

衝撃を受けた片持ちばりの塑性変形について

最上 幸夫*・木本 満**

On the Plastic Deformation of Cantilever Beams subjected to Impulsive Loading

Sachio MOGAMI, Mitsuru KIMOTO

Abstract

We carried out laboratory model tests of the cantilever beams made of steel under concentrated impulsive loading at the tip and proposed two approximate analytical methods about them. These two methods here presented were recognized in satisfactory agreement with the experimental results.

1. 緒言

交通事故の鑑定などにおいて交通施設、たとえばガードレールに車両が衝突して施設に塑性変形を生じた状態から逆にそのとき車両のもつていた運動のエネルギーを推定し、これから車両の速度を求める必要がある場合にてくわすことがしばしばある。しかしながらこのような問題は一般にきわめて複雑な現象であるから、これを正確に求めることはほとんど不可能に近いと思われるが、少なくともかなりの精度で推定できれば、交通事故の解明に役立つものと考えられる。このような見地から問題解決の第一歩として、きわめて基本的な2, 3のはりがかなり大きい集中衝撃をうけて塑性変形を生ずる状態について室内のモデル実験を行ない、これについて解析を進め、かなり良好な結果をえたが、本文ではこのうち最も基本的な片持ちばりの場合について報告する。

2. 実験の概要とその解析

2.1 実験の概要

室内のモデル実験を実施したが、その要領はおよそつぎのとおりである。片持ちばりとしては、正方形断面 $0.95 \times 0.95\text{cm}$ の鉄材を使用し、片持ちばりのスパンとしては、10, 15, 20cmの3種とし、片持ちばり先端に加える衝撃として鉄製のおもり5, 10, 15kgの3種を高さ10~60cm(10cmごと)から自然落下させて、そのとき生じた塑性変形の状態をしらべた。同

一状態の場合について各3回の実験を行ない、一応その平均値を用いて実験結果の整理を行なった。ただし実験中とくに著しく測定値が異なった場合は実験が不正確なものとして除外した。かくしてえた実験結果の一例を図示すると、Fig. 1のごとくである。

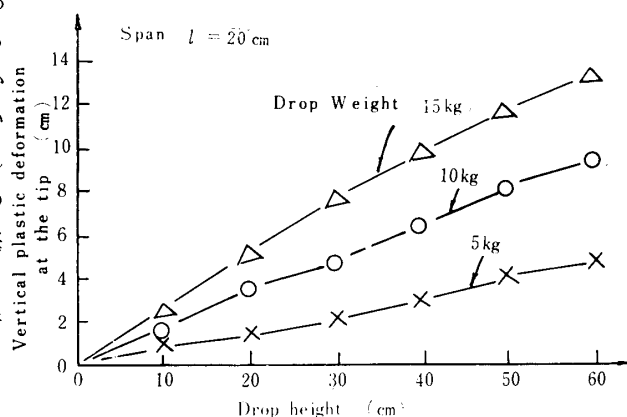


Fig. 1 An example of experimental results

2.2 実験結果の解析

このような場合について従来行なわれている解析法¹⁾を用いて計算を行なってみると、実験値と計算値との食い違いは相当大きく、ひずみ速度の影響を考慮しない場合の計算式では約2倍近く大きい値となり、またひずみ速度の影響を考慮した計算式を適用した場合でも30%程度大きい値がえられた。そこで著者らは従来の方法を修正し、いくつかの簡単な仮定を設けることによつて、運動量のモーメントに関する式のみを用いて解析を行なった。もちろんこの場合も曲率速度を

*土木工学教室

**大学院工学研究科土木工学専攻

導入した場合の解法（後述の解法2）では必ずしも計算は簡単とはいえないが、少なくとも従来の方法によるものよりは、はるかに簡単に扱うことができる。解析を行なうに当つて設けた仮定はつぎのとおりである。

(1) はりが塑性変形を生ずる状態では、衝撃体の質量は、塑性変形が完了する時間がかかり微小時間であることを考慮し、かつ塑性変形状態では、はりの弾性は無視できるものとして、その間はりの先端に付着するものと仮定する。

(2) 本実験の場合のはりの質量は衝撃体の質量にくらべてはるかに小さいので、落体のはりの先端に衝突した瞬間のはり先端の初速度は落体の衝突時における速度に等しい。

(3) 実験に用いたのはりは鉄材であるから、ひずみ速度の影響を受け、一般に動的全塑性モーメントは静的全塑性モーメントよりかなり大きい値をとるものと仮定する。（詳細については後述する）

以上の仮定にもとづいて解析を行なったのであるが、これについては2つの方法が考えられたので、その各々について述べることにする。

2.3 解法1（彎曲部の曲率を無視した場合）

この方法は従来のひずみ速度の影響を考慮しない方法をそのまま採用して、単に静的全塑性モーメント M_0 の代わりに、ひずみ速度の影響を受ける材料（本実験に用いた鉄材など）に対しては動的全塑性モーメント M_d を用い、かつ $M_d = 2M_0$ と仮定する方法である。

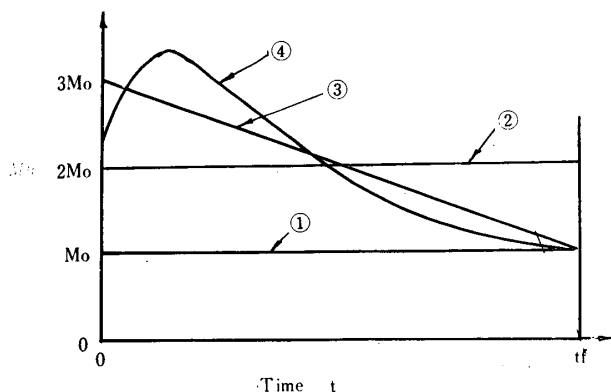


Fig. 2 Time change of M_B

すなわち Fig. 2 を参照すると、縦軸に示す M_B は Fig. 3 に示すごとく、片持ちばり先端に衝撃 I をうけた瞬間からはりの塑性変形が停止するまでの時間 t_f における固定端モーメントの大きさを表わし、ひずみ速度の影響を考えない場合は Fig. 2 に示す①の直線

のように $M_B = M_0$ （一定）となるが、鉄材のようにひずみ速度の影響を受ける材料では、前項の仮定(3)に述べたごとく、衝撃時の動的全塑性モーメントは一般に静的全塑性モーメント M_0 よりもかなり大きい値をとることは明らかであり、そのため衝撃時における M_B の $t = 0 \sim t_f$ における変化は Fig. 2 の④に示すような曲線を示すものと考えられ、 $t = t_f$ で塑性変形が停止したとき、 $M_B = M_0$ となるはずである。しかしこのような複雑な曲線④を用いることは計算をいたずらに煩雑なものとするから近似的にはこの曲線とほぼ等面積となる矩形、すなわち Fig. 2 の②のような $M_B = 2M_0$ （一定）と仮定するか、または同図③のような台形、すなわち $t = 0$ で、 $M_B = 3M_0$ 、 $t = t_f$ で $M_B = M_0$ 、その間は直線の変化と仮定するか、の2つが考えられる。

解法1では前者、すなわち $M_B = 2M_0$ （一定）を仮定することとする。したがつてこの仮定を採用すると、従来のひずみ速度の影響を考慮しない取り扱い方による算式において M_0 の代わりに単に $2M_0$ を代入することによつて塑性変形を計算できることになる。それゆゑ次式が成立する²⁾。

$$t_f = \frac{Il}{2M_0} \quad (1)$$

$$\theta_f = \frac{2 + 3K}{3(1 + 2K)^2} \frac{l^2}{M_0 l m} \quad (2)$$

ここに、 t_f : 衝撃瞬間から塑性変形が停止するまでの時間、 I : はり先端に作用する衝撃量、 l : 片持ちばりのスパン、 M_0 : はりの静的全塑性モーメント、 $K = G/ml$ (G : 衝撃体の質量、 m : はりの単位長さ当り質量)、 θ_f : 塑性変形が停止したときのはりの固定端における全回転角。

したがつてはり先端の鉛直塑性たわみ δ_A は

$$\delta_A = l \sin \theta_f \quad (3)$$

として求められる。本式による計算結果は解法2による計算結果および実測値とともに Fig. 4 に示してある。

2.4 解法2（彎曲部の曲率を考慮した場合）

この方法は解法1にくらべると、計算にかなりの手数を要するが、 M_B の変化を前述の台形と仮定し、かつ固定端における曲率速度を考慮したもので、このような M_B の台形的変化を仮定した場合は単に運動量のモーメント式のみをたてることによつて塑性変形を求めることができる。

Fig. 3 を参照して運動量に関するモーメント式をたてると、つぎのようになる。

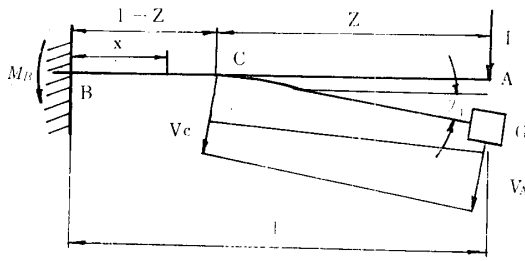


Fig. 3 Explained figure of plastic deformation

$$I l - \int_0^l M_E dt = \int_0^{l-z} m v(x) x dx + m [v_c z (l-z/2) + \frac{1}{2} (v_A - v_c) z (l-z/3)] + G l v_A \quad (4)$$

ここに $v(x)$: 固定端より x の断面におけるはりの回転速度, v_c, v_A : それぞれ断面 C, A におけるはりの回転速度, z : 衝撃瞬間から任意時刻 t における移動回転ヒンジの先端からの位置を表わす.

ここで前述の仮定により,

$$M_B = M_0 (3 - 2z/l) \quad (5)$$

また固定端における曲率速度を \dot{K}_0 とすれば,

$$\dot{K}_0 = B (M_B / M_0 - 1)^P \quad (6)$$

ただし, B, P は定数とする. この曲率速度 \dot{K}_0 を用いると, つぎの諸式が導かれる.

$$\dot{\theta}(x) = \frac{\dot{K}_0}{P+1} (l-z) \left[1 - \left(1 - \frac{x}{l-z} \right)^{P+1} \right] \quad (7)$$

ここに $\dot{\theta}(x)$: 固定端より x の断面におけるはりの角速度を表わす. したがって,

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{K}_0}{P+1} (l-z) \quad (8)$$

ただし, $\dot{\theta}_1$: Fig. 3 に示す CA 部分の角速度.

また式(4)に示す $v(x), v_c, v_A$ はそれぞれつぎのごとくなる.

$$v(x) = \frac{\dot{K}_0 (l-z)}{P+1} \left\{ x + \frac{l-z}{P+2} \left(1 - \frac{x}{l-z} \right)^{P+2} - \frac{l-z}{P+2} \right\} \quad (9)$$

$$v_c = \frac{\dot{K}_0}{P+2} (l-z)^2 \quad (10)$$

$$v_A = \frac{\dot{K}_0}{P+2} (l-z) \left(l + \frac{z}{P+1} \right) \quad (11)$$

また解析に当つて設けた仮定(2)を用いると, 式(5), (6) および(11)より,

$$\dot{K}_0 = \frac{v_0 (P+2)}{l^2} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^P \quad (12)$$

ここに, v_0 : 衝撃瞬間におけるはり先端の初速度.

式(5), (9), (10)および(11)を式(4)に代入すれば, 次式がえられる.

$$I - \frac{M_0}{l} \int_0^l (3 - 2z/l) dt = \frac{m \dot{K}_0 (l-z)^4}{(P+1)l} \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{(P+2)(P+3)(P+4)} - \frac{1}{2(P+2)} \right] + \frac{m \dot{K}_0 z (l-z)}{l} \left\{ \frac{(l-z)(l-z/2)}{P+2} + \frac{z(l-z/3)}{2(P+1)} \right\} + G \frac{\dot{K}_0 (l-z)}{P+2} \left(l + \frac{z}{P+1} \right) \quad (13)$$

ここで近似的に $P=3$ と仮定すれば, 上式はつぎのようになる.

$$I - \frac{M_0}{l} \int_0^l (3 - 2z/l) dt = \frac{5v_0}{l^2} (1-z/l)^3 \left\{ \frac{m(l-z)^4}{4l} \times 0.2381 + \frac{mz(l-z)}{l} \left\{ \frac{(l-z)(l-z/2)}{5} + \frac{z(l-z/3)}{8} \right\} + G(l-z)(l+z/4)/5 \right\} \quad (14)$$

式(14)は未知量として任意時刻における移動回転ヒンジの先端からの位置 z のみを含んでいるから, 時間 t を微小時間間隔 Δt に区分して, 各時刻における z の値を逐次計算によつて求めることができる. $z=l$ となるまで逐次計算を繰り返していけば, $t=t_f$ の値もきまる. かくして各時刻における z の値が求まると, はり先端の鉛直塑性たわみ δ_A はつぎのような計算によつて近似的に求められる.

$$\theta_f = \frac{5v_0}{4l} \int_0^{t_f} \left(1 - \frac{z}{l} \right)^4 dt \quad (15)$$

$$\delta_A = l \sin \theta_f \quad (16)$$

ここに, θ_f : 塑性変形が停止したときのはりの全回転角.

また固定端付近における固定端より x の断面の鉛直塑性たわみ $\delta(x)$ は次式より計算される.

$$\delta(x) = \frac{5v_0}{4l} \int_0^{t_f} \left[\left(1 - z/l \right)^4 \left\{ x + \frac{l-z}{5} \left(1 - \frac{x}{l-z} \right)^5 - \frac{l-z}{5} \right\} \times \cos \left\{ \frac{5v_0}{4l} \int_0^t (1-z/l)^4 \left\{ 1 - \left(1 - \frac{z}{l-z} \right)^4 \right\} dt \right\} \right] dt \quad (17)$$

式(15)および(17)の積分はさきに求めた各時刻における z の値を用いて数値積分によつて求められる.

以上述べた解法1および2による計算値ならびに実測値を示すと, Fig. 4 のようになる. Fig. 4 をみればわかるように両方法とも実測値ときわめてよい一致を示すことが確認される.

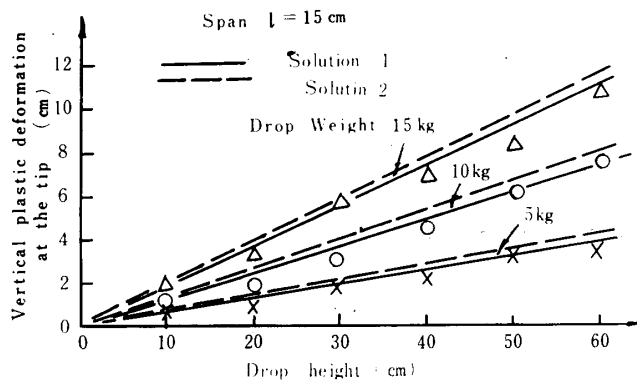


Fig. 4 Relationship between measured values and calculated ones

3. 結 言

鉄材料，すなわちひずみ速度の影響をうける材料を用いた片持ちばりの先端に集中衝撃が作用した場合の塑性変形について若干のモデル実験を行ない，その結果を検討したところ，従来の計算法ではかなり不満足な結果がえられたので，かかる場合の塑性変形の近似的な取り扱い方について検討し，2つの近似的解法を提案した。著者らの行なった実験では一般にはりの質量が衝撃体の質量にくらべてはるかに小さい場合であるが，ここに提案した解法は少なくとも実験の範囲で

はきわめてよい一致を示すことが確かめられた。Fig. 4を参照すると，両解法ともほとんど変わらない結果を示しているから，計算の簡単な点からは解法1を用いるのが便利である。ただ解法1では固定端付近に生ずるはりの彎曲部の塑性たわみまで求めることができないのが欠点といえる。したがって詳細な塑性変形の状態を追跡しようとする場合には，かなり計算の手数は要するが，解法2によるのが妥当であると考えられる。本文に提案した方法は単に片持ちばりの場合のみでなく，単純ばりや両端固定ばり，その他のはりに対しても応用でき，また土中に埋め込まれた鉄杭の衝撃による塑性変形に対しても適用しうるものと考えられる。

これらの場合については後日報告する予定である。

参 考 文 献

- 1) S. R. Bodner, P. S. Symonds : Experimental and Theoretical Investigation of the Plastic Deformation of Cantilever Beams subjected to Impulsive Loading. *Jour. of App. Mech.*, **29**, 719 (1962)
- 2) 上掲文献, p.724.

(昭和42年4月11日受理)