2次元オンラインテセレーションアクセプタのAFM性

井上　克司*・高浪　五男*・谷口　　弘*

AFM Property of Two-Dimensional On-Line Tessellation Acceptors

Katsushi INOUE, Itsuo TAKANAMI and Hiroshi TANIGUCHI

Abstract

A family of matrix languages (or two-dimensional languages) is called an abstract family of matrices (AFM) if it is closed under the six operations of union, (column) catenation, Kleene closure, ε-free homomorphism, inverse homomorphism, and intersection with regular matrix languages. This paper shows that the class of sets accepted by nondeterministic two-dimensional on-line tessellation acceptors is an AFM, but the class of sets accepted by deterministic two-dimensional on-line tessellation acceptors is not an AFM.

1. まえがき

筆者らは，先に2次元テープの受理の可否を並列的，オンライン的処理で決定する能力を有する2次元オンラインテセレーションアクセプタ（2-ota）について，その種々の性質（受理能力，閉包性など）を明らかにしてきた[1)~3)]．

本稿では，2-ota の AFM（Abstract Family of Matrices）性について議論する．G. Siromoney らは，AFL（Abstract Family of Languages）[4)]の概念を2次元的に拡張した AFM なる概念を導入し，句構造マトリクス文法の生成する2次元テープの集合の族は，AFM であることを示した[5)]．本稿の第3章で，非決定性の 2-ota で受理される集合の族も同様に AFM であることを示す．同時に，決定性の 2-ota で受理される集合の族は AFM ではないことを示す．

2. 準　備

〔定義1〕 記号の有限集合 Σ 上の2次元テープとは，Σ の要素からなる m 行 n 列（$m, n \geqq 1$）の方形配列をいう．Σ 上のすべての2次元テープの集合を $\Sigma^{(2)+}$ と記す．

2次元テープ $x \in \Sigma^{(2)+}$ に対し，$l_1(x)$，$l_2(x)$ はそれぞれ x の行の数，列の数を表わし，又，$x_{i,j}$（$1 \leqq i \leqq l_1(x)$，$1 \leqq j \leqq l_2(x)$）は，i 行 j 列に位置する x 上の記号を表わす．更に，$x[(i, j), (i', j')]$ は，$1 \leqq i \leqq i' \leqq l_1(x)$，且つ $1 \leqq j \leqq j' \leqq l_2(x)$ のときのみ次の (i), (ii) を同時に満足する2次元テープ z として定義される．

(i) $l_1(z) = i' - i + 1$ 且つ $l_2(z) = j' - j + 1$

(ii) 各 k, r $(1 \leqq k \leqq l_1(z),\ 1 \leqq r \leqq l_2(z))$，に対し，

$$z_{k,r} = x_{k+i-1,\ r+j-1}.$$

〔定義2〕 $x \in \Sigma_1^{(2)+}$，$y \in \Sigma_2^{(2)+}$ をそれぞれ図1の (a)，(b) に示す2次元テープとする．このとき，x ① y（x②y）は，$n = n'$（$m = m'$）のときのみ同図 (c)（(d)）に示す2次元テープとして定義される．

〔定義3〕 $T \subseteq \Sigma_1^{(2)+}$，$T' \subseteq \Sigma_2^{(2)+}$ とする．このとき，$i = 1, 2$ に対して，

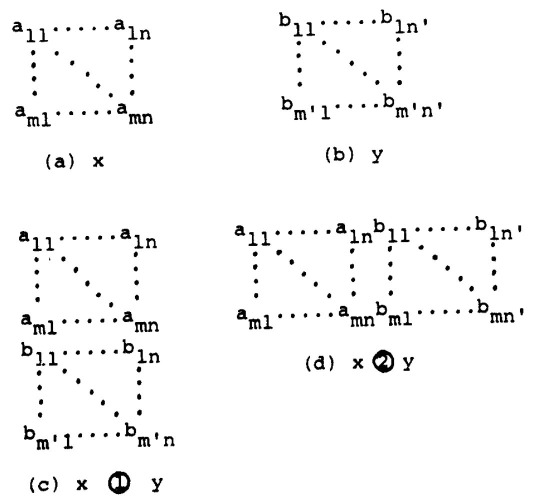

Fig.1 Illustration of Definition 2.

* 電子工学科

$T \textcircled{i} T' \triangleq \{x \textcircled{i} y \mid x \in T$ 且つ $y \in T'\}$

$T^{\textcircled{i}+} \triangleq \bigcup_{j\geq 1} T^{j\textcircled{i}}$ (ここで, $T^{1\textcircled{i}}=T$, $T^{2\textcircled{i}}=T \textcircled{i} T$, $T^{j+1\textcircled{i}}=T^{j\textcircled{i}} \textcircled{i} T$).

演算ⓘ, ⓘ+ をそれぞれⓘ連接, ⓘ閉包と呼ぶ.

〔定義4〕 Σ_1, Σ_2をある有限な記号集合とする. 写像 $H: \Sigma_1^{(2)+} \to \Sigma_2^{(2)+}$ は, 任意の $x, y \in \Sigma_1^{(2)+}$ に対し

$$H(x①y)=H(x)①H(y) \text{ 且つ}$$
$$H(x②y)=H(x)②H(y)$$

である場合に, **準同型**であるといわれる. (準同型写像 Hは, 任意の $a \in \Sigma_1$ に対し, $H(a)$ が r 行 s 列の $\Sigma_2^{(2)+}$ 中の2次元テープ, r と s は H にのみ依存する1以上の整数定数, であるときのみ定義される.) 各 $T \subseteq \Sigma_1^{(2)+}$に対し,

$$H(T)=\{H(x) \mid x \in T\}$$

〔定義5〕 準同型写像$H: \Sigma_1^{(2)+} \to \Sigma_2^{(2)+}$ の逆写像 (**逆準同型写像**) $H^{-1}: \Sigma_2^{(2)+} \to 2^{\Sigma_1^{(2)+}}$は, 各 $y \in \Sigma_2^{(2)+}$ に対して,

$$H^{-1}(y)=\{x \in \Sigma_1^{(2)+} \mid H(x)=y\}$$

のように定義される写像である. 各 $T \subseteq \Sigma_2^{(2)+}$ に対し

$$H^{-1}(T)=\underset{y \in T}{\subset} H^{-1}(y)$$

次に, G. Siromoney らによって導入された AFM (Abstract Family of Matrices) の定義を与えよう[5].

〔定義6〕 ある2次元テープの集合族は, 和, ②連接, ②閉包, 準同型写像, 逆準同型写像, 並びに正規マトリクス言語 (Regular Matrix Language)* との共通積の6つの演算のもとで閉じておれば, AMF であると呼ばれる.

次に, 本稿で議論の対象となる2次元オンラインテセレーションアクセプタ (2-ota) の動作を直観的に説明しよう (2-ota の形式的定義については文献〔1〕を参照されたい.

2-ota は, 同一の有限状態機械を2次元空間内に規則正しく配列したものである. 2次元テープ x を 2-ota M に入力するということは, 座標(i, j) $(1 \leq i \leq l_1(x),\ 1 \leq j \leq l_2(x))$ に位置する有限状態機械 (この機械を (i, j) セルと呼ぶ) に記号 $x_{i,j}$ を入力し, そのほかのすべてのセル上に特殊な境界記号を入力することを意味する. 2次元テープxが 2-ota M に入力されるとき, Mは次のように同期的に動作する. 最初, 時刻 $t=0$ では, Mの各セルはいわゆる '静止状態' を保っている. 時刻 $t=1$ に$(1,1)$ セルが$x[(1,1),(1,1)]$ の特徴に対応するある安定状態に入る. 一般に, 時刻 $t=k(k \geq 1)$ において, $(i-1)+(j-1)=k-1$ であるような各 (i, j) セルが, その近傍の2個のセル $(i-1, j)$ セル, $(i, j-1)$ セルに記憶されている各安定状態と記号 $x_{i,j}$ とから $x[(1, 1), (i, j)]$ の特徴を決定し, その特徴に対応する安定状態に入る (時刻 $t=k$ までは, $(i-1)+(j-1)=k-1$であるような各 (i, j) セルは静止状態を保っており, 時刻 $t=k$ において初めてある安定状態に入り, 時刻 $t=k$ の後はその安定状態を保つ). 2-ota Mは, $(l_1(x), l_2(x))$ セルが特別な安定状態 (受理状態) に入る場合に限って, 入力テープ x を受理する.

以下, 決定性 2-ota を d2-ota と記し, 非決定性 2-ota を単に 2-ota と記す. また d2-ota (2-ota) によって受理されるすべての2次元テープの集合の族を L(d2-ota) (L(2-ota)) と記す.

G. Siromoney らは, 文献〔5〕において, 句構造マトリクス文法の生成する2次元テープの集合の族は, AFM であることを示している. 次章で, L (d2-ota) は AFM ではないがL(2-ota) は AFM であることを示す.

3. L(d2-ota), L(2-ota) の AFM 性

まず, L(d2-ota) は AFM ではないことを示す.

〔定理1〕 L(d2-ota) は AFM ではない.

証明 文献〔1〕の定理5で L(d2-ota) はプロジェクションに関し閉じていないことが示されている.** このこととプロジェクションは準同型写像の特別なものであることから, L(d2-ota) は準同型写像に関し閉じていないことが知れる. 従って, 本定理が成立する.

(証明終)

次に, L(2-ota) は AFM であることを示そう. そのために, いくつかの補題を与える.

〔補題1〕 L (2-ota) は, 準同型写像に関し閉じている.

証明 $M_1=(K_1,\ E^2, \Sigma_1 \cup \{*\},\ \delta_1,\ q_e,\ q_0,\ F_1)$を2次元テープの集合 T_1を受理する 2-ota とし, $H: \Sigma_1^{(2)+} \to \Sigma_2^{(2)+}$ を次のような準同型写像とする. 任意の $a \in \Sigma_1$ に対し, $l_1(H(a))=r$, $l_2(H(a))=s$ (r, sは1以上の整数定数).

次の性質をもつ 2-ota $M_2=(K_2,\ E^2,\ \Sigma_2 \cup \{*\}, \delta_2,\ q_e,\ q_0,\ F_2)$ を考える. 入力テープを $x \in \Sigma_2^{(2)+}$としよう. 図2のように, M_2の第1列並びに第1行に位置するセルは, それぞれr 並びにsをカウントするのに用いられ, 各n, m $(1 \leq n \leq \lfloor l_1(x)/r \rfloor$***, $1 \leq m \leq \lfloor l_2(x)/s \rfloor)$ に対し $(nr, 1)$セル, $(1, ms)$ セルはそれぞ

* 正規マトリクス言語の定義については, 〔5〕, 〔6〕 文献を参照されたい.

** プロジェクションの定義については, 文献〔1〕の定義5を参照されたい.

*** $\lfloor k \rfloor$は, kを越えない最大の整数を表わす.

れ右方および下方に信号①,②を送る．①,②の信号が同時にぶつかるセルが $(nr,\ ms)$ セルであることが分かる．

いま，各 $n,\ m(1\leqq n\leqq \lfloor l_1(x)/r\rfloor,\ 1\leqq m\leqq \lfloor l_2(x)/s\rfloor)$ に対し，

$T_{n,m}(x)=\{a\in\Sigma_1 \mid H(a)=x[((n-1)r+1,\ (m-1)s+1),\ (nr,\ ms)]\}$,

$Q_{n,m}(x)=\{q\in K_1-\{q_e,q_0\} \mid M_1$ が $H^{-1}(x[(1,\ 1),\ (nr,\ ms)])$ の中のあるテープを読むときに，M_1 の $(n,\ m)$ セルが状態 q に入り得る$\}$

とする．このとき，M_2 の $(nr,\ ms)$ セルは，$((n-1)r, ms)$ セルに記憶されている（$Q_{n-1,m}(x)$ の中のある）状態 q_1 と，$(nr,(m-1)s)$ セルに記憶されている（$Q_{n,m-1}(x)$の中のある）状態 q_2，並びに $T_{n,m}(x)$を用いて，

$$\bigcup_{a\in T_{n,m}(x)}\delta_1(q_0,q_1,q_2,\ a)\ (\subseteq Q_{n,m}(x))$$

$$\left(\begin{array}{l} n=m=1 \text{ のときは} \\ \bigcup_{a\in T_{1,1}(x)}\delta_1(q_e,q_0,q_0,\ a)\ (=Q_{1,1}(x)) \end{array}\right)$$

の中のある状態 q を担った状態 $q_{nr,ms}$ $(\in K_2)$ に入る．この q が F_1 に含まれておれば，$q_{nr,ms}$ は F_2 に含まれるとする（上の説明中，$Q_{o,m}(x)$, $Q_{n,o}(x)$ はともに $\{q_0\}$ であると解釈されたい）．もちろん，M_2 は $l_1(x)$ が r の倍数でないかあるいは $l_2(x)$が s の倍数でなければ，x を受理しない．以上の動作をするように δ_2 を具体的に構成することは容易であるが，繁雑になるので省略する．

$$T(M_2)=H(T(M_1))=H(T_1)^*$$

が言えることは明らかである．

（証明終）

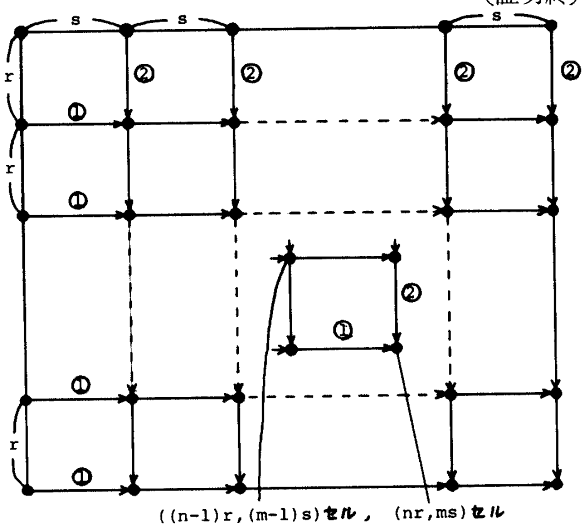

Fig. 2　Illustration for the proof of Lemma 1.

〔補題２〕 L(2-ota) は，逆準同型写像のもとで閉じている．

証明　$M_2=(K_2,\ E^2,\ \Sigma_2\cup\{✻\},\ \delta_2,\ q_e,\ q_0,\ F_2)$ を２次元テープの集合 T_2 を受理する 2-ota とし，H: $\Sigma_1^{(2)+}\rightarrow\Sigma_2^{(2)+}$ を次のような準同型写像とする．

任意の $a\in\Sigma_1$ に対し，$l_1(H(a))=r$ 且つ $l_2(H(a))=s$ $(r,\ s$ 1は以上の整数定数）．

次の性質をもつ 2-ota $M_1=(K_1,\ E^2,\ \Sigma_1\cup\{✻\},\ \delta_1,\ q_e,\ q_0,\ F_1)$ を考える．入力テープを $x\in\Sigma_1^{(2)+}$ としよう．各 $n,\ m(1\leqq n\leqq l_1(x),\ 1\leqq m\leqq l_2(x))$ に対し，

$Q_{n,m}(x)=\{(q_{21},\cdots,q_{22},\ q_{2r},\ p_{21},\ p_{22},\cdots,p_{2s})\in(K_2-\{q_e,\ q_0\})^{r+s} \mid M_2$ が $H(x[(1,\ 1),\ (n,\ m)])$ を読むときに，M_2 の $((n-1)r+i,\ ms)$ セルの入り得る状態が q_{2i}であり $(1\leqq i\leqq r)$，また M_2 の $(nr,\ (m-1)s+j)$ セルの入り得る状態が p_{2j} である $(1\leqq j\leqq s,\}$ （明らかに，$q_{2r}=p_{2s}$）

とする．このとき，M_1 の (n,m) セルは，$(n-1,m)$ セルに記憶されている（$Q_{n-1,m}(x)$ の中のある）$(q'_{21},\ q'_{22},\cdots q'_{2r},\ p'_{21},\ p'_{22},\cdots p'_{2s})$ と，$(n,\ m-1)$ セルに記憶されている（$Q_{n,m-1}(x)$ の中のある）$(q''_{21},\ q''_{22},\ \cdots,\ q''_{2r},\ p''_{21},\ p''_{22},\cdots,\ p''_{2s})$，並びに $H(x_{n,m})$ を用いて，$Q_{n,m}(x)$ の中のある $(q_{21},q_{22},\cdots,\ q_{2r},\ p_{21},\ p_{22},\cdots,\ p_{2s})$ を担った状態 $q_{n,m}(\in K_1)$ に入る（$p'_{21},\ p'_{22},\cdots,p'_{2s},\ q''_{21},\ q''_{22},\cdots,\ q''_{2r}$ と $H(x_{n,m})$ とから $(q_{21},\ q_{22},\cdots,\ q_{2r},\ p_{21},\ p_{22},\cdots,\ p_{2s})$ が決定できることは容易に理解されるであろう）．$q_{2r}=p_{2s}$ が F_2 の中に含まれておれば，$q_{n,m}$ は F_1 に含まれるとする．上の説明中，$n=1$のときは $p'_{2j}=q_0\ (1\leqq j\leqq s)$，$m=1$のときは $q''_{2i}=q_0(1\leqq i\leqq r)$ であると解釈されたい．このように動作する M_1 に対し

$$T(M_1)=H^{-1}(T(M_2))=H^{-1}(T_2)$$

が成り立つことは容易に知れる．M_1 を具体的に構成することは容易であるが，繁雑になるので省略する．

（証明終）

〔補題３〕 L(2-ota) は，正規マトリクス言語との共通積に関し閉じている．

証明　文献[3] で示されているように，任意の正規マトリクス言語は L(2-ota) に含まれる．このことと L(2-ota) は共通積に関し閉じている[1]ことから，本補題の成り立つことが知れる．

（証明終）

〔補題４〕[1),2)] L(2-ota) は，和，②連接，②閉包をとる演算に関し閉じている．

補題1～4 より，次の定理が得られる．

〔定理２〕 L(2-ota) は，AFM である．

* 任意の 2-ota M に対し，$T(M)$ は M によって受理されるすべての２次元テープの集合を表わす．

4. むすび

本稿では，2次元オンラインテセレーションアクセプタに関する性質として，AFM 性を調べ，L(d2-ota) は AFM ではないが，L(2-ota) は AFM であることを示した．

ところで，2次元決定性有限オートマタ (2-*DAs*)[7),8)] や2次元非決定性有限オートマタ (2-*NAs*)[7),8)]で受理される集合族は，プロジェクションに関し閉じていないので[9)]，準同型写像に関し閉じておらず，従って AFM ではない．このように，2次元テープ上で動作するオートマタで受理される多くの集合族は，AFM ではない．このことが，2次元言語族の代数的性質の取り扱いを困難にしている1つの要因であるように思われる．

参考文献

1) 井上克司，中村 昭：2次元オンラインテセレーションアクセプタ，電子通信学会論文誌，**J59-D**, 3, p. 229 (1976).
2) 井上克司，中村 昭：2次元オンラインテセレーションアクセプタに関するある性質，電子通信学会論文誌，**J59-D**, 10, p.695 (1976).
3) 井上克司，中村 昭：2次元オンラインテセレーションアクセプタ並びにその変種の受理能力に関する整理，電子通信学会論文誌，**J60-D**, 6, p.443 (1977).
4) S. Ginsburg: 'Algebraic and automata-theoretic properties of formal languages', North-Holland publishing Company (1975)
5) G. Siromoney, R. Siromoney and K. Krithivasan: 'Abstract families of matrices and picture languages', Computer Graphics and Image Processing, **1**, p.63 (1972).
6) G. Siromoney, R. Siromoney and K. Krithivasan: Picture languages with array rewriting rules', Information and Control, **22**, p.447 (1973).
7) K. Inoue, I. Takanami and Akira NaKamura: 'A note on two-dimensional finite automata', Information Processing Letters, **7**, p.49 (1978).
8) M. Blum and C. Hewitt: 'Automata on a two-dimensional tape', IEEE Symp. On Switching and Automata Theory (1967) 155.
9) K. Inoue and I. Takanami: 'A note on closure properties of the classes of sets accepted by tape-bounded two-dimensional Turing machines', Information Sciences, **15**, p.143 (1978)

(昭和54年10月15日 受理)