減してシステム同定を行なうことが可能と考えられる。

さらに、応用例として、現実の地盤振動系について、土の弾性係数、粘性係数、ポアソン比および密度を推定している。これより、本方法を実験的に検証している。

2. システムのモデリング

まず、対象とする系を等方等質の粘弾性システムとみなして、その力学モデルを設定しよう。

いま、 u , v , w をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸方向

* 山口大学工学部

** 三菱電機(株)

の変位, $\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{zz}$ を軸応力, $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$ をせん断応力, f_x, f_y, f_z を x, y, z 軸方向の外力とすれば, 次の運動方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \rho D_t^2 u &= D_x \tau_{xx} + D_y \tau_{xy} + D_z \tau_{xz} + f_x \\ \rho D_t^2 v &= D_x \tau_{yx} + D_y \tau_{yy} + D_z \tau_{yz} + f_y \\ \rho D_t^2 w &= D_x \tau_{zx} + D_y \tau_{zy} + D_z \tau_{zz} + f_z \end{aligned} \right\} (1)$$

ただし, ρ は密度であり, $D_x \triangleq \partial/\partial x$, $D_y \triangleq \partial/\partial y$, $D_z \triangleq \partial/\partial z$, $D_t \triangleq \partial/\partial t$ である. また, モーメントの平衡条件より, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ なる関係を満たす.

応力一ひずみ関係は通常の振動公害, 小規模の地震等では, 線形とみなせるといわれている.^{7), 8)} 線形粘弾性システムモデルとしては, Voigt 型, Maxwell 型, Zener 型がよく知られている, それらの中で地盤振動には Voigt 型が適している⁸⁾. ここでは Voigt 型の基本概念を拡張し, 三次元化してモデル化しよう. そのとき, 軸応力およびせん断応力は変位およびその導関数を用いて, 次のように表わされる.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx} &= (\lambda + \nu D_t) \Delta + 2(\mu + \zeta D_t) D_x u \\ \tau_{yy} &= (\lambda + \nu D_t) \Delta + 2(\mu + \zeta D_t) D_y v \\ \tau_{zz} &= (\lambda + \nu D_t) \Delta + 2(\mu + \zeta D_t) D_z w \\ \tau_{xy} &= (\mu + \zeta D_t) (D_x v + D_y u) \\ \tau_{yz} &= (\mu + \zeta D_t) (D_y w + D_z v) \\ \tau_{zx} &= (\mu + \zeta D_t) (D_z u + D_x w) \end{aligned} \right\} (2)$$

ただし, $\Delta \triangleq D_x u + D_y v + D_z w$ であり, λ, μ は Lamé の定数, ν および ζ は λ, μ に対応して粘性にかかわる定数で, $\lambda/\mu = \nu/\zeta$ とする⁹⁾.

次に, (1), (2) 式に付帯する境界条件について考察しよう. 一般に, 公害振動源は地表面あるいはその近くある場合が多い. したがって, 境界条件としては地表面に点振源を置き, 加振点を除いて地表面は自由面

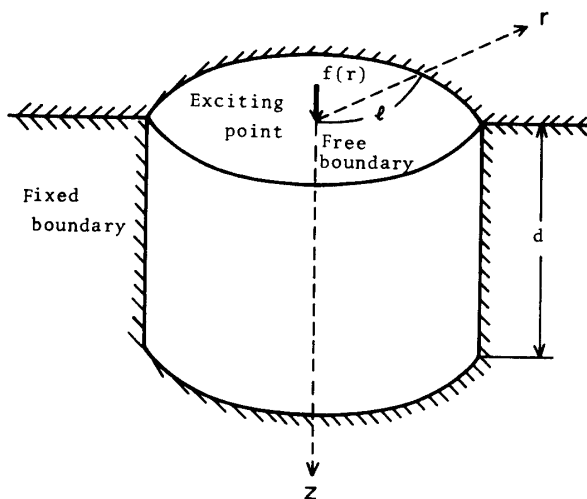


Fig.1 Boundary condition of distributed system.

とする. 他の境界面は岩盤等を想定して固定端とする. 点振源を想定した理由は実際に点状とみなせる場合が多いことおよびシステムの線形性から重ねの理が適用できるためである. また, 内部には外力を考えないため, $f_x = f_y = f_z = 0$ とする.

ここで, システムの等方等質性および点振源を設定することを考慮して, Fig.1 のように円筒座標系を導入しよう. θ 方向の変位は等方性から零であり, r 方向の変位を q とすると, (2) 式を (1) 式に代入して座標変換すれば, 次の運動方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \rho D_t^2 q &= \left\{ \lambda + 2\mu + (\nu + 2\zeta) D_t \right\} \left\{ D_r^2 + \frac{1}{r} D_r - \frac{1}{r^2} \right\} q + D_r D_z w \\ &+ (\mu + \zeta D_t) (D_z^2 q - D_r D_z w) \\ \rho D_t^2 w &= \left\{ \lambda + 2\mu + (\nu + 2\zeta) D_t \right\} \left\{ D_z D_r + \frac{1}{r} \right\} q + D_z^2 w \\ &+ (\mu + \zeta D_t) \left\{ -D_z \left(D_r + \frac{1}{r} \right) q + \left(D_r + \frac{1}{r} \right) D_r w \right\} \end{aligned} \right\} (3)$$

ただし, $D_r \triangleq \partial/\partial r$ である.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zz} &= (\lambda + \nu D_t) \left\{ D_r + \frac{1}{r} \right\} q + D_z w \\ &+ 2(\mu + \zeta D_t) D_z w \\ \tau_{rz} = \tau_{zr} &= (\mu + \zeta D_t) (D_z q + D_r w) \end{aligned} \right\} (4)$$

さらに, 境界条件は Fig.1 より次式で与えられる,

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zz}|_{z=0} &= f(r) \delta(t) & 0 < r < l \\ \tau_{rz}|_{z=0} &= 0 & 0 < r < l \\ q|_{r=l} &= 0 & 0 < z < d \\ \tau_{rz}|_{r=l} &= 0 & 0 < z < d \\ w|_{z=d} &= 0 & 0 < r < l \\ \tau_{rz}|_{z=d} &= 0 & 0 < r < l \end{aligned} \right\} (5)$$

ただし, $f(r)$ は $r=0$ の近傍でのみ値をもち,

$$\int_0^l f(r) 2\pi r dr = 1$$

なる外力である.

このように地盤振動系をモデル化し, 境界条件 (5) のもとで, 運動方程式 (3) について考察する.

3. システム動的解析

まず, 運動方程式 (3), 境界条件 (5) 式で表わされるシステムのインパルス応答を導出しよう. (3) 式の一般解はポテンシャル関数の導入と変数分離法により次式で与えられる.

$$\left. \begin{aligned} q(r, z, t) &= A j \eta J_1(\xi r) \{ e^{j\eta z} - B e^{-j\eta z} \} S(t) \\ &+ C \chi J_1(\chi r) \{ e^{j\psi z} + D e^{-j\psi z} \} T(t) \\ w(r, z, t) &= -A \xi J_0(\xi r) \{ e^{j\eta z} + B e^{-j\eta z} \} S(t) \\ &- C j \psi J_0(\chi r) \{ e^{j\psi z} - D e^{-j\psi z} \} T(t) \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし, $J_0(\cdot), J_1(\cdot)$ はそれぞれ 0 次, 1 次のベッセル関数であり, $S(t)$ および $T(t)$ はそれぞれ次の微

分方程式の解である。

$$\left. \begin{aligned} \rho D_t^2 S(t) + (\xi^2 + \eta^2) \zeta D_t S(t) \\ + (\xi^2 + \eta^2) \mu S(t) = 0 \\ \rho D_t^2 T(t) + (\chi^2 + \psi^2) (\nu + 2\zeta) D_t T(t) \\ + (\chi^2 + \psi^2) (\lambda + 2\mu) T(t) = 0 \end{aligned} \right\} (7)$$

ここで、 ξ, χ, η, ψ は境界条件 (5) 式を満たす固有値であり、 A, B, C, D は境界条件および初期条件から定まる係数である。この $q(r, z, t)$ $w(r, z, t)$ を (4) 式に代入すれば、これに対応するせん断力 τ_{rz} は次のように表わされる。

$$\tau_{rz} = (\mu + \zeta D_t) \{ A(\xi^2 - \eta^2) J_1(\xi r) (e^{j\eta z} + B e^{-j\eta z}) S(t) + 2C j \chi \psi J_1(\chi r) (e^{j\psi z} - D e^{-j\psi z}) T(t) \} \quad (8)$$

この τ_{rz} を用いて、境界条件より固有値および係数を定めよう。

1) $r=l$ における境界条件より、(6) 式の $q(r, z, t)$, (8) 式の τ_{rz} を用いて次式を得る。

$$J_1(\xi l) = J_1(\chi l) = 0$$

よって、固有値 ξ および χ は次式で与えられる。

$$\xi_n = \chi_n = \beta_n / l, \quad n=0, 1, 2, \quad (9)$$

ただし、 β_n は 1 次のベッセル関数の根で、 $J_1(\beta_n) = 0$ である。

2) $z=d$ における境界条件より、係数 B および D は次のように定められる。

$$B = -e^{2j\eta d}, \quad D = e^{2j\psi d} \quad (10)$$

3) $z=0$ における境界条件について考える。(9), (10) 式 (8) 式を代入して整理すれば、次の関係を満たさねばならないことがわかる。

$$S(t) = T(t) \quad (11)$$

$$2C \phi \xi e^{j\psi d} \sin(\psi d) = j A (\xi^2 - \eta^2) e^{j\eta d} \sin(\eta d) \quad (12)$$

ここで、(11) 式が成り立つためには、(7) 式より次の関係を満たさねばならない。

$$(\xi^2 + \eta^2) = (\xi^2 + \psi^2) \left(2 + \frac{\lambda}{\mu} \right) \quad (13)$$

次に、軸応力 τ_{zz} については、(6) 式を (4) 式に代入し、(7), (9), (10) および (11) 式を考慮して整理すれば、(6) 式に対応する τ_{zz} は次のように表わされる。

$$\tau_{zz} = -2c e^{j\psi d} \cos \psi (z-d) J_0(\xi r) \left[\rho D_t^2 T(t) + 2 + \xi^2 \frac{2\xi^2 \eta \psi}{\xi^2 - \eta^2} \cot \eta (z-d) \tan \psi (z-d) \right] \cdot (\mu + \xi D_t) T(t) \quad (14)$$

したがって、軸応力についての境界条件より、次の関係を満たさねばならない。

$$\rho D_t^2 T(t) + 2 \left(\xi^2 - \frac{2\xi^2 \eta \psi}{\eta^2 - \xi^2} \right) \cot(\eta d) \tan(\psi d) \times (\mu + \zeta D_t) T(t) = \delta(t) \quad (15)$$

一方、 $T(t)$ は (7) 式の解であるから、(15) 式と (7) 式を比較することにより、次の関係式を得る。

$$(\eta^2 - \xi^2)^2 = -4\xi^2 \eta \psi \cot(\eta d) \tan(\psi d) \quad (16)$$

この (16) 式および (13) 式より、与えられた固有値に対して一組の固有値 η, ψ が定められる。また、(14), (15) 式より次式が成り立たねばならない。

$$-2e^{j\psi d} \cos(\psi d) J_0(\xi r) = f(r) \quad (17)$$

上式について、ベッセル関数 $J_0(\xi r)$ の直交性を利用すれば、係数 C は次式で与えられる。

$$C = - \frac{\int_0^l f(r) J_0(\xi r) r dr}{e^{j\psi d} \cos(\psi d) l^2 J_0^2(\xi l)} \quad (18)$$

よって、係数 A, B, C, D はすべて定められる。

次に、インパルス応答を求めるため、初期条件を零とすれば、(15) 式より $T(t)$ を次のように得られる。

$$T(t) = \frac{1}{\rho \omega} e^{-r t} \sin \omega t \quad (19)$$

ただし、 $r \triangleq \frac{(\xi^2 + \eta^2) \zeta}{2\rho}$
 $\omega \triangleq \frac{[(\xi^2 + \eta^2) \{4\rho\mu - (\xi^2 + \eta^2) \xi^2\}]^{1/2}}{2\rho}$ である。

ここで、(9) 式で与えられる固有値 ξ_n に対して定まる固有値 η, ψ , 係数 A, B, C, D および関数 $T(t)$ をそれぞれ $\eta_n, \psi_n, A_n, B_n, C_n, D_n$ および $T_n(t)$ とすれば、境界条件 (5) 式のもとで、運動方程式 (3) に対するインパルス応答 $q(r, z, t)$ および $w(r, z, t)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} q(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_1(\xi_n r) \{ A_n j \eta_n e^{j\eta_n d} \cos \eta_n (z-d) \\ &\quad + C_n \xi_n e^{j\psi_n d} \cos \psi_n (z-d) \} T_n(t) \\ w(r, z, t) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_0(\xi_n r) \{ -A_n j \xi_n e^{j\eta_n d} \sin \eta_n \\ &\quad (z-d) + C_n \psi_n e^{j\psi_n d} \sin \psi_n (z-d) \} T_n(t) \end{aligned} \right\} (22)$$

さらに、任意の加振力に対する応答は、システムの線形性より、時間についてのたたみ込み積分を $T_n(t)$ にほどこすことによって得られる。

いま、 r 方向の境界が無限遠にある場合、(22) 式において、フーリエ・ベッセルの積分定理を用いれば、インパルス応答は次のように積分表示される。

$$\left. \begin{aligned} q(r, z, t) &= \frac{1}{x} \int_0^{\infty} J_1(\xi r) \{ A(\xi) j \eta e^{j\eta d} \cos \eta (z-d) \\ &\quad + C(\xi) \xi e^{j\psi d} \cos \psi (z-d) \} T(t, \xi) \xi d\xi \\ w(r, z, t) &= \frac{1}{x} \int_0^{\infty} J_0(\xi r) \{ -A(\xi) j \xi e^{j\eta d} \sin \eta (z-d) \\ &\quad + C(\xi) \psi e^{j\psi d} \sin \psi (z-d) \} T(t, \xi) \xi d\xi \end{aligned} \right\} (23)$$

ただし、 $A(\xi), (\xi), T(t, \xi)$ は $A_n, C_n, T_n(t)$ に対応する。

特に、自由表面における応答は上式において、 $z=0$ とおけば、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} w(r, 0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\zeta\omega} J_1(\xi r) e^{-\gamma t} \sin\omega t d\xi \\ w(r, a, t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma\phi\xi \tan(\phi d)}{\zeta\omega(\xi^2 - \gamma^2)} J_0(\xi r) e^{-\gamma t} \sin\omega t d\xi \end{aligned} \right\} (24)$$

このように地表面上を加振するとき、その振動エネルギーの大部分は地表面近くに集中し、いわゆる Rayleigh 波が主成分となることが知られている。¹⁰⁾ この事実をふまえて、 $z=d$ における反射を無視し、半無限粘弾性システムとして取扱うことが考えられる。以下に、この場合について考察を進めよう。固有値の間の関係を表わす(16)式において、 d を無限大とすれば、次式を得る。

$$4\xi^2\eta\phi = -(\eta^2 - \xi^2)^2 \quad (25)$$

上式ともう一つの固有値の関係式(13)より、 ϕ を消去し、 η と ξ との関係を求めるため、

$$\alpha_1 \triangleq \eta^2 / \xi^2 \quad (26)$$

とおけば、 α_1 について次の四次式を得る。

$$\alpha_1^4 - 4\alpha_1^3 + \frac{6h-16}{h}\alpha_1^2 + \frac{12h-16}{h}\alpha_1 + 1 = 0 \quad (27)$$

ただし、 $h \triangleq 2 + \lambda/\mu$ である。

同様に、 ϕ と ξ との関係を求めるため、

$$\alpha_2 \triangleq \phi^2 / \xi^2 \quad (28)$$

とおけば、 α_2 についての四次式を得る。

$$(h\alpha_2 + h - 2)^4 - 16\{\alpha_2^2 + (h-1)\alpha_2\} = 0 \quad (29)$$

なお、この α_1 と α_2 は(13)式より、次の線形関係がある。

$$\alpha_1 + 1 = (\alpha_2 + 1)h \quad (13')$$

また、 h はポアソン比 σ を用いて次のように表わされる。

$$h = 2 + 2\sigma / (1 - 2\sigma), \quad 0 < \sigma < 0.5 \quad (30)$$

(27) および (29) 式はそれぞれ α_1, α_2 について四次式であり、四個の根をもつが、現象を説明できる根を解として採用しなければならない。Rayleigh, Lamb¹⁰⁾ によれば、 z 軸方向に関して波動は指数関数的に減衰する。そのためには、(6)式から明らかなように、 η および ϕ は純虚数であり、 α_1, α_2 は負の実数でなければならない。また、 $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1$ のときは、(21)式から明らかなように、非減衰振動を生じ、現象を説明できない。したがって、解としては

$$-1 < \alpha_1 < 0, \quad -1 < \alpha_2 < 0 \quad (31)$$

なる根を採用するべきである。(31)式の条件を満たす根は、ポアソン比が意味を持つ $0 < \sigma < 0.5$ の範囲では、ただ一つ存在することが容易に示される。よって、(31)式を満たす根を解として採用すればよい。このように、 α_1 および α_2 を導入することによって、自由表面における応答(24)式は次のように簡単に表

わされる。

$$\left. \begin{aligned} q(r, 0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma}{\zeta\omega} J_1(\xi r) e^{-\gamma t} \sin\omega t d\xi \\ w(r, 0, t) &= \frac{-1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(-\alpha_2)^{0.5} \gamma}{(1-\alpha_1)\zeta\omega} J_0(\xi r) e^{-\gamma t} \sin\omega t d\xi \end{aligned} \right\} (32)$$

ただし、 $\gamma \triangleq (1 + \alpha_1)\xi^2\zeta / (29)$

$$\omega \triangleq [(1 + \alpha_1)\{4\rho\mu - (1 + \alpha_1)\xi^2\zeta^2\}]^{0.5} / (29)$$

である。

この(32)式を用いるためには、 α_1, α_2 を具体的に与える必要がある。これについて若干の考察をしよう。 α_1 および α_2 はそれぞれ(27),(29)式の根であり、ポアソン比 σ の関数であるが、解析的に陽表示する

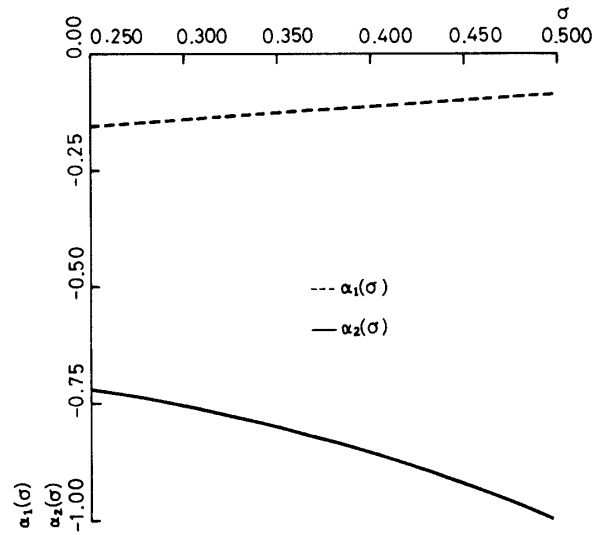


Fig. 2 Relation between α_1, α_2 and Poisson's ratio as $d \rightarrow \infty$.

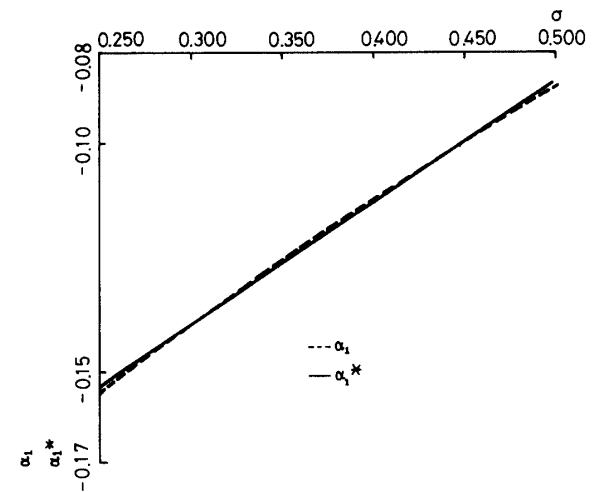


Fig. 3 Comparison of α_1 and its approximation.

ことは困難である。そこで、現実の地盤振動系において、ポアソン比がとると考えられる範囲 $0.25 \leq \sigma < 0.5$ について、 α_1 および α_2 の数値解はそれぞれ Fig.2 に示すようになる。Fig.2 より、 α_1 と σ は、この範囲では線形とみなせるので、次のように近似しよう。

$$\alpha_1^* = a\sigma + b \tag{33}$$

ただし、最小二乗近似による a, b は次の値をとる。
 $a = 0.2696, b = -0.2207$

厳密解 α_1 と近似値 α_1^* との比較を Fig.3 に示す。また、 α_2 は (13') 式を用いて、次のように近似できる。

$$\alpha_2^* = \frac{(2\sigma - 1)}{2(\sigma - 1)} (\alpha_1^* + 1) \tag{34}$$

このようにして、(33) 式より、 α_1^* を (34) 式より α_2^* を得ることができれば、(32) 式により自由表面における応答 $q(r, o, t)$ および $w(r, o, t)$ を比較的簡単に得られる。また、(32) 式から明らかのように、粘性効果は減衰定数 γ に影響するのは勿論のこと固有振動数 ω にも関係していることがわかる。

従来、地盤振動に関する研究は主として周波数領域で解析されているようである。したがって、ここでの動的解析と従来の研究との関連を明らかにするため、周波数応答について考察しよう。(32) 式のインパルス応答 $q(r, o, t)$ および $w(r, o, t)$ をそれぞれフーリエ変換すれば、次式を得る。

$$Q(r, o, p) = \frac{1}{4\pi(\mu + jp\zeta)} \int_0^\infty \frac{(1 + \alpha_1)\xi^2}{(1 + \alpha_1)\xi^2 - k^2 - k^2} J_1(\xi r) d\xi$$

$$W(r, o, p) = \frac{-(-\alpha_2)^{0.5}}{2\pi(\mu + jp\zeta)(\alpha_1 - 1)} \int_0^\infty \frac{(1 + \alpha_1)\xi^2}{(1 + \alpha_1)\xi^2 - k^2} J_0(\xi r) d\xi$$

ただし、 $k^2 = \rho p^2 (\mu + jp\zeta)^{-1}$ である。

さらに、上式において、 $J_0(\cdot)$ および $J_1(\cdot)$ に対してポアソンの積分表示を用いれば、次の周波数応答を得る。

$$Q(r, o, p) = \frac{1}{(2\pi)^2(\mu + jp\zeta)} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{(1 + \alpha_1)\xi^2 e^{-j\xi r \cosh u}}{(1 + \alpha_1)\xi^2 - k^2} \times d\xi \cosh u du$$

$$W(r, o, p) = \frac{-2j}{(2\pi)^2(\mu + jp\zeta)^2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{(-\alpha_2)^{0.5}(1 + \alpha_1)\xi^2}{(1 - \alpha_1)\{\xi - k\}} \times e^{-j\xi r \cosh u} d\xi du$$

上式において、 ξ に関する積分は複素積分に置き換えることができる。複素積分における Cauchy の意味の主値を考えることにより、積分を行えば、(35) 式は次のように表わされる。

$$Q(r, o, p) = \frac{jk^2}{4\pi(\mu + jp\zeta)(1 + \alpha_1)\kappa} \int_0^\infty e^{\kappa r \cosh u} \times \cosh u du$$

$$W(r, o, p) = \frac{-(-\alpha_2)^{0.5}k^2}{2\pi^2(\mu + jp\zeta)(\alpha_1^2 - 1)\kappa} \int_0^\infty e^{-j\kappa r \cosh u} du$$

ただし、 κ は複素積分路内の極であり、次式で与えられる。

$$\kappa = \{k^2/(1 + \alpha_1)\}^{0.5} \tag{37}$$

また、(35) 式において、 $\xi^2 = \rho p^2 / \{(\lambda + 2\mu) + jp(\nu + 2\zeta)\}$ および $\xi^2 = \rho p^2 / (\mu + jp\zeta)$ が分岐点となり、それぞれ p 波および s 波を表わす¹²⁾。厳密な意味では、複素積分を行なう際、分岐点に関する積分路を考慮しなければならないが、 r が大なる場合は表面波が卓越することを考慮して、以下では極のみを考察する。(36) 式における積分は、Heine の積分表示により、ハンケル関数 $H_1^{(2)}(\kappa r)$, $H_0^{(2)}(\kappa r)$ で表わされる。

$$H_1^{(2)}(\kappa r) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-j\kappa r \cosh u} \cosh u du$$

$$H_0^{(2)}(\kappa r) = -\frac{2j}{\pi} \int_0^\infty e^{-j\kappa r \cosh u} du$$

さらに、ハンケル関数は、 $|\kappa r|$ が大なるときは、Hadamard の漸近展開を用いると、次のように表わされる。

$$H_1^{(2)}(\kappa r) \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}} e^{-j(\kappa r - \frac{3}{4}\pi)} \left\{ 1 - \frac{3j}{8\kappa r} + \frac{15}{128(\kappa r)^2} + \dots \right\}$$

$$H_0^{(2)}(\kappa r) \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r}} e^{-j(\kappa r - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + \frac{j}{8\kappa r} - \frac{9}{128(\kappa r)^2} + \dots \right\}$$

したがって、(36) 式は、この (39) 式を用いて近似すれば次のように表わされる。

$$Q(r, o, p) \doteq \frac{\kappa^{0.5} e^{j\frac{\pi}{4} - (j\kappa_1 + \kappa_2)r}}{4(2\pi r)^{0.5}(\mu + jp\zeta)} \left\{ 1 - \frac{3j}{8\kappa r} + \dots \right\}$$

$$W(r, o, p) = \frac{(-\alpha_2\kappa)^{0.5} e^{j\frac{3}{4}\pi - (j\kappa_1 + \kappa_2)r}}{2(2\pi r)^{0.5}(\mu + jp\zeta)(1 - \alpha_1)} \left\{ 1 + \frac{j}{8\kappa r} + \dots \right\}$$

ただし、 $\kappa = \kappa_1 - j\kappa_2$ である。

$$\kappa_1 = \left[\frac{\rho p^2 \{\mu + (\mu^2 + p^2 \zeta^2)^{0.5}\}}{2(1 + \alpha_1)(\mu^2 + p^2 \zeta^2)} \right] \tag{41}$$

$$\kappa_2 = \left[\frac{\rho p^4 \zeta^2}{2(1 + \alpha_1)(\mu^2 + p^2 \zeta^2) \{\mu + (\mu^2 + p^2 \zeta^2)^{0.5}\}^{0.5}} \right] \tag{42}$$

(40) 式において、 p/κ_1 は波の位相速度を、 κ_2 は粘性による過剰減衰を表わしている。(41) 式から明らかのように、波の速度は、粘性があるときは周波数に依存する。それに対して、純弾性システムでは一定となる。また、過剰減衰定数 κ_2 は幾何的減衰と合わ

せて振動の大きさを与える。なお、この結果は、粘弾性システムを一次元化したモデルの結果を含んでいる。¹¹⁾

4. システム同定

前節において、粘弾性システムのインパルス応答 $q(r, z, t)$ および $w(r, z, t)$ を導出したが、これらに含まれるパラメータ μ, σ, ζ, ρ は、現実のシステムでは、未知の場合が多い。特に、地盤振動系では、土の動的性質が周囲環境条件により変化する。また、これらのパラメータを精度よく推定することは困難であるといわれており、その系統的方法はまだないようである。従来、地盤の構造あるいは弾性的性質を知るために、速度検層法、屈折法、定常振動法等、位相速度を測定する方法がよく用いられている。⁷⁾⁸⁾¹²⁾ ここでは前節で導出したインパルス応答 $q(r, z, t)$ および $w(r, z, t)$ を用いて、パラメータであるヤング率 $E(=2\mu(1+\sigma))$ 、粘性係数 $G(=2\zeta(1+\sigma))$ 、ポアソン比 σ 、密度 ρ を原位置での衝撃加振に対する応答を測定することにより、系統的に推定することを考える。

いま、 $q \triangleq [q(r, z, t), D_t q(r, z, t), D_t^2 q(r, z, t), w(r, z, t), D_t w(r, z, t), D_t^2 w(r, z, t)]^T$ とし、その観測値をとす。観測値には一般に暗振動を初めとして雑音が重じようしていることおよび理論式は抽象化してモデル化された結果であることを考慮し、システム同定の評価として次の量を採用しよう。

$$J = \int_T \int_R (y - q)^T W (y - q) dr dt \quad (43)$$

ここで、 T および R は観測期間および観測領域であ

り、 W はシステム同定によって得られるモデルの使用目的を反映する重み行列である。

5. 実験例

この動的解析とシステム同定法を現実の地盤振動系に適用して、その理論的正当性と有効性を検証した。太田川河口の校庭における振動の実測値を用いて、土のヤング率、ポアソン比、粘性定数および密度を推定した。それに基づいて、地盤振動の理論値を算出し、実測値と比較検討した。

Fig.4 に示す現地において、落錘加振を行ない、その振動を測定した。その振動波形を Fig.5 に点線で示す。この測定値より、(43) 式を評価量として(32)式のインパルス応答を用いて推定したパラメータの値を Tab.1 に示す。通常、軟弱土では、密度 1.4~1.7t/m³、ヤング率 100~200kg/cm²、ポアソン比 0.45~0.49 であり、砂、砂れきでは、密度 1.6~2.2 t/m³、

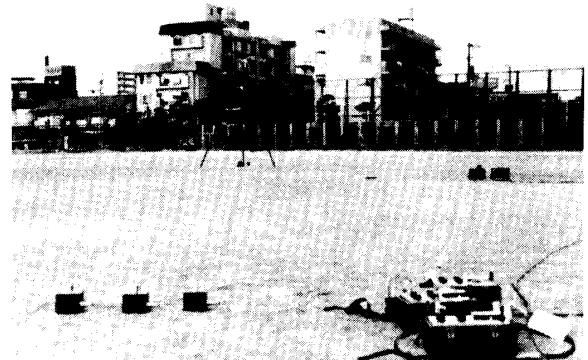


Fig.4 Photograph of testing ground.

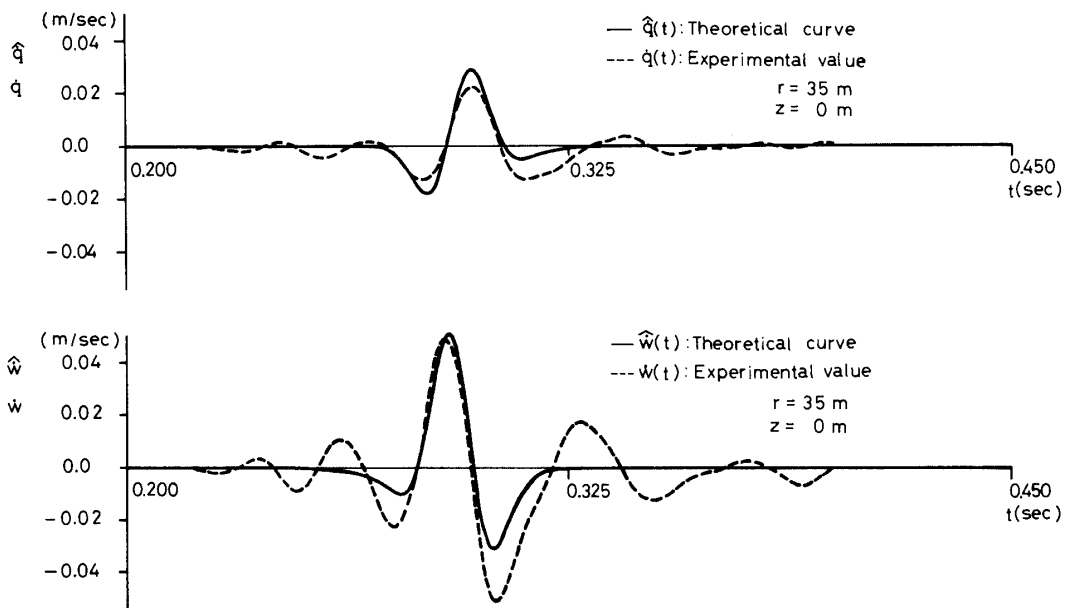


Fig.5 Example of response wave for falling weight and its theoretical response.

Tab. 1 Estimated parameters by using response for falling weight.

ρ ($\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)	E ($\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$)	G ($\frac{\text{kgsec}}{\text{cm}^2}$)	σ	μ ($\frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$)	ζ ($\frac{\text{kgsec}}{\text{cm}^2}$)
1800	830.0	0.150	0.426	291.0	0.0525

ヤング率 500~2000, ポアソン比 0.45 位といわれている。実験地が河口であることを考慮すれば, この推定結果は妥当なものであろう。このパラメータの推定値に基づく振動の理論値を Fig.5 に実線で示す。理論値は現象を概略説明しおり, この方法は地盤振動系のモデリングのための一つの基礎となり得るであろう。

6. 結 言

粘性をもつ双曲型分布定数系の動的解析を行ない, そのシステム同定の一方法を提案した。さらに, この方法を現実の地盤振動系へ適用し, 概略, 現象を説明できることを確認した。今後の課題としては, 多層構造システムへの拡張, システムの固有振動数の陽表示等, 重要な問題がある。これらについては, 今後も検討を進めたい。

終りに, 本研究に多大なご協力をいただいた計測リサーチ K.K.加登文士氏, ご討論いただいた広島大学佐藤誠講師に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) Sanathanan; IEEE Tr. on AC, AC-11, 724~729 (1966).
- 2) P.L. Collins & H.C. Khatri; Tr. ASME, JBE, 91, 239~245 (1969).
- 3) J.H. Seinfeld; Chemical Engineering Science, 24, 65~74(1969).
- 4) F.J. Dardreaurille & R.E. Goodson; Tr. ASME, JBE, 88, 463~468 (1966).
- 5) M.P. Polis, R.E. Goodson & M.J. Wozny; Automatica, 9, 53~64(1973).
- 6) W.H. Chen & J.H. Seinfeld; Int. J. Control, 15, 487~495 (1972).
- 7) 石原研而; 土質動力学の基礎, 鹿島出版会, 1976.
- 8) F.E. & Jr. R.O. リチャードウッズ土と基礎の振動, 鹿島出版会, 1976.
- 9) K.C. Valanis & A. Iowa; Acta. Mechanica, 4, 170~190 (1967).
- 10) H. Lamb; Philosophical Transactions of the Royal Society, A, 203, 1~42 (1904).
- 11) 小林芳正; くい打ちによる地盤の振動と変状, 鉄道技研研究報告, No.583 (1967).
- 12) 小林芝正; 建設における地盤振動の影響と防止, 鹿島出版会, 1975.
- 13) 沖田, 木村, 佐藤; 双曲型分布定数系の同定と地盤振動への応用, 第四回システム・シンポジウム, 141~146 (1978).

(昭和 54 年 10 月 15 日 受理)