

組合繰返応力に対する耐久限度条件式

第2報 鋳鉄の様な脆性材料

大野元明

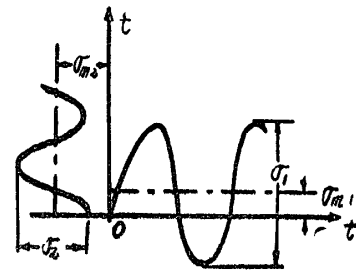
1. 緒言

前号(8巻1号)所載の耐久限度条件式は基本原理において延性材料, 脆性材料の如何を問わず広範囲の金属材料に適用されるべきことを記したが, ここに鋳鉄の一例をとって基本的或は代表的な数種の繰返応力に対する条件式を誘導し耐久限度若しくは限界を算定してみよう。

繰返応力に基く疲労は繰返剪断歪エネルギーに基因するがこれは平均垂直応力に支配されるものとするのが著者の考えであって

[平均垂直応力の函数][繰返剪断歪エネルギー]+[静エネルギー]=一定
で表した。第一項は疲労エネルギーを示し, 第二項は平均応力に基く相当エネルギーを示している。

鋳鉄では静応力実験で周知の様に鋼の場合の様な降伏点が存在せず, 引張と圧縮では応力歪関係が著しく異り, また破断は最大主応力又は剪断応力によって起ることなどを条件式中に採入れると上記基本式の函数, 係数の概略が定まる。これは鋼の場合とは可成り異ったものとなることは言うまでもない。なお又函数の数値的決定は鋼の場合と同様単純応力の繰返実験の結果を基にして行われるが材質的特性によって若干の相異が現れる。



第1図

2. 条件式

鋳鉄などの脆性材料に対しては耐久限度条件式を次の如き二次元の一般式で表わす。

$\sigma_1, \sigma_2 =$ 二次元繰返主応力 (振幅 $\times 2$),

$\sigma_{m1}, \sigma_{m2} = \sigma_1, \sigma_2$ の平均静応力

$f(\sigma_{m\psi}) =$ 八面体面の平均垂直応力 $\frac{1}{3}(\sigma_{m1} + \sigma_{m2})$ が正の場合の $\sigma_{m1} + \sigma_{m2} = \sigma_{m\psi}$ の函数, (次項)

$f(\sigma_{m\psi}') =$ 該面の $\frac{1}{3}(\sigma_{m1} + \sigma_{m2})$ が負の場合の $\sigma_{m1} + \sigma_{m2} = \sigma_{m\psi}'$ の函数 (次項)

$C =$ 材料によって定る常数

$n, n' =$ 片振に対する修性係数で4項に説明する。

[1] σ_{m1}, σ_{m2} が同符号で σ_1, σ_2 も同符号の場合

(i) $\sigma_{m1} + \sigma_{m2} \geq 0 \quad \sigma_{m1} > \sigma_{m2}$

$$W_1 = f(\sigma_{m\psi}) \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2] + \rho_1 [\sigma_{m1}^2] = C \quad \dots\dots\dots (1)$$

(ii) $\sigma_{m1} + \sigma_{m2} \leq 0$

$$W_2 = f(\sigma_{m\psi}') \cdot [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2] + \rho_2 [\sigma_{m1}^2 + \sigma_{m2}^2 - \sigma_{m1}\sigma_{m2}] = C \quad \dots\dots\dots (2)$$

(iii) $\sigma_{m1} = \sigma_{m2} = 0$ のとき

$$W_3 = [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2] = C \quad \dots\dots\dots (3)$$

但し $f(\sigma_{m\psi})_{\sigma_{m\psi}=0} = f(\sigma_{m\psi}')_{\sigma_{m\psi}=0} = 1$

[2] σ_{m1}, σ_{m2} が異符号 ($\sigma_{m1} > 0, \sigma_{m2} < 0$) で σ_1, σ_2 が同符号の場合

(i) $\sigma_{m1} + n\sigma_{m2} \geq 0$ のとき

[1] (i) による, 但し σ_{m2} の代わりに $n\sigma_{m2}$ を用う。 $\dots\dots\dots (4)$

(ii) $\sigma_{m1} + n\sigma_{m2} \leq 0$ のとき

[1] (ii) による, 但し σ_{m1} の代わりに $n'\sigma_{m1}$ を用う。 $\dots\dots\dots (5)$

[3] σ_{m1}, σ_{m2} が同符号で σ_1, σ_2 が異符号の場合

$\sigma_1 > \sigma_2$ とすれば

(i) $\sigma_{m1} + \sigma_{m2} \geq 0$ $\sigma_{m1} > \sigma_{m2}$ のとき

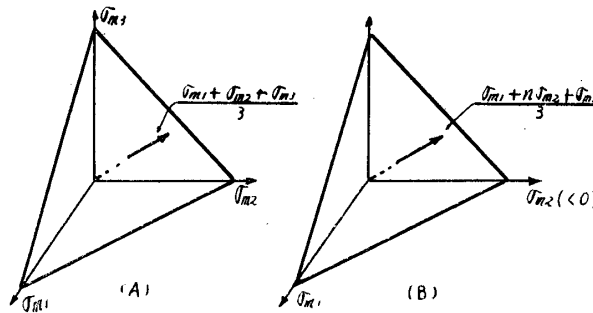
$$W_1 = f(\sigma_{m\psi}) \cdot [(\sigma_1 - n\sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + n^2\sigma_2^2] + \rho_1[\sigma_{m1}^2] = C \quad \dots\dots\dots (6)$$

(ii) $\sigma_{m1} + \sigma_{m2} \leq 0$ のとき

$$W_2 = f(\sigma_{m\psi}') \cdot [(\sigma_1 - n\sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + n^2\sigma_2^2] + \rho_2[\sigma_{m1}^2 + \sigma_{m2}^2 - \sigma_{m1}\sigma_{m2}] = C \quad \dots\dots\dots (7)$$

(iii) $\sigma_{m1} = \sigma_{m2} = 0$ のとき

$$W_3 = [(\sigma_1 - n\sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + n^2\sigma_2^2] = C \quad \dots\dots\dots (8)$$



第 2 図

3. $f(\sigma_{m\psi}), f(\sigma_{m\psi}')$

鋼に対しては $\sigma_{m1} + \sigma_{m2}$ の二次代数式を用いたが鋳鉄では函数の使用範囲の拡大のため三次式を用いる。

$$f(\sigma_{m\psi}) = 1 + \alpha_1 \frac{\sigma_{m1} + \sigma_{m2}}{\sigma_u/2} - \beta_1 \left(\frac{\sigma_{m1} + \sigma_{m2}}{\sigma_u/2} \right)^2 + \gamma_1 \left(\frac{\sigma_{m1} + \sigma_{m2}}{\sigma_u/2} \right)^3 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$f(\sigma_{m\psi}') = 1 - \alpha_2 \frac{\sigma_{m1} + \sigma_{m2}}{\sigma_{-u}/2} + \beta_2 \left(\frac{\sigma_{m1} + \sigma_{m2}}{\sigma_{-u}/2} \right)^2 - \gamma_2 \left(\frac{\sigma_{m1} + \sigma_{m2}}{\sigma_{-u}/2} \right)^3 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ = 材料によって定まる常数

σ_u = 引張耐久限度 σ_{-u} = 圧縮耐久限度

式中の常数は単純応力の繰返実験結果から決定されることは鋼の場合と同様である。

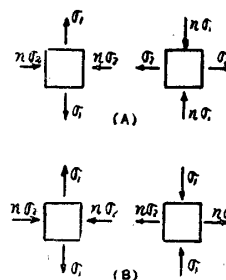
4. n, n'

n は同時に二次元主応力が作用する場合に一方が引張で他方が圧縮のとき引張と圧縮に対するエネルギーの相異を修正するために引張を基準にとって圧縮応力に係数 n を附加して用いる修正係数で鋳鉄では $n < 1$ である。この場合使用される条件式は W_1 式である。

n' は同様に圧縮を基準にとる場合に引張応力に乘すべき修正係数で n の逆数に当り $n' > 1$ でありこの場合 W_2 式が使用される。

例えば平均応力については $\sigma_{m1} > 0, \sigma_{m2} < 0$ ならば σ_{m1} と $n\sigma_{m2}$ 同時に作用しているものと見做して $\sigma_{m1} + n\sigma_{m2}$ の正、負に基いて前項〔2〕の如く W_1 式, W_2 式を使分ける。

動応力については純理論的に考えると甚だ複雑になるので取扱いを簡単化する。第3図は σ_1 と σ_2 が同位相で方向が逆の場合を示したもので (A) 図は左右夫々半サイクル宛の応力方向を示し引張を主に考えたときの修正係数 n の附加されるべきことを表わしているが、これを (B) 図の様に大きい方の σ_1 を主として σ_1 は引張の半サイクルも圧縮の半サイクルも同大のエネルギーを与えるものとして n を附加せず小さい方の主応力 σ_2 は圧縮のときも引張のときも $n\sigma_2$ に相当したエネルギーを与えるものとして扱う。斯様な方法は最大主応力に重点を置いた仮定を表わしている。



第3図

さて n の値は材料によって定る値と考えたが応力歪図から推定しても応力の大小に関せず一定値をとるものとも考えられない。しかし作用応力の大きさを一々条件式中に採入れることは甚しく複雑となり条件式としての簡易性を失うことになるので、これは第6項の第5図に示す様に σ_1/σ_2 の比率に比例するものと仮定する。このことは二次元の耐久限界 (第5図) の計算結果をも含めて最も合理的に簡単な取扱いを定めたものである。

5. 単純引張, 単純圧縮の繰返し

$\sigma_1 = \sigma_u, \sigma_2 = 0, \sigma_{m1} = \sigma_m, \sigma_{m2} = 0$ を (1), (9) に入れると

$$W_1 = \left[1 + \alpha_1 \frac{2\sigma_m}{\sigma_u} - \beta_1 \left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 + \gamma_1 \left(\frac{2\sigma_m}{\sigma_u} \right)^3 \right] [2\sigma_u^2] + \rho_1 \sigma_m^2 = C \quad \dots\dots\dots (11)$$

$\sigma_1 = \sigma_{-u}, \sigma_2 = 0, \sigma_{m1} = \sigma_{-m}, \sigma_{m2} = 0$ を (2), (10) に入れると

$$W_2 = \left[1 - \alpha_2 \frac{2\sigma_{-m}}{\sigma_{-u}} + \beta_2 \frac{2\sigma_{-m}}{\sigma_{-u}} - \gamma_2 \left(\frac{2\sigma_{-m}}{\sigma_{-u}} \right)^3 \right] [2\sigma_{-u}^2] + \rho_2 \sigma_{-m}^2 = C \quad \dots\dots\dots (12)$$

$\sigma_1 = 2\sigma_w, \sigma_2 = 0, \sigma_{m1} = \sigma_2 = 0$ を (3) に入れると

$$W_3 = 8\sigma_w^2 = C \quad \dots\dots\dots (13)$$

が得られる。(11), (12) の最初の [] 内が仮に一定値を有するとすればこれらは楕円限界を表わすが実際の耐久限度線図は鋼, 鋳鉄, チュラルミンなど材料によって異った形をとることは第4図の如くである。故に上記 [] 内即ち $f(\sigma_m \Psi), f(\sigma_{-m} \Psi')$ を適当に定めることによって耐久限度線図を表わそうとするのがこの方法の特徴である。

さて鋳鉄の一種類についての西原氏の実験結果を引用して

$$\begin{aligned} \alpha_1 = 1, & \quad \alpha_2 = 0.25, & \quad \gamma_1 = 0.025, & \quad \rho_1 = 0.88 \\ \alpha_2 = 1.65, & \quad \beta_2 = 0.9085, & \quad \gamma_2 = 0.1385, & \quad \rho_2 = 0.10 \end{aligned}$$

と定めると

$$\text{片振引張では} \quad \sigma_m = \sigma_u/2, \quad W_1 = 3.77\sigma_u^2 = C \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\text{片振圧縮では} \quad \sigma_{-m} = \sigma_{-u}/2 \quad W_2 = 0.265\sigma_{-u}^2 = C \quad \dots\dots\dots (15)$$

(13), (14), (15) から

$$\sigma_u = 1.46\sigma_w, \quad \sigma_{-u} = 5.5\sigma_w, \quad \sigma_{-u} = 3.765\sigma_u \quad \dots\dots\dots (16)$$

となりこれらは実験結果を満足し且つこの三点以外の任意の σ_m, σ_{-m} の平均応力に対しては

例えば

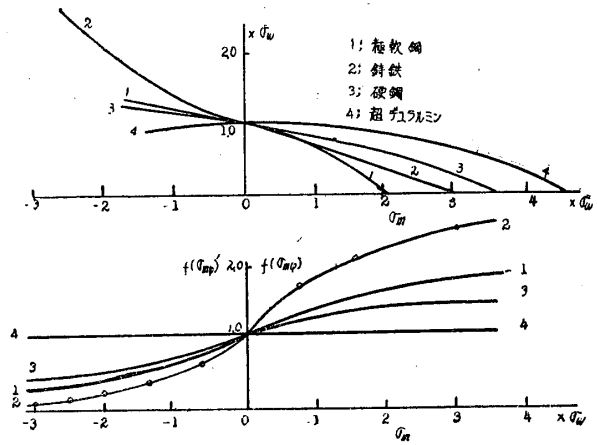
$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= \sigma_u/4, & \sigma_{u1} &= 1.665\sigma_w \\ \sigma_{-m} &= \sigma_{-u}/4, & \sigma_{-u1} &= 3.12\sigma_w \\ \sigma_{-m} &= \sigma_{-u}/8, & \sigma_{-u1} &= 2.415\sigma_w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

となって実験結果を結ぶ線上に載っている。 σ_m が增大して耐久限度線図が σ_m 軸に達する点の位置は(11)式に $\rho_1=0.88$ を代入して $\sigma_{u1}=0$ として

$$\sigma_B = 3.02\sigma_w \dots\dots\dots(18)$$

が得られる。

第4図の下図が $f(\sigma_{m4}), f(\sigma_{mv})$ を示している。上述の如く(11), (12), (13)は鑄鉄の種類についての耐久限度線図を与える条件式となっている。



第4図

6. 二次応力の繰返し

二次元応力の組合せには種々の場合があるがその代表的なものについての計算式、限界値などを示しておく。

(i) 片振剪断

τ_{u0} = 片振剪断耐久限度 (振幅×2) で表し

$$\sigma_1 = \tau_{u0}, \sigma_2 = -n\tau_{u0}, \sigma_{m1} = \tau_{u0}/2, \sigma_{m2} = -n\tau_{u0}/2$$

を(6)式に代入すれば

$$\begin{aligned} W_1 &= \left[1 + \alpha_1(1-n) \frac{\tau_{u0}}{\sigma_u} - \beta_1(1-n)^2 \left(\frac{\tau_{u0}}{\sigma_u} \right)^2 + \gamma_1(1-n)^3 \left(\frac{\tau_{u0}}{\sigma_u} \right)^3 \right] \\ &\quad \times 2(1+n+n^2)\tau_{u0}^2 + \frac{\rho_1}{4}\tau_{u0}^2 = C^2 \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

を得る。この式にて $n=0.5$ とし $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ に先に掲げた値を代入して τ_{u0} を算出すれば

$$\tau_{u0} = 0.8\sigma_u = 0.8 \times 1.46\sigma_w = 1.168\sigma_w \dots\dots\dots(20)$$

(ii) 両振剪断

τ_{w0} = 両振剪断耐久限度 (振幅) で表し

$$\sigma_1 = 2\tau_{w0}, \sigma_2 = -2n\tau_{w0}, \sigma_{m1} = \sigma_{m2} = 0$$

を(8)式に代入すれば

$$\tau_{w0} = 0.756\sigma_w \dots\dots\dots(21)$$

を得る。

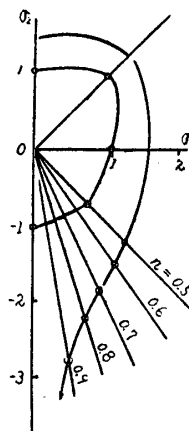
ここで(20)と(21)の比を求めると、

$$\frac{\tau_{u0}}{\tau_{w0}} = 1.53 \dots\dots\dots(22)$$

となりこの値は鋼についての値 1.8~1.94 (前号参照) に比較して小さい。即ち鑄鉄においては円筒、丸棒の片振振り耐久限度と両振振り耐久限度の比率が鋼の場合よりも著しく低くなる計算となる。この事柄は実験結果とも合致しており、斯様になる原因は両振剪断が片振の方へ若干偏移するためである。

(iii) 任意の組合せの二次元応力

σ_1 と σ_2 の繰返応力が任意の比率で同時に同位相で作用する場合、例えば等大応力が同位相で繰返し引張をなす場合、又は一方が他方の2倍の大きさで繰返す場合等比較的容易に計算を行うことが出来る。但しこの場合第5図に見る如く二応力の同一瞬間における向きが正負反対のときは一方の応力に n 又は n' を附加し n の値は図に記入してある様な値を用いる。



第5図

斯様にして耐久限界を計算すると片振、両振の限界線が図の如く定まる。この限界線が実際と合致するか否かは詳細な実験結果がないので不明であるが大体この様な限界を与えるものと推定される。

(iv) 平均剪断応力に繰返剪断が重複される場合

任意の静断応力が作用しておいてその上に繰返剪断が作用する場合は

$$\tau_{m0} = \text{平均剪断応力}$$

$$\tau_{u01} = \text{繰返剪断応力耐久限度 (振幅} \times 2)$$

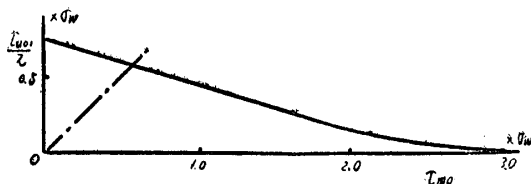
として、 $\sigma_1 = \tau_{u01}$, $\sigma_2 = -n\tau_{u01}$, $\sigma_{m1} = \tau_{m0}$, $\sigma_{m2} = -n\tau_{m0}$

を(6)に代入すれば

$$W_1 = \left[1 + 2\alpha_1(1-n)\frac{\tau_{m0}}{\sigma_u} - 4\beta_1(1-n)^2\left(\frac{\tau_{m0}}{\sigma_u}\right)^2 + 8\gamma_1(1-n)^3\left(\frac{\tau_{m0}}{\sigma_u}\right)^3 \right] \times 2(1+n+n^2)\tau_{u01}^2 + \rho_1\tau_{m0}^2 = C \quad \dots\dots\dots(23)$$

を得る。この式は $\sigma_{m1} = \tau_{u01}/2$ とすれば(19)の片振剪断の場合と一致し、又仮に $n=0$ としてみれば(11)の片振引張の式と合致する。

τ_{m0} が増大すれば τ_{u01} は減少して極限においては限界は静剪断破壊を起す点に一致するがその値 τ_{B0} は $\rho_1=0.88$ を用いると、 $\tau_{B0}=3.02\sigma_w$ となり引張強さと同じ値をとる。(23)式に $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ の値を入れて限界線図を画くと第6図の如くなる。



第6図

7. 組合繰返応力

前号にも記した様に組合せ応力というのは垂直応力と剪断応力が同時に作用する場合を意味し共に動応力(同位相)のとき及び一方が静応力で他方が動応力のときを含むものである。

(i) 組合動応力

(a) 片振引張と片振剪断

$$\sigma_{u1} = \text{組合片振引張耐久限度 (振幅} \times 2)$$

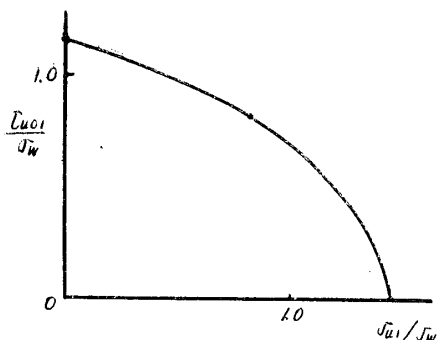
$$\tau_{u01} = \text{ " 剪断 "}$$

とすれば主応力 σ_1, σ_2 は

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{u1}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{u1}^2 + 4\tau_{u01}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{u1}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{u1}^2 + 4\tau_{u01}^2}$$

これを(6)に代入すれば



第7図

$$[1 + \alpha_1(A) - \beta_1(A)^2 + \gamma_1(A)^3] \{ (1+n^2)\sigma_{u1}^2 + 2(1+n+n^2)\tau_{u01}^2 + (1-n^2)\sigma_{u1}\sqrt{\sigma_{u1}^2 + 4\tau_{u01}^2} \} + \frac{\rho_1}{4} [\sigma_{u1} + \sqrt{\sigma_{u1}^2 + 4\tau_{u01}^2}] = C \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$\text{但し } A = \frac{(1+n)\sigma_{u1} + (1-n)\sqrt{\sigma_{u1}^2 + 4\tau_{u01}^2}}{2\sigma_u}$$

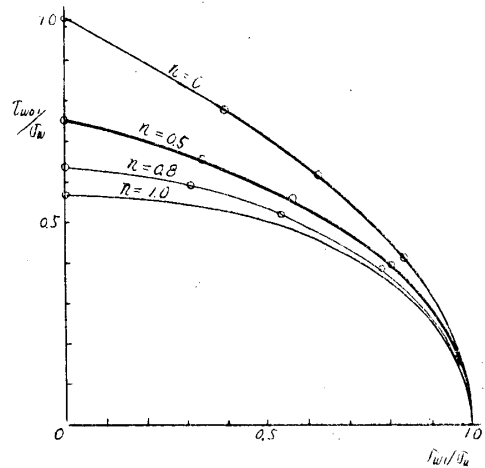
この式を計算すると第7図の限界が得られる。

(b) 引張圧縮と両振剪断

(24)において $\sigma_{u1} = 2\sigma_{w1}$, $\tau_{u01} = 2\tau_{w01}$ とおき平均応力を零とおけば

$$\sigma_{w1}^2(1+n^2) + (1+n+n^2)\tau_{w01}^2 + (1-n^2)\sigma_{w1}\sqrt{\sigma_{w1}^2 + 4\tau_{w01}^2} = \frac{C}{4} = 2\sigma_w^2 \quad \dots\dots\dots(25)$$

となる。この式は丸棒の組合せ繰返曲振りなどの不均等応力の場合の基礎式となるもので特に重要である。 n の値は計算例の鋳鉄では0.5を用いればよいが、今 n の値を変えて限界線の変化を調べてみると第8図の如くなる。 $n=1$ は極軟鋼などに適用される限界で楕円を表わす。 $n=0$ は最大主応力説に該当する。材料が異れば n の値が異なる故この限界線は異なる。



第8図

西原、遠藤両氏は新しい意味のポアソン定数 m_0 を考えた

$$\left(\sigma_{w1} + \frac{m_0-1}{2}\sigma_w \right)^2 + \frac{(m_0+1)^2}{m_0}\tau_{w01}^2 = \frac{(m_0+1)^2}{4}\sigma_w^2$$

を用いて限界を示し m_0 に適当な値を入れておられるが、この式と(25)の形は相当異っているけれども限界線の形は大同小異であることを附記しておく。

(ii) 動応力と静応力の組合せ

垂直応力又は剪断応力的一方が静応力の場合の組合せも種々あるがここでは代表的な二例だけに止めておく。

(a) 静剪断と引張圧縮

前号所載の(31)式と同様な方法によって

$$W_1 = \left[1 + 2\alpha_1(1-n)\frac{\tau_{m0}}{\sigma_u} - 4\beta_1(1-n)^2\left(\frac{\tau_{m0}}{\sigma_u}\right)^2 + 8\gamma_1(1-n)^3\left(\frac{\tau_{m0}}{\sigma_u}\right)^3 \right] \left[2\sigma_{u1}^2 + 4\tau_{m0}^2 - 2\tau_{m0}\sqrt{\sigma_{u1}^2 + 4\tau_{m0}^2} \right] + \rho_1\tau_{m0}^2 = C \quad \dots\dots\dots(26)$$

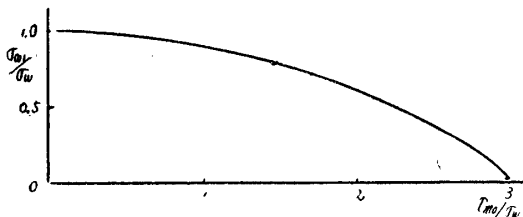
但し τ_{m0} = 静剪断応力

σ_{u1} = 組合引一圧耐久限度 (振幅×2)

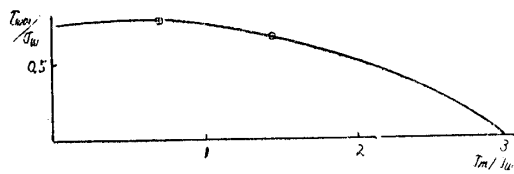
を得る。 $n=0.5$ とし $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \rho_1$ の値を前記の如く代入して(26)を計算すれば第9図の如くなる。この式は円筒、丸棒の静振りと引一圧又は静振りと回転曲げ(両振曲げ)の組合せに対する耐久限界の基礎式となる。

(b) 静引張と両振剪断

前号(29)式と同様な方法により



第 9 図



第 10 図

$$W_1 = \left[1 + 2\alpha_1 \frac{\sigma_m}{\sigma_u} - 4\beta_1 \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^2 + 8\gamma_1 \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_u} \right)^3 \right] \left[\sigma_m^2 (1 + n + n^2) + 8\tau_{w01}^2 (1 + n + n^2) \right] - \frac{1}{2} (2 + 3n + n^2) \times \tau_m \sqrt{\sigma_m^2 + 16\tau_{w01}^2} + \rho_1 \sigma_m^2 = C \quad \dots\dots\dots(27)$$

但し σ_m = 静引張応力

τ_{w01} = 組合繰返剪断応力 (振幅 $\times 2$)

この式にて $n=0.5$ とし $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \rho_1$ に前記の値を入れて計算すれば第10図が得られる。

8. 結 論

鋳鉄の様な脆性材料に繰返し応力が作用する場合も疲労は鋼の場合と同様な原理に基くものとして耐久限度条件式を立案して基本的な繰返応力並に代表的な数種の組合繰返応力に対する耐久限度計算方法を記述したが鋳鉄では実験結果が比較的少く実際との比較検討も詳細にはなし難いが実験値のあるものについては大体よく合っている様である。

本文中では均等応力の場合についてのみ記載したが丸棒の曲げや振りなどの不均等応力の作用する場合は均等応力の場合の各式を基礎として相当係数を附加すれば容易に計算出来る。このことについては後の機会に説明したいと思っている。なおデュラルミンや黄銅などの材料についても後日記述する積りである。

参 考 文 献

大野：組合繰返応力に対する耐久限度の条件式，山口大学学報，8巻1号
 大野：鋼，鋳鉄の耐久エネルギー式について，機械学会総会講演会前刷，昭32,昭33.
 西原：鋳鉄の繰返引張圧縮に対する強さ，機械学会論文集，4巻15号
 西原：疲れ破損の法則に関する研究，機械学会論文集，17巻61号
 W. N. Findley：Fatigue of Metals Under Combination of Stresses Transaction of the A. S. M., E Aug. 1957