代数方程式の根の分離について

—単位円内における根の数の決定—

吉 岡 敏 彦*・鳥 居 達 生**

On the Separation of All Roots of a Polynomial by Determing the Number of Roots inside the Unit Circle.

Toshihiko YOSHIOKA and Tatsuo TORII

Abstract

In this paper authors relate a method for solving a polynomial using an automatic computer. This method is one which developed further Lehmer Method, finds the all roots of a polynomial by knowing follows.

1) When a given polynomial has no root on the unit circle, the number of roots inside it.

2) When a given polynomial has a root or roots on the unit circle, the argument of all roots on it.

1. まえがき

代数方程式の解法としては一般に各種の反復法が用いられる．反復法によって解くとき常に根に収束することと，収束が速いことが望ましいが，一つの方法だけで両者を満足するような方法は見出されていない（たとえば文献1～3）．しかし計算機の発達とともに，大域的な収束性（global convergence）の方が重視されるようになってきている[4)~7)]．

中でもLehmerの方法は大域的に根の存在する領域を定め，計算過程における収束の困難性を少なくするという点に特徴がある．すなわち多項式 $f(z)$ の根が複素平面上の原点を中心とし，半径1の円（単位円）の内部にあるか否かを判定し，次に適当な座標変換を行なう．この操作を繰返し，$f(z)$の一根ζの存在する領域を逐次せばめる．一根ζを求めた後 $f(z)$ を $f(z)/(z-\zeta)$ で置き換えて他の根を求める．

われわれは Lehmer の方法をさらに発展させ，次の二点

(1) $f(z)$ が単位円 Γ 上に根をもたない場合には Γ 内に存在する根の数.

(2) $f(z)$ が Γ 上に根をもつ場合には Γ 上のすべての根の偏角.

を知ることによって，$f(z)$の次数を逓減することなくすべての根を求めることができた．

解法の要点は次のとおりである．

n次多項式 $f(z)$ の根をζとする．単位円に関するζの反転の点$1/\bar{\zeta}$を根とする多項式を$f^*(z)$とする．

いま $f(z)$ を $f_0(z)$ とおき，$f_0(z)$ と $f_0^*(z)$ より $f_0(z)$ の最高べきを消去して $f_1(z)$ とする．

以下同様にして $f_1(z)$ と $f_1^*(z)$ より $f_2(z)$，……，$f_k(z)$，……，$f_{h+1}(z)$をつくる．高々n回この消去を行なえば $f_{h+1}(z)$ は z に無関係な定数 f_{h+1} となる．$f_k(z)$がΓ内でもつ根の数をμ_kとしμ_kに関する漸化式 $\mu_{k-1}=\phi(\mu_k)$ を見出すならば，$f_{h+1}=0$のとき $\mu_{h+1}=0$は自明であるからμ_h，μ_{h-1}，……，μ_1，μ_0を順次求めることができる．すなわち$f(z)$がΓ内でもつ根の数μ_0を知ることができる．そこで任意の正数rをとり $z=rz'$ と変換すれば$f(rz')$が$z'<1$でもつ根の数がわかる．いいかえれば$f(z)$が$z<r$でもつ根の数がわかる．

したがって半径r_1，r_2を適当に定めて，その同心円がつくる円環内に根が存在するようにできる．区間縮少法によりr_1，r_2の差を小さくすれば，必要な精度で根の絶対値を計算することができる．

* 電気工学教室
** 大阪大学工学部

つぎに半径rの円周上に$f(z)$の根があるとしよう．このとき$f(rz)$をあらためて$f(z)$とすれば$f(z)$はΓ上に根をもつ．$f(z)$のΓ上の根は$f(z)$と$f^*(z)$の最大公約数$p(z)$の根に含まれるので$p(z)$のΓ上の根を求めれば根の偏角が定まる．後に示すように$p(z)$は特殊な多項式であるため，$p(z)$のΓ上の根を求めることは比較的容易である．

2，3 節で計算法の基礎を説明し，**4，5**節で計算法と計算例を示す．

なお代数方程式の根に関する歴史的な研究成果は文献[8]にくわしい．

2. 単位円内の根の数について

多項式$f(z)$が単位円の内部$|z|<1$でもつ根の数を知るために必要な定義と補題から述べる．

いまn次の複素係数多項式

$$f(z)=a_0z_n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}z+a_n \qquad (1)$$

ただし $a_0\fallingdotseq 0$

に対し

$$\left\{f(z)\right\}^*\equiv f^*(z)$$
$$\equiv\bar{a}_n z^n+\bar{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+\bar{a}_1 z+\bar{a}_0$$
$$=z^n\overline{f(1/\bar{z})} \qquad (2)$$

を定義する．

また$f(z)$と$f^*(z)$の根がすべて等しければ$f(z)=0$を相反方程式とよぶ．

補　題 1

(1) $f(0)\neq 0$ ならば

$$[\{f(z)\}^*]^*=f(z)$$

(2) $p(z)$，$q(z)$を二つの多項式（あるいはいずれか一方は定数）とするとき

$$\{p(z)q(z)\}^*=p^*(z)q^*(z)$$

(3) $|z|=1$ならば

$$|f(z)|=|f^*(z)|$$

証　明

(1) $f^*(z)$の最高べきの係数$\bar{a}_n=\overline{f(0)}\neq 0$とし定義式の両辺に変換$*$をほどこすと

$$\{f^*(z)\}^*=\{\bar{a}_n z^n+\bar{a}_{n-1}z^{n-1}+\cdots\cdots+\bar{a}_0\}^*$$
$$=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$
$$=f(z)$$

(2) $p(z)$，$q(z)$の次数をそれぞれl，mとすれば$p(z)q(z)$の次数は$l+m$であるから

$$\{p(z)q(z)\}^*=z^{l+m}\{\overline{p(1/\bar{z})}\ \overline{q(1/\bar{z})}\}$$
$$=z^l\,\overline{p(1/\bar{z})}\,z^m\,\overline{q(1/\bar{z})}$$
$$=p^*(z)q^*(z)$$

(3) $|z|=1$ならば $z=1/\bar{z}$ であるから

$$|f^*(z)|=|z^n\overline{f(1/z)}|$$
$$=|z|^n|f(z)|$$
$$=|f(z)|$$

（証明終）

補題 2 $P(z)$，$Q(z)$を二つの多項式とするとき$|z|=1$において常に

$$|P(z)|<|Q(z)|$$

ならば$Q(z)$と$P(z)+Q(z)$は単位円の内部で同数の根をもつ．

これはRouchē の定理の特別な場合に外ならない．

補題 3 n次多項式$f(z)$の最高べきを

$$g(z)=\overline{f(0)}\ f(z)-\overline{f^*(0)}\ f^*(z),\quad f^*(0)\neq 0$$

によって消去するとき

(1) $g(0)\neq 0$ ならば$f(z)$と$f^*(z)$の最大公約数は$g(z)$と$g^*(z)$の最大公約数に等しい．ただし最大公約数の定数倍は無視する（以下同様）．

(2) $g(0)$の値のいかんにかかわらず$f(z)$と$f^*(z)$の最大公約数は$g(z)$と$g^*(z)$の最大公約数に含まれる．

(3) $g(0)>0$ならば$f(z)$と$g(z)$は単位円の内部で同数の根をもつ．

$g(0)<0$ならば$f^*(z)$と$g(z)$は単位円の内部で同数の根をもつ．

(4) $g(0)=0$で，かつ$g(z)$の根が単位円上になければ$g(z)$，$f(z)$，$f^*(z)$は単位円の内部で同数の根をもつ．

$g(z)\equiv 0$，すなわち$f(z)=0$が相反方程式ならば$f(z)$と$f'^*(z)$は単位円わの内部で同数の根をもつ．

証　明

(1) $g(z)$の次数をkとすれば，

$$g^*(z)=z^k\overline{g(1/\bar{z})}$$
$$=z^k\ \{f(0)\overline{f(1/\bar{z})}-f^*(0)\overline{f^*(1/\bar{z})}\}$$
$$=z^{k-n}\ \{f(0)f^*(z)-f^*(0)f(z)\},$$
$$(f(z)=z^n\overline{f^*(1/\bar{z})})$$

となるので，$g^*(z)$と$g(z)$をまとめて表すと

$$\begin{bmatrix} g(z) \\ z^{n-k}g^*(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{f(0)} & -\overline{f^*(0)} \\ -f^*(0) & f(0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(z) \\ f^*(z)\end{bmatrix}$$

また

$$\begin{vmatrix}\overline{f(0)} & -\overline{f^*(0)} \\ -f^*(0) & f(0)\end{vmatrix}=|f(0)|^2-|f^*(0)|^2=g(0)$$

いま$f(z)$と$f^*(z)$の共通根の中より勝手に一つとり出し，これをζとする．

$g(0)\fallingdotseq 0$ならば$f(\zeta)=f^*(\zeta)=0$のときに限り

$$g(\zeta)=\zeta^{n-k}g^*(\zeta)=0$$

となる．ただし$f^*(0)\fallingdotseq 0$であるから$\zeta\fallingdotseq 0$．

すなわち

$$g(\zeta)=g^*(\zeta)=0$$

ζ が $f(z)$ と $f^*(z)$ の重根ならば，ζ における $g(z)$ と $z^{n-k}g^*(z)$ の高次微係数を考えれば，ζ は $g(z)$ と $g^*(z)$ の重根であって，かつ重複度も変らないことがわかる．

以上のことは $f(z)$ と $f^*(z)$ の任意の共通根についていえるので，$g(0)\neq 0$ ならば $f(z)$ と $f^*(z)$ の最大公約数と $g(z)$ と $g^*(z)$ の最大公約数は等しい．

(2) $g(0)$ の値に関係なく $f(\zeta)=f^*(\zeta)=0$ ならば常に $g(\zeta)=g^*(\zeta)=0$ となるので $f(z)$ と $f^*(z)$ の最大公約数は $g(z)$ と $g^*(z)$ の最大公約数に含まれる．

(3) $f(z)$ と $f^*(z)$ の単位円 Γ 上の根はすべて共通であるから $f(z)$ の根が Γ 上にない場合だけについて考える．

補題1 の(3)より

$$|f(z)|=|f^*(z)|,\quad |z|=1$$

であるから，Γ 上において

$$|\overline{f(0)}f(z)|,\quad |-\overline{f^*(0)}f^*(z)|$$

の大きさはそれぞれ

$$|f(0)|,\quad |f^*(0)|$$

の大きさだけによって定まる．

しかるに

$$g(0)=|f(0)|^2-|f^*(0)|^2$$

であるから **補題2** より $g(0)>0$ ならば $\overline{f(0)}f(z)$ と $\overline{(0)}f(z)-\overline{f^*(0)}f^*(z)$ は $|z|<1$ において同数の根を f もつ．すなわち，$g(0)>0$ ならば $f(z)$ と $g(z)$ は Γ 内で同数の根をもつ．

同様にして，$g(0)<0$ ならば $f^*(z)$ と $g(z)$ は Γ 内で同数の根をもつことが証明される．

(4) 任意の半径 r の円内に存在する $f(z)$ の根の数は $f(rz)$ が $|z|<1$ でもつ根の数に等しいので $f(rz)\equiv F(z,\ r)$ とおき

$$\begin{aligned}G(z,\ r)&=\overline{F(0,\ r)}F(z,\ r)\\&\quad-F^*(0,\ r)F^*(z,\ r)\\&=\overline{f(0)}f(rz)-r^n\overline{f^*(0)}f^*(\bar{z}r)\end{aligned}$$

をつくる．また $g(z)$ の z に rz を代入すれば

$$\begin{aligned}g(rz)&=\overline{f(0)}f(rz)-\overline{f^*(0)}(rz)^n\overline{f(1/r\bar{z})}\\&=\overline{f(0)}f(rz)-r^n\overline{f^*(0)}f(z/r)\end{aligned}$$

であるから上の両式より

$$G(z,\ r)-g(rz)=-r^n\ \overline{f^*(0)}\ \{f^*(rz)$$

$-f^*(z/r)\}$ の関係が得られる．右辺は $r=\pm 1$ のとき恒等的に0となるので

$$G(z,\ r)-g(rz)=(1-r^2)H(z,\ r)$$

と表わされる．ここで $H(z,\ r)$ は z に関して高々 $n-1$ 次，r に関して $2(n-1)$ 次の多項式である．

なお

$$G(0,\ r)-g(0)=|f^*(0)|^2(1-r^{2n})$$

より，すべての r に対し

$$H(0,\ r)=|f^*(0)|^2(1+r^2+\cdots\cdots+r^{2n-2})>0$$

となる．

さて問題は $g(0)=0$ で，かつ $r=1$ のときであるから，多項式 $f(z)$，$f^*(z)$，$F(z,\ r)$，$F^*(z,\ r)$，$g(z)$，$G(z,\ r)$，$H(z,\ r)$ が $|z|<1$ でもつ根の数をそれぞれ μ_f，μ_{f^*}，μ_F，μ_F，μ_{F^*}，μ_g，μ_G，μ_H とし，μ_f，μ_{f^*}，μ_g の関係について考える．

$g(z)$ の根が Γ 上になければ，**補題3** の(2)より $f(z)$ の根も Γ 上にない．したがって r が1に十分近ければ

$$\mu_f=\mu_F,\quad \mu_{f^*}=\mu_{F^*},\quad \mu_g=\mu_G$$

が成り立つ．

一方

$$G(0,\ 1-0)=+0,\quad G(0,\ 1+0)=-0$$

であるから **補題3**，(3)より

$$\mu_F=\mu_G,\quad r=1-0$$

$$\mu_{F^*}=\mu_G,\quad r=1+0$$

となるので，以上をまとめると $r\to 1$ のとき

$$\begin{aligned}\mu_g&=\mu_G=\mu_F=\mu_f\\&=\mu_{F^*}=\mu_{f^*}\end{aligned}$$

すなわち $g(0)=0$ で $g(z)$ の根が Γ 上になければ $g(z)$，$f(z)$，$f^*(z)$ は Γ 内で同数の根をもつ．

次に $g(z)\equiv 0$ の場合について述べる．このとき $f^*(z)=cf(z)$，$c=f^*(0)=f^*(0)/\overline{f(0)}\neq 0$ であるから

$$\mu_f=\mu_{f^*}$$

さらに

$$G(z,\ r)=(1-r^2)H(z,\ r)$$

であるから正数 r が $r\neq 1$ ならば

$$\mu_H=\mu_G$$

また

$$G(0,\ 1-0)=+0$$

$$\mu_f=\mu_F,\quad r=1-0$$

であるから **補題3** の(3)と $\mu_H=\mu_G$ より

$$\mu_H=\mu_F=\mu_f,\quad r=1-0$$

他方

$$G(0,\ 1+0)=-0$$

より

$$\mu_H=\mu_{F^*},\quad r=1+0$$

となるが，$f(z)$ と $f(rz)$ は $r=1+0$ のとき $|z|>1$ で同数の根をもつので $\mu_{F^*}=\mu_{f^*}$ となる．したがって

$$\mu_f=\mu_H,\quad r=1-0$$

$$\mu_{f^*}=\mu_H,\quad r=1+0$$

$$\mu_f=\mu_{f^*}$$

となるから μ_H は $r=1$ において連続で

$\mu_H=\mu_f=\mu_{f^*},\ r=1$

が成り立つ.

ところで

$$H(z,1)=\lim_{r\to 1}\frac{G(z,r)}{1-r^2}$$

$$=f^*(0)\ f'^*(z)$$

であるから，結局 $f(z)=0$ が相反方程式ならば $f(z)$ と $f'^*(z)$ は Γ 内で同数の根をもつ.（証明終）

n 次多項式 $f_0(z)$ より

$$f_1(z)=\overline{f_0(0)}\ f_0(z)-\overline{f_0^*(0)}\ f_0^*(z)$$
$$\vdots$$
$$f_{k+1}(z)=\overline{f_k(0)}\ f_k(z)-\overline{f_k^*(0)}\ f_k^*(z)$$
$$\vdots$$
$$f_{h+1}(z)=\overline{f_h(0)}\ f_h(z)-\overline{f_h^*(0)}\ f_h^*(0)$$
$$\equiv f_{h+1}$$

をつくる.

函数列

$$f(z)=f_0(z),\ f_1(z),\ \cdots\cdots f_h(z),\ f_{h+1} \qquad (3)$$

より Lehmerは多項式 $f(z)$ が単位円 Γ 内に根をもつための必要十分条件について述べている[4]. われわれは同じく函数列(3)を用い，以下に述べるように $f(z)$ が Γ 内でもつ根の数を知ることができた.

ここで $f_k(z)$ の次数を n_k とすれば

$$n=n_0>n_1\cdots\cdots>n_h>n_{h+1}=0 \qquad (4)$$

となっている.

以下断わりなしに $f_k(z)$ とした場合，これは函数列(3)の $k+1$ 番目の項を意味するものとする.

定理 1 函数列(3)において $f_k(z)$ と $f_k^*(z)$ ($k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ h$) がたがいに素であるための必要十分条件は

$$f_{h+1}\neq 0$$

である.

また $f_1(0)\ f_2(0)\cdots\cdots f_h(0)\neq 0$ で，かつ $f_{h+1}=0$ ならば $f(z)$ と $f^*(z)$ の最大公約数は $f_h(z)$ であって，かつ $f_h(z)=0$ は相反方程式である.

証明 十分条件：$f_{h+1}\neq 0$ ならば，すべての k について $f_k(z)$ と $f_k^*(z)$ はたがいに素であることを示そう.

さて

$$f_{h+1}=\overline{f_h(0)}f_h(z)-\overline{f_h^*(0)}f_h^*(z)$$

において $f_{h+1}\neq 0$ ならば $f_h(z)$ と $f_h^*(z)$ はたがいに素である. $f_h(z)$ と $f_h^*(z)$ がたがいに素ならば，**補題 3** の(2)により $f_h(0)$ の値のいかんにかかわらず $f_{h-1}(z)$ と $f_{h-1}^*(z)$ はたがいに素である. 以下同様にして $f_k(z)$ と $f_k^*(z)$ ($k=h,\ h-1,\ \cdots\cdots 1,\ 0$) はたがいに素であることがいえる.

必要条件：$f_0(z)$ と $f_0^*(z)$ がたがいに素で，かつ $f_1(0)\neq 0$ とするとき

$$f_1(z)=\overline{f_0(0)}f_0(z)-\overline{f_0^*(0)}f_0^*(z)$$ に **補題 3** の(1)を適用すれば $f_1(z)$ と $f_1^*(z)$ はたがい素である. 以下 $f_2(0)$，$f_3(0)$，……，$f_h(0)$ がすべて 0 でないとして**補題 3**の(1)を順次 $f_1(z)$，$f_2(z)$，……，$f_h(z)$ に適用すれば $f_k(z)$ と $f_k^*(z)$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ h$) はたがいに素である. 最後に $f_h(z)$ と $f_h^*(z)$ がたがいに素ならば f_{h+1} の定義より $f_{h+1}\neq 0$ でなければならない.

次に定理の後半を証明する.

$f_{h+1}=0$ であるら $f_h(z)$ と $f_h^*(z)$ の最大公約数は $f_h(z)$ 自身である. 仮定により $f_h(0)\neq 0$ であるから**補題 3** の(1)より $f_{h-1}(z)$ と $f_{h-1}^*(z)$ の最大公約数は $f_h(z)$ である. 以下 $f_{h-1}(0)$，$f_{h-2}(0)$，……，$f_1(0)$ はすべて 0 でないから $f_k(z)$ と $f_k^*(z)$ の最大公約数はいずれも $f_h(z)$ である.

なお $f_{h+1}=0$ ならば $f_h^*(z)=cf_h(z)\equiv 0$ であるから $f_h(z)=0$ は相反方程式である. ただし $c=\overline{f_h^*(0)}\ /\ \overline{f_h(0)}$.

定理 2 函数列(3)において $f_k(z)$ が単位円の内部でもつ根の数を μ_k とするとき $f_{h+1}\neq 0$ ならば μ_k に関する漸化式

$$\mu_k=\mathbf{1}(-f_{k+1}(0))n_k+\mathrm{sgn}\ (f_{k+1}(0)\mu_{k+1}$$
$$\mu_{h+1}=0,\ k=h,\ h-1,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0$$

が成立する. ただし $\mathbf{1}(x)$，$\mathrm{sgn}(x)$ はそれぞれ単位函数，符号函数とする[注].

証明 $f_{h+1}\neq 0$ であるから**定理 1** により $f_k(z)$ と $f_k^*(z)$ ($k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ h$) はたがいに素である. したがって $f_k(z)$ は単位円 Γ 上に根をもたない.

そこで

$$f_{k+1}(z)=\overline{f_k(0)}f_k(z)-\overline{f_k^*(0)}f_k^*(z)$$

において $f_{k+1}(0)\neq 0$ とすれば**補題 3** の(3)より

$$\mu_{k+1}=\mu_k\ .\ f_{k+1}(0)>0$$
$$\mu_{k+1}=n_k-\mu_k\ ,\ f_{k+1}(0)<0$$

$f_{k+1}(0)=0$ とすれば**定理 3** の(4)より

$$\mu_{k+1}=\mu_k=n_k-\mu_k$$

となるので，以上三つの場合を一つにまとめると

$$\mu_k=\mathbf{1}(-f_{k+1}(0))n_k+\mathrm{sgn}(f_{k+1}(0))\mu_{k+1}$$

と表わされる. $f_{h+1}\neq 0$ より $\mu_{h+1}=0$ である.（証明終）

注
$$\mathbf{1}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ \frac{1}{2}, & x=0,\\ 0, & x<0\end{cases}\qquad \mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

定理 3　函数列(3)において $f_1(0)f_2(0)\cdots\cdots f_h(0) \fallingdotseq 0$ で，かつ $f_{h+1}=0$ ならば

$$\mu_k = \mathbf{1}(f_{k+1}-(0))(n_k - n_h + 2\mu_h) + \mathrm{sgn}(f_{k+1}(0))^{\mu_{k+1}}$$

$$k=h,\ h-1,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0$$

が成立する．また μ_h は $f'^*(z)$ が単位円内でもつ根の数に等しい．

証　明　$f_1(0)\ f_2(0)\cdots\cdots f_h(0) \fallingdotseq 0\ f_{h+1}=0$ でであるから**定理 1** より $f_k(z)$ と $f_k(z)$ $(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ h)$ の最大公約数は $f_h(z)$ であって，かつ $f_h(z)=0$ は相反方程式である．$f_k(z)$ の単位円 Γ 上の根は必ず $f_k{}^*(z)$ の根になるので，それらは $f_h(z)$ の根の中に含まれる．

いま $f_h(z)$ が Γ 内て μ_h 個の根をもつとすれば，$f_h(z)$ は Γ 上で $n_h-2\mu_h$ 個の根をもつことになる．したがって $f_k(z)$ は Γ の外部（$f_k{}^*(z)$ は Γ の内部）で

$$n_k-\mu_k-(n_h-2\mu_h)=n_k-n_h+2\mu_h-\mu_k$$

個の根をもつ．

さて

$$f_{k+1}(z)=\overline{f_k(0)}f_k(z)-\overline{f_k{}^*(0)}f_k{}^*(z)$$

$$f_{k+1}(0) \fallingdotseq 0,\quad 0\leq k\leq h-1$$

に**補題 3** の(3)を適用すれば

$$\mu_{k+1}=\mu_k\ ,\quad f_{k+1}(0)>0$$

$$\mu_{k+1}=(n_k-n_h+2\mu_h)-\mu_k\ ,\quad f_{k+1}(0)<0$$

となる．これを一つの式にまとめると

$$\mu_k=\mathbf{1}(-f_{k+1}(0))(n_k-n_h+2\mu_h)+\mathrm{sgn}(f_{k+1}(0))\mu_{k+1}$$

$$k=h-1,\ h-2,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0$$

と表わされる．上式において $k=h$ とすると，$f_{h+1}=0$ より上式は恒等式 $\mu_h=\mu_h$ となる．

また $f_h(z)=0$ は相反方程式であるから，**補題 3** の(4)により μ_h は $f'^*(z)$ が Γ 内でもつ根の数に等しい．
（証明終）

定理 4　多項式 $p(z)$ の根がすべて単位円 Γ 上にあるための必要十分条件は

$$p^*(z)=cp(z),\quad c\ ;\ 定数$$

で，かつ $p'(z)$ の根が Γ の外部にないことである．なお $p(z)$ の Γ 上の根がすべて単根ならば $p'(z)$ の根は Γ 内に限る．

証　明　必要条件：$p(z)$ の根がすべて Γ 上にあるならば $p(z)$ と $p^*(z)$ の根はすべて共通となるので

$$p^*(z)=cp(z),\quad c \fallingdotseq 0$$

が成り立つ．$p(z)$ は Γ 内に根をもたないので**補題 3** の(4)より $p'^*(z)$ も Γ 内に根をもたない．ゆえに $p'(z)$ は Γ の外に根をもたない．

十分条件：$p'(z)$ の根が Γ の外部にないとき $p'^*(z)$ の根は Γ の内部にない．

$p^*(z)=cp(z)$ で，かつ $p'^*(z)$ の根が Γ 内になければ**補題 3** の(4)より $p(z)$ の根は Γ 内にない．

相反方種式 $p(z)=0$ の根が Γ 内になければ，$p(z)$ の根はすべて Γ 上になければならない．なお $p'(z)$ の根がすべて Γ 内にあるならば $p'^*(z)$ の根はすべて Γ 外にあるので $p'(z)$ と $p'^*(z)$ はたがいに素である．

一方

$$mp^*(z)=mcp(z)=czp'(z)+p'^*(z)$$

の関係があるので，$p'(z)$ と $p'^*(z)$ がたがいに素ならば $p(z)$ と $p'(z)$ もたがいに素である．すなわち，$p(z)$ の Γ 上の根はすべて単根である．（証明終）

例題 1

$$f(z)=(2z+1)(3z+1)(3z-2)$$
$$=18z^3+3z^2-7z-2$$
$$f^*(z)=-2z^3-7z^2+3z+18$$
$$=(z+2)(z+3)(-2z+3)$$

上の二式より函数列(3)をつくる．ただし，$f_k(z)$ のの定数倍は無視する（以下同様）．

$$f_1(z)=3z^2-z-8,\quad f_1(0)<0$$
$$f_2(z)=z+5\quad,\quad f_2(0)>0$$
$$f_3\quad=1\quad,\quad f_3>0$$

$f_3 \fallingdotseq 0$ であるから**定理 1** により $f(z)$ と $f^*(z)$ はたがいに素である．

また**定理 2** より

$$\mu_0=\mathbf{1}(+)\times 3+\mathrm{sgn}(-)\mu_1$$
$$\mu_1=\mathbf{1}(-)\times 2+\mathrm{sgn}(+)\mu_2$$
$$\mu_2=\mathbf{1}(-)\times 1+\mathrm{sgn}(+)\mu_3$$
$$\mu_3=0$$

これを μ_k について解けば

$$\mu_3=\mu_2=\mu_1=0$$
$$\mu_0=3$$

となる．すなわち，$f(z)$ は単位円内に 3 個の根をもつ．

例題 2

$$f(z)=(z+1)(3z+2)(3z-4)$$
$$=9z^3+3z^2-14z-8$$
$$f^*(z)=(z+1)(2z+3)(-4z+3)$$
$$=-8z^3-14z^2+3z+9$$

これより

$$f_1(z)=6z^2+5z-1$$
$$f_2(z)=-z-1$$
$$f_3(z)=0$$

となるが，$f_3=0$ であるから**定理 1** により $f_2(z)=$

$-(z+1)$ は $f(z)$ と $f^*(z)$ の最大公約数であって，かつ $f_2(z)=0$ は相反方程式である．

定理3 より $f_2(z)$ と $f_2'^*(z)$ は Γ 内で同数の根をもつが

$$f_2(z)=-1, \quad f_2'^*(z)=-1$$

であるから $f_2(z)$ は Γ 内で根をもたない．

すなわち，$\mu_2=0$ となるので，再び**定理3**より

$$\mu_0=1(+)(3-1)+\mathrm{sgn}(-)\mu_1$$

$$\mu_1=1(+)(2-1)+\mathrm{sgn}(0)\mu_2$$

これより

$$\mu_1=\mu_0=1$$

となる．すなわち $f(z)$ は Γ 内に一根をもつ．

例題 3 相反方程式

$$p(z)=z^m-1=0$$

において $p'(z)=mz^{m-1}$ であるから $p'(z)$ の根はすべて単位円 Γ の内部にある．

ゆえに，**定理4** より $p(z)$ の根はすべて単位円 Γ 上にあり，かつ単根である．

3. 根の偏角について

半径 r の円周上にある $f(z)$ の根は，$f(rz)$ と変換すれば単位円 Γ 上にうつるので，$f(z)$ の Γ 上の根だけについて考える．

$f(z)$ の Γ 上の根は $f(z)$ と $f^*(z)$ の最大公約数 $p(z)$ の根に含まれる．

定理1 によれば $f_1(0)\ f_2(0)\cdots\cdots f_h(0)\neq 0$ で，かつ $p(z)=0$ は相反方程式である．

しかし，条件 $f_1(0)\ f_2(0)\cdots\cdots f_h(0)\neq 0$ に関係なく，$p(z)=0$ は相反方程式であることがいえる．

いま $f(z)$ の根を $\zeta_1, \zeta_2, \cdots\cdots, \zeta_n$ とすれば，$f^*(z)$ の根は $1/\bar{\zeta}_1,\ 1/\bar{\zeta}_2, \cdots\cdots, 1/\bar{\zeta}_n$ となる．

仮定により $f(z)$ と $f^*(z)$ は共通根をもつので，その個数（重根は重複度だけ数える）を m とする．すなわち

$$|f(\zeta_i)|+|f^*(\zeta_i)|=\begin{cases} 0, & i=1,2,\cdots m \\ \neq 0, & i=m+1,\cdots n \end{cases}$$

ところで $f^*(z)=z^n\ \overline{f(1/\bar{z})}$, $f(z)=z^n\ \overline{f^*(1/\bar{z})}$ の関係があるから

$$|f(\zeta_i)|+|f^*(\zeta_i)|=|\zeta_i|^n \{|f^*(1/\bar{\zeta}_i)|+|f(1/\bar{\zeta}_i)|\}$$

したがって ζ_i が $f(z)$ と $f^*(z)$ の共通根ならば，$1/\bar{\zeta}_i$ もまた $f(z)$ と $f^*(z)$ の共通根となる．ただし $f^*(0)\neq 0$ より $f(z)$ は $f^*(z)$ と 0 を共通根とすることはできない．

ゆえに

$$p(z)=\prod_{i=1}^{m}(z-\zeta_i)$$

とおけば，$p^*(z)$ は $1/\bar{\zeta}_i$ を根とするので $p(z)$ と $p^*(z)$ の根はすべて一致する．すなわち $p(z)=0$ は相反方程式である．

そこで，相反方程式 $p(z)=0$ の Γ 上の根を求める．そのために必要な補題から述べよう．

補題4 多項式 $p(z)$ が

$$p^*(z)=cp(z)$$

c ; z に無関係な複素数

を満すとき

(1) $p(z)=0$ は相反方程式で，かつ $|c|=1$

(2) $p_0(z)=c^{\frac{1}{2}}p(z)$ とおけば

$$p_0^*(z)=p_0(z)$$

が成り立つ．ただし $0\leq \arg c^{\frac{1}{2}}\leq\pi$ とする．

証 明 すべての多項式 $f(z)$ について変換*の定義より $f^*(0)\neq 0$ であるから $p^*(z)=cp(0)\neq 0$．$c\neq 0$ より $p(z)=0$ は相反方程式である．

つぎに $p(0)\neq 0$ であるから**補題1** の(1)より

$$p(z)=\{p^*(z)\}^*$$
$$=\{cp(z)\}^*$$

補題1 の(2)より

$$\{cp(z)\}^*=\bar{c}p^*(z)=|c|^2p(z)$$

すなわち $p(z)=|c|^2p(z)$ となる．

したがって

$$|c|=1$$

また $p_0(z)=c^{\frac{1}{2}}p(z)$ とおけば $|c|=1$ であるから

$$p_0^*(z)=\{c^{\frac{1}{2}}p(z)\}^*=c^{-\frac{1}{2}}cp(z)=p_0(z).$$

すなわち $p_0(z)=c^{\frac{1}{2}}p(z)$ とおけば $p_0^*(z)=p_0(z)$ が成り立つ．（証明終）

以下 $p(z)$ を $c^{\frac{1}{2}}$ 倍することを $p(z)$ を正規化すると呼ぶことにする．

そこで正規化された相反方程式をあらためて

$$p_0(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_{m-1}z+a_m=\quad(5)$$

ただし $a_0\neq 0$

とおくとき，次の補題が成立する．

補題 5 多項式 $h(z)$ の次数を k とし

$$m\geq k\geq [m/2]$$

ならば $h(z)$ を適当にとり

$$p_0(z)=z^{m-k}h(z)+h^*(z)$$

とくにkの最小値〔$m/2$〕をlとすれば

(1) $m=2l+1$のとき

$$h(z)=a_0z^l+a_1z^{l-1}+\cdots\cdots a_{l-1}z+a_l \tag{6}$$

(2) $m=2l$ のとき

$$h(z)=a_0z^l+a_1z^{l-1}\cdots\cdots+a_{l-1}z+a_l/2 \tag{7}$$

ただし〔x〕は，xを越えない最大の整数.

証明 $h^*(z)$ の次数は $h(z)$ の次数を越えないので

$$p_1(z)=z^{m-k}h(z)+h^*(z)$$

とおくとき，$k\leq m$ ならば $p_1(z)$の次数は mである.

したがって

$$\begin{aligned}p_1{}^*(z)&=z^m\overline{p_1(1/\bar{z})}\\&=z^m\{(1/z)^{m-k}\overline{h(1/\bar{z})}+\overline{h^*(1/\bar{z})}\}\\&=z^k\,\overline{h(1/\bar{z})}+z^{m-k}z^k\,\overline{h^*(1/\bar{z})}\\&=h^*(z)+z^{m-k}h(z)\\&=p_1(z)\end{aligned}$$

すなわち

(a) $p_1(z)$は $p_0(z)$と同次で，かつ $p_1{}^*(z)=p_1(z)$を満足する.

次に $p_0(z)$ と $p_1(z)$ の係数の自由度について考える．m次多項式 $p_0(z)$ において $p_0{}^*(z)=p_0(z)$ が成立するとき，$p_0(z)$の$m+1$ 個の係数の間に〔$(m+1)/2$〕個の条件が存在することになる.

したがって $p_0(z)$の係数の自由度は

$$m+1-〔(m+1)/2〕=〔m/2〕+1$$

となる.

他方 $p_1(z)$は $k(\leq m)$次の多項式 $h(z)$ により，一意的に定まるので $p_1(z)$の係数の自由度は $k+1$ である．すなわち

(b) $p_0(z)$，$p_1(z)$ の係数の自由度は，それぞれ〔$m/2$〕$+1$，$k+1$である.

したがって(a)，(b)より

$$k+1\geq〔m/2〕+1$$

すなわち $k\geq$〔$m/2$〕ならば $h(z)$ を適当にとり $p_0(z)=p_1(z)$とおくことができる.

なお $k=$〔$m/2$〕$=l$ のとき，m の奇数，偶数に応じて $h(z)$ を(6)，(7)式のようにおくことができる．これを確かめることは簡単である．（証明終）

定理5 m次の相反方程式

$$p_0(z)=p_0{}^*(z)=a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots\cdots+a_m=0$$

において

(1) mが奇数ならば $p_0(z)$は少なくとも一根，単位円Γ上に根をもつ.

(2) mが偶数のとき〔$m/2$〕$=l$ 次の多項式を

$$h(z)=a_0z^l+a_1z^{l-1}+\cdots\cdots+a_{l-1}z+a_l/2$$

とおけば，$p_0(z)$のΓ上の根と

$$\mathrm{Re}\ \{h(z)\}=0,\ |z|<1$$

の根はすべて一致する．ただし $\mathrm{Re}\{z\}$はzの実数部.

証 明

(1) m次の相反方程式 $p_0(z)=0$が，Γ内で μ個の根をもつとすれば，Γ上で$m-2\mu(\geq 0)$ 個の根をもつ．したがってmが奇数ならば，μのいかんにかかわらず $m-2\mu>0$となる．すなわち $p_0(z)$ は必ず Γ上に根をもつ.

(2) mが偶数のとき**補題5**より

$$p_0(z)=z^l\,h(z)+h^*(z)$$

と表わすことができる．$|z|<1$において

$h^*(z)=z^l\,\overline{h(z)}$であるから

$$\begin{aligned}p_0(z)&=z^l\,\{h(z)+\overline{h(z)}\}\\&=2\,z^l\,\mathrm{Re}\{h(z)\}\end{aligned}$$

ゆえに，$p_0(z)$のΓ上の根と

$$\mathrm{Re}\{h(z)\}=0,\ |z|=1$$

の根は，すべて一致する．（証明終)

4 根を求める計算法

計算法は大別して二つの段階に分けられる．第一に根の絶対値を求める．計算法の基礎になっているのは**定理1**および**定理2**である．第二に根の偏角を求める．計算法は**定理1**および**定理5**に基づいている.

前者の方から述べよう.

まず多項式 $f(z)$より函数列(3)をつくる.

$f_{h+1}\fallingdotseq 0$ならば**定理2**より $f(z)$が$|z|<1$でもつ根の数μを知ることができる．したがって任意の正数rをとり$z=rz'$と変換すれば，$f(rz')$が$|z|<1$でもつ根の数$\mu(r)$を知ることができる．$\mu(r)$は $f(z)$がz平面において原点を中心とし半径rの円内でもつ根の数に外ならない.

任意の半径rの円内に存在する $f(z)$の根の数 $\mu(r)$さえ知ることができるならば，根の絶対値を所要の精度で求めることができる．そのもっとも簡単な方法は二分法（区間縮少法）であろう.

$f(z)$ の単位円の外部の根は $f^*(z)$ によって単位円の内部にうつるので，$f(z)$の単位円内の根だけについて考える.

まず $f(z)$ が$|z|<1$でもつ根の数 $\mu(1)=\mu$ を求め

$$\left.\begin{aligned}R^j&=1\\R_j&=0\end{aligned}\right.\ ,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \mu$$

とおけばμ個の根の絶対値

$$0 \leq |\zeta_1| \leq |\zeta_2| \leq |\cdots\cdots \leq |\zeta_\mu| < 1$$

はすべてR^jとR_jの間にはさまれる．

$\mu(1)=\mu$ がわかっているとき根の絶対値の大きい方から，すなわち$|\zeta_\mu|$, $|\zeta_{\mu-1}|$, ……, $|\zeta_1|$の順に求める方が簡単である．

一般にi番目の根の絶対値$|R_i|$に着目し，その上界，下界R^i，R_iを二分法によってせばめる．

すなわち

$$r=\frac{R^i+R_i}{2}$$

として$|\zeta_i|<r$ならば上界R^iをrで置き換え，$|\zeta_i|>r$ならば下界R_iをrで置き換える．$|\zeta_i|$とrの大小関係は $\mu(r)$ より簡単にわかる．

このようにして$|\zeta_i|$に対し$\mu(r)$をk回計算すれば，$|\zeta_i|$の近似値rの誤差は高々2^{-k}となる．$|\zeta_i|$の許容誤差をδとすれば

$$2^{-k} \leq \delta$$

すなわち，kが

$$k \geq \log_2 \delta^{-1}$$

を満足するならば根の絶対値の誤差は理論的には常に必要なだけ小さくすることができる．

次に半径rの円周上に少なくとも一根 $f(z)$ の根があるとしよう．$f(rz)$をあらためて$f(z)$として函数列(3)をつくり**定理 1**を適用する．$f(z)$は単位円Γ上に根をもつので$f(z)$と$f^*(z)$は必ず公約数をもつ．そこで$f(z)$と$f^*(z)$の最大公約数$f_h(z)$を$p(z)$とおき，相反方程式$p(z)=0$のΓ上の根だけ求める．

$p(z)$の次数をmとし$m=1$ならば$p(z)=0$を解くのは簡単である．$m \geq 2$でmが偶数ならば$p(z)$を正規化した$p_0(z)$に**定理 5**を適用する．mが奇数ならば**定理 5**を適用できないので，適当な一次の多項式，たとえば $z+1$ を $p(z)$ に乗じ，偶数次の多項式に変える．

したがって，一般に偶数次の相反方程式を解けばよいことになる．

定理 5より偶数次の $p_0(z)$ の Γ 上の根は

$$\mathrm{Re}\{h(z)\}=0, \ |z|=1$$

の根と一致するので，$[m/2]=l$ 次の多項式 $h(z)$ について考える．$h(z)$ の係数を実数部と虚数部に分け

$$h(z)=(\alpha_l+i\beta_l)z^l+(\alpha_{l-1}+i\beta_{l-1})z^{l-1}+\cdots\cdots+(\alpha_0+i\beta_0)$$

とし，$z=e^{i\theta}$と変換すれば

$$\mathrm{Re}\{h(e^{i\theta})\}=\sum_{k=0}^{l}\alpha_k\cos k\theta-\sum_{k=1}^{l}\beta_k\sin k\theta \tag{9}$$

となる．ここで $\cos\theta=t$ とおけば $\cos k\theta$ および $\sin(k+1)\theta/\sin\theta$ はk次の Chebyshev 多項式 $T_k(t)$，$U_k(t)$となる．

すなわち

$$T_{k+1}(t)=2tT_k(t)-T_{k-1}(t),\ T_0(t)=1,$$
$$T_1(t)=t$$
$$U_{k+1}(t)=2tU_k(t)-U_{k+1}(t),\ U_0(t)=1,$$
$$U_1(t)=2t \quad k=1,\ 2,\ \cdots\cdots.$$

したがって(9)式の第一項はtに関するl次の実係数多項式$A(t)$，第二項は$l-1$次の実係数多項式$B(t)$と $\sin\theta$ の積であるから

$$\mathrm{Re}\{h(e^{i\theta})\}=A(t)-B(t)\sin\theta,$$
$$\text{ただし}\ \cos\theta=t \tag{10}$$

これより $\sin\theta$ を消去すれば，$2l$次の実係数代数方程式

$$\Pi(t)=A(t)^2-B(t)^2(1-t^2)=0 \tag{11}$$

となる．$p_0(z)$がΓ上でd個の根をもつならば $\Pi(t)$ は$|t| \leq 1$においてd個の実根t_1,

$$t_1,\ t_2,\ \cdots\cdots,\ t_d$$

をもつ．ただし $p(z)$ に $(z+1)$ があらかじめ付加されていた場合には $\Pi(t)$ の一根 $t=-1$ は無縁根となる．

$$t_k=\cos\theta_k \ \text{が得られると(10)式より}$$
$$\sin\theta_k=A(t_k)/B(t_k) \tag{12}$$

となり，$p_0(z)$のΓ上の根$e^{i\theta_1}$，$e^{i\theta_2}$，……$e^{i\theta_d}$はすべて定まる．

ゆえに，半径rの円周上にある $f(z)$の根は

$$\zeta_1=re^{i\theta_1},\ \zeta_2=re^{i\theta_2},\ \cdots\cdots,\ \zeta_d=re^{i\theta_d}$$

によって計算できる．

$p(z)$または$p_0(z)$が実係数多項式ならば，解法はさらに簡単となるが説明を省く．

計算法の概略を **Fig.1** に示す

実係数代方程式 $\Pi(t)=0$ の実根を$|t| \leq 1$の範囲で求めるために，われわれは Sturm の方法を用いた．

Sturm の方法で n次の代数方程式 $f(x)=0$ の実根をn個求めるために必要な演算回数は，一般に$O(n^3)$であるが，ある条件（数値計算の上では殆んど問題にならない）の下では演算回数を$O(n^2)$とすることができる．これについて述べよう．

実係数多項式$f(x)=f_0(x)$，$f'(x)=f_1(x)$とおき，$f_0(x)$と$f_1(x)$より剰余を負にしながら互除法を行う．

すなわち

$$f_0(x)=q_1(x)f_1(x)-f_2(x)$$
$$f_1(x)=q_2(x)f_2(x)-f_3(x)$$
$$\vdots$$
$$f_{m-2}(x)=q_{m-1}(x)f_{m-1}(x)-f_m(x)$$
$$f_m(x)=f_m \ ; \ 0\text{でない定数}$$

Sturm の函数列

$$f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,\ f_i(x),\ \cdots,\ f_m$$

において $\{f_k(a)\}$，$\{f_k(b)\}$ の符号変化の回数を $V(a)$，$V(b)$ $(b>a)$ とすれば，区間 $(a,\ b)$ 内の $f(x)$の実根の数は

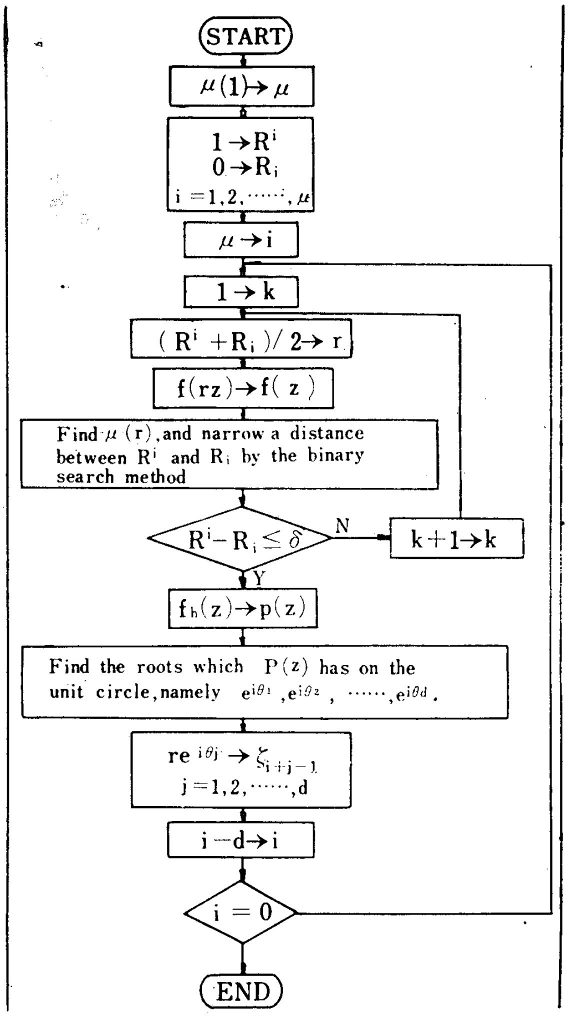

Fig. 1　Flow　Chart

$$V(a)-V(b)$$

に等しい．任意の実数 a, b に対して $V(a)-V(b)$がわかるならば，二分法によつて $f(x)$ の実根はいくらでも精度よく求めることができる．問題となるのは $V(a)$（または $V(b)$）をできるだけ少ない演算回数で求めることである．

多項式 $f(x)$にaを代入して $f_0(a)$, $f_1(a)$, …, f_m を計算すれば，演算回数は $O(n^2)$となるが，$f_k(a)$をつぎの漸化式によつて求めるならば演算回数を$O(n)$とすることができる．

$$f_{k-2}(a)=q_{k-1}(a)\,f_{k-1}(a)-f_k(a)$$
$$k=m,\ m-1,\ \cdots,\ 3.$$

ここで $q_k(x)$および$f_{m-1}(x)$が一次式ならば，f_m, $f_{m-1}(a)$ を与えて，函数列 $f_k(a)$ を漸化式によつて計算するに要する乗算回数は $2n$回となる．$q_k(x)$および$f_{m-1}(x)$が一次式であるという仮定は殆んどの場合成り立つ．もしこの仮定が成り立たなければ $f(x)$ を $xf(x)$ または $(x+1)f(x)$ で置きかえれば多くの場合 仮定は成り立つ．

例題4 $p(z)=z^3-i=0$の単位円上の根を求める．

$p(z)$は奇数次であるから $z+1$を乗じて偶数次の相反方程式を解く．

$$p(z)=(z+1)(z^3-i)$$
$$=z^4+z^3-iz-i$$
$$c=p^*(0)/p(0)=1/(-i)=i$$
$$p_0(z)=c^{\frac{1}{2}}p(z),\quad (0\leq \arg c^{\frac{1}{2}}\leq\pi)$$
$$=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(z^4+z^3-iz-i)$$
$$h(z)=\frac{1+i}{\sqrt{2}}(z^2+z)$$

ここで　$z=e^{i\theta}$, $\cos\theta=t$　と変換すれば

$$\mathrm{Re}\ \{h(e^{i\theta})\}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 2\theta+\cos\theta)$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin 2\theta+\sin\theta)$$
$$=A(t)-B(t)\sin\theta$$

ただし　$A(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2t^2+t-1)$

$$B(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2t+1)$$

よって

$$\Pi(t)=A(t)^2-B(t)^2(1-t^2)$$
$$=4t^4+4t^3-3t^2-3t$$
$$=t(t+1)(4t^2-3)$$

となる．$p(z)$に$(z+1)$を付加したので $t=-1$は無縁根．したがって $\Pi(t)=0$の$|t|\leq$にある実根は

$$t_1=0,\quad t_2=\sqrt{3}/2,\quad t_3=-\sqrt{3}/2$$
$$\sin\theta_1=A(0)/B(0)=-1$$
$$\sin\theta_2=A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)/B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}$$
$$\sin\theta_3=A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)/B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

ゆえに $p(z)$の単位円上の根は

$$\zeta_1=-i,\quad \zeta_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2},\quad \zeta_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

となる．

5. むすび

多項式 $f(z)$ の公約数 $p(z)$ が単位円 Γ 上に根をもつことがわかっているとき，$p(z)$のΓ上の根を求める方法は他にもいろいろ考えられる[9]．

ここで述べた計算法の根幹となっているのは**定理 1** および**定理 2** である．

計算列を **Table 1** に示す．

Table 1. Polynomials and Experimental Results

Example 1. $f(z)=z^6+(0.125+0.25i)z^5+2iz^4-(0.5-8.25i)z^3-(2-i)z^2-16z-2-4i=0$

k	ς_k	*Experimental Values*						*error* $\times 10^{12}$
1	$2i$	0.00000	00000	0000	+1.99999	99999	9982 i	0.2
2	$\pm\sqrt{3}-i$	1.73205	08075	6872	−0.99999	99999	99906 i	0.2
3		−1.73205	08075	6872	−0 99999	99999	99949 i	0.2
4	$\pm 1 \mp i$	0.99999	99999	99943	−0.99999	99999	99943 i	0.1
5		−0.99999	99999	99943	+0.99999	99999	99943 i	0.1
6	$-0.125-0.25i$	−0.12499	99999	99997	−0.25000	00000	00023 i	0.0

Example 2. $f(z)=z^9+(0.2+0.1i)z^8+10iz^7-(1-2i)z^6-35z^5$
$-(7+3.5i)z^4-50iz^3+(5-10i)z^2+24z+4.8+2.4i=0$

k	ς_k	*Experimental Values*						*error* $\times 10^{12}$
1	$\pm\sqrt{2}\mp\sqrt{2}\,i$	1.41421	35623	7402	−1.41421	35623	7402 i	1.3
2		−1.41421	35623	7402	+1.41421	35623	7402 i	1.3
3	$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}\mp\sqrt{\frac{3}{2}}\,i$	1.22474	48713	9170	−1.22474	48713	9170 i	0.2
4		−1.22474	48713	9170	+1.22474	48713	9170 i	0.2
5	$\pm 1 \mp i$	1.00000	00000	0038	−1.00000	00000	0038 i	0.5
6		−1.00000	00000	0038	+1.00000	00000	0038 i	0.5
7	$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,i$	0.70710	67811	86535	−0.70710	67811	86535 i	0.0
8		−0.70710	67811	86535	+0.70710	67811	86535 i	0.0
9	$-0.2-0.1i$	−0.20000	00000	00077	−0.09999	99999	99988 i	0.1

Example 3. $f(z)=z^{10}-i=0$

k	ς_k	*Experimental Values*						*error* $\times 10^{12}$
1	$e^{i\frac{4k-3}{20}\pi}$	0.98768	83405	94800	+0.15643	44650	39490 i	0.8
2		0.70710	67811	86118	+0.70710	67811	83515 i	3.0
3		0.15643	44650	40209	+0.98768	83405	94994 i	0.1
4		−0.45399	04997	39354	+0.89100	65241	89544 i	1.2
5		−0.89110	65241	88404	+0.45399	04997	37578 i	2.0
6		−0.98768	83405	94893	−0.15643	44650	39828 i	0.5
7		−0.70710	67811	86434	−0.70710	67811	86355 i	0.2
8		−0.15643	44650	40317	−0.98768	83405	96058 i	0.9
9		0.45399	04997	39613	−0.89100	65241	86829 i	1.5
10		0.89100	65241	88666	−0.45399	04997	34422 i	5.1

Example 4. $f(z)=z^{10}-55z^9+1320z^8-18150z^7+15773z^6-902055z^5+3416930z^4$
$-8409500z^3+12753576z^2-10628540z+3628800=0$

k	ς_k	Experimental Values			$error\times10^{12}$
1	10	9.99999	99981	9050	1800
2	9	9.00000	00190	2731	19000
3	8	7.99999	99627	1808	37000
4	7	7.00000	00122	4607	12000
5	6	5.99999	99877	6020	12000
6	5	4.99999	99927	6280	7200
7	4	3.99999	99992	9425	710
8	3	2.99999	99999	0864	91
9	2	2.00000	00000	0909	9.1
10	1	0.99999	99999	99545	0.5

Table 1 において

誤差＝|計算値－真値|

演算桁数は15桁で，収束を判定するためのδは10^{-12}である．なお$f(z)$の単位円の外部の根ςは，$f^*(z)$の単位円の内部の根$1/\varsigma$より求めた．

むすびにかえて計算上注意すべき点や，未解決の問題をいくつか記す．

(1) 計算法は原理的には重根の有無に関係ないが，重根はやはり精度が悪い，**Example 4** は性質の悪い問題の一つであって，丸め誤差の影響が顕著である[10)]．函数列(3)をつくる過程で，桁落ちが起り符号の判定がくるいやすいからであろう．

(2) 函数列(3)において$f_k(0)=0$ならば，特別な場合を除き理論は未解決であるが，実践的には十分小さい正数δをとり$f(z)$を$f((1+\delta)z)$で置き換えてもよい結果が得られている．

(3) n次多項式$f(z)$のすべての根を求めるに必要な演算回数はn^3に比例する．演算回数の大部分を占めるのは函数列(3)をつくるところである．

(4) $10^{\pm50}$程度の数まで扱いうるような計算機では函数列(3)をつくる過程で，オーバーフローやアンダーフローが起りやすい．そのため$f_k(z)$に適当な正の定数を乗じて，$f_k(z)$の係数が$10^{\pm50}$の範囲内にあるようにする．

おわりに当り，大阪大学工学部 城 憲三教授にいろいろ御指導いただいたことを記し，衷心より御礼申し上げる．

参 考 文 献

1) 宇野利雄：計算機のための数値計算，朝倉書店 昭(38)，88p—111p.

2) J. Todd : A Survey of Numerical Analysis, McGraw Hill, (1962), 255p—278p.

3) A. Ralston and H. S. Wilf : Mathematical Methods for Digital Computers, wiley, (1960), 233p—234p.

4) D. H. Lehmer : A Machine Method for Solving Polynomial Equations, Jour. Assoc. Comp. Mach. **8**, (1961), 151p—162p.

5) V. A. McAuley : A Method for the Real and Complex Roots of a Polynomial, J. Soc. Indust. Appl. Math. **10**, (1962), 657p—667p.

6) P. Henrici : Finding Zeros of a Polynomial by the Q-D Algorithm, Comm. Assoc. Comput. Mach. **8**, (1965), 570p—574p.

7) J. F. Traub : A Class of Globally Convergence Iteration Functions for Solution of Polynomial Equations Math. Comp. **20**, (1966), 113p—138p.

8) 藤原松三郎：代数学第一巻，内田老鶴圃，(昭3)，477p—552p.

9) 星野聡：Lehmerの判定を用いた代数方程式の解法，情報処理学会講演予稿集，(昭39)，31p—32p.

10) J. H Willkinson: The Evaluation of the Zeros of Ill—conditioned Polynomials. Part I, Numer. Math. **1**, (1959), 150p—166p.

(昭和41年6月15日受理)