

# 地震時に岸壁に作用する振動土圧の計算

大 原 資 生

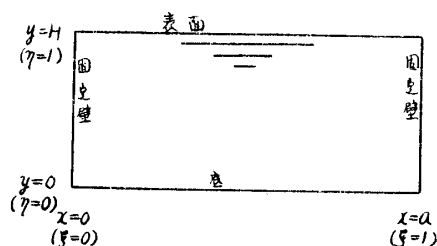
## 1. 緒 言

岸壁のある地盤が地震動をうけた場合、これに常時作用している静土圧の他に振動土圧が作用する。この振動土圧の大きさが求められなければ、地震時の岸壁の安定を論ずることは出来ない。筆者はここ数年来、この問題について九大の松尾教授と共に研究を進めて居り、先にこの計算法及びその結果の一部を報告<sup>1)</sup>したが、計算結果に誤りがあったので、これらを訂正し、計算法及びその結果を再び総括して述べる。又、地表面に載荷重のある場合の計算についても最近、その一部が完了したので併せて述べる。

## 2. 計 算 方 法

この計算は岸壁裏込地盤を弾性体と考へて行つたものである。又、岸壁は完全な固定壁であり、実際の岸壁の様なロッキング運動はしないものと一応考へる。

すなわち、図一1の様に固い容器の中に詰められた弾性体があり、これ全体が  $x$  方向に単弦的な強制振動が与えられた場合、 $x=0$  の固定壁面に作用する振動土圧を求めないのである。



図一 1

この場合の方程式及び境界条件は

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \rho k g \sin pt &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$i) \left. \begin{aligned} y=0 \\ x=0, a \end{aligned} \right) \quad u=0, v=0$$

$$ii) y=b; \quad \lambda \Delta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

但し、 $u, v$ ;  $x, y$  方向の変位

$\lambda, \mu$ ; Lamé の常数

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

$k$ ; 震度

これらを満足する解は簡単に求められないが、これは次の二つの場合の解の間にあると云うことは云える。すなわち、(A)  $y$  方向の変位を完全に押えた場合 ( $v=0$ )、(B)  $y$  方向の変位に対して全く抵抗がない場合の二つの場合である。この二つの場合の解はかなり簡単に求められ、この問題において目的とする固定壁に作用する圧力分布を計算することが出来る。当然、(A) の場合の値が (B) の場合の値より大きい、これについては前報告<sup>2)</sup> で述べた様に両者の差は全体の一割程度であるので、(A) の場合の方程式及び解を近似式及び近似解として

充分である。すなわち、(1)式の代りに

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + kg \sin pt \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$C_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad C_2^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

$$\text{i) } \left. \begin{array}{l} y=0 \\ x=0, a \end{array} \right); \quad u=0$$

$$\text{ii) } y=H; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

を用いる。

(2)式の解を求め数値計算を行う場合、 $C_1^2$ 、 $C_2^2$ の数值が必要となる。これは、地盤の縦波、横波の速度の自乗であるが、種々研究の結果、通常の弾性体と異なり粒状体である地盤では $C_1^2$ 、 $C_2^2$ の値は地表面からの深さにより異なると考えることが望ましいと云う結論を得た<sup>3)</sup>。すなわち、 $C_1^2$ 、 $C_2^2$ を $C_1^2(1-\alpha_1\eta)$ 、 $C_2^2(1-\alpha_2\eta)$ とし、 $\xi=x/a$ 、 $\eta=y/H$ 、 $U=\frac{u}{H}$ とおくと(2)式は、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{C_1^2}{a^2} (1-\alpha_1\eta) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{C_2^2}{H^2} (1-\alpha_2\eta) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \frac{kg}{H} \sin pt \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{i) } \left. \begin{array}{l} \eta=0 \\ \xi=0, 1 \end{array} \right); \quad U=0$$

$$\text{ii) } \eta=1; \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = 0$$

(3)式を解くには先ず境界条件を考慮して

$$U = \sum_n Y_n(\eta) \sin(2n+1)\pi\xi \sin pt \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$\frac{kg}{H} \sin pt = \sum_n \frac{4kg \sin pt}{(2n+1)\pi H} \sin(2n+1)\pi\xi \quad \dots\dots\dots(5)$$

とおく。(4)、(5)を(3)式に入れると

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[ (1-\alpha_2\eta) \frac{dY_n}{d\eta} \right] + \left[ \frac{H^2}{C_2^2} p^2 - (2n+1)^2 \pi^2 \frac{H^2}{a^2} \frac{C_1^2}{C_2^2} (1-\alpha_1\eta) \right] Y_n \\ + \frac{H}{C_2^2} \frac{4kg}{(2n+1)\pi} = 0 \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

を得る。(3)式及び、その境界条件を満足する解 $U$ を求めるには(6)式及び、 $(Y_n)_{\eta=0}=0$ 、

$\left(\frac{dY_n}{d\eta}\right)_{\eta=1}=0$ なる二つの境界条件を満足する $Y_n$ を求めればよい。

(6)式は Bessel の方程式とならないので、これを Ritz の近似解法を用いて解く。

(6)式において

$$P(\eta) = (1-\alpha_2\eta), \quad Q(\eta) = |\gamma - \delta_n(1-\alpha_1\eta)|, \quad R = \beta_n kgH$$

$$\text{但し, } \gamma = \frac{H}{C_2^2} p^2, \quad \delta_n = (2n+1)^2 \pi^2 \frac{H^2}{a^2} \frac{C_1^2}{C_2^2}, \quad \beta_n = \frac{4}{C_2^2(2n+1)\pi}$$

とおくと、(6)式は

$$\frac{d}{d\eta} \left[ P(\eta) \frac{dY_n}{d\eta} \right] + Q(\eta) Y_n + R = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

境界条を考慮して

$$Y = \sum_m A_m \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} \eta \quad \dots\dots\dots(8)$$

とにおいて、(9)式で示される  $I$  を求める。

$$I = \int_0^1 \left[ P(\eta) \left( \frac{dY_n}{d\eta} \right)^2 - Q(\eta) Y_n^2 - 2RY_n \right] d\eta \quad \dots\dots\dots(9)$$

これより  $\partial I / \partial A_{0n} = 0, \partial I / \partial A_{1n} = 0, \dots\dots, \partial I / \partial A_{m \cdot n} = 0$  なる未知係数  $A_{m \cdot n}$  の数だけの連立方程式を作り  $A_{m \cdot n}$  の近似値を求めればよい。

但し、この場合、 $n$  を  $0, 1, 2, \dots\dots$  と順次に変えて各々の  $n$  について  $A_0, A_1, A_2, \dots\dots$  を計算しなければならない。かくして、(3)式及び境界条件を満足する近似解は

$$U = \sum_{m,n} A_{m \cdot n} \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} \eta \cdot \sin(2n+1)\pi\xi \cdot \sin pt \quad \dots\dots\dots(10)$$

となり  $\xi=0$  の固定壁に作用する振動土圧は

$$\sigma_{\xi=0} = -C_1^2 (1 - \alpha_1 \eta) \rho \sum_{m,n} \frac{(2n+1)\pi H}{a} A_{m \cdot n} \sin \frac{(2m+1)\pi}{2} \eta \cdot \sin pt \quad \dots\dots\dots(11)$$

となる。

### 3. 計算結果

今、強制振動周期が地盤の固有振動周期よりかなり大きい場合の  $\sigma_{\xi=0}$  は  $\rho kg$  なる強制力が一様に  $\xi=0$  の固定壁の方向に加わった場合の  $\sigma_{\xi=0}$  に殆ど一致する。

この様な場合には(6)式で  $\gamma=0$  とした場合となり、この場合の  $\sigma_{\xi=0}$  は  $H$  について無次元量として計算出来る。

地震周期が単一のものではなく、共振状態の有無が明確でないので、一応、前述の様な計算値を基本量として計算し、共振状態については別途に考えて、共振状態ではこの基本量の何倍程度の振動土圧が生ずるかを調べる様にする方が妥当であるとする。

以上によって、 $\gamma=0$  として計算した結果が図-2, 3である。図-2は圧力分布を示し縦軸は高さの無次元量  $\eta$  で表わしてある。すなわち、 $H=10m$  の岸壁に作用する振動土圧分布

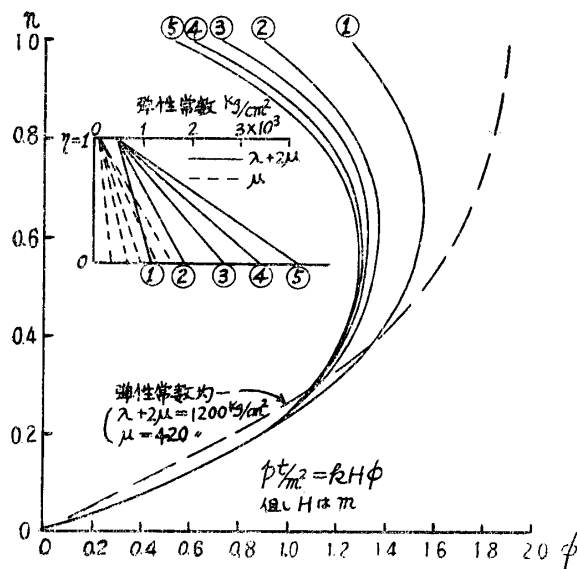
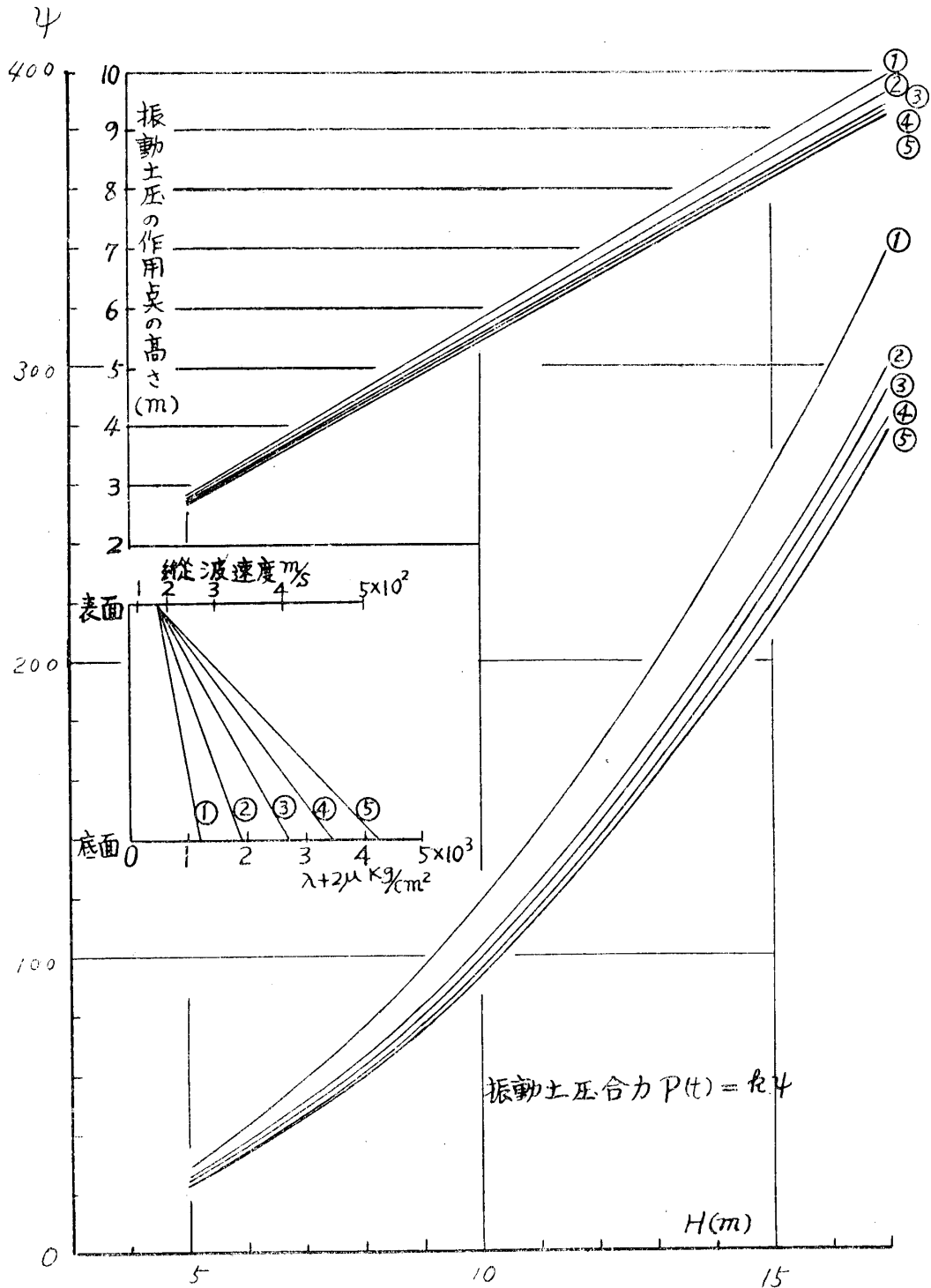


図-2 振動土圧分布

を知るには、 $\eta=1.0$  の点を  $10m$  とし横軸の数値  $\phi$  に  $10k$  を乗ずれば図-2がそのまま  $H=10m$  の岸壁に作用する震度  $k$  なる場合の振動土圧分布となる。震度  $k=0.2$  の様な場合は横軸  $\phi$  に  $0.2 \times 10 = 2$  を乗ずればよい。

図-3は図-2より実際に岸壁設計に必要な振動土圧合力とその作用点の高さを求めたものもので、これより各高さの岸壁に作用する合力及び作用点の高さがわかる。

図-2, 3においては裏込地盤の弾性常数が土質の相異により異なる場合をも考えて、その増加状態を5つ変えて計算してあり、増加状態①が土圧分布①に対応する様になっている。この増加状態は筆者が数種



図一三 振動土圧合力及其の作用点の高さと岸壁高との関係

の砂について弾性常数を測定した結果<sup>4)</sup>より定めたものである。

前述の共振状態を調べるために  $H=15m$ 、弾性常数の増加状態③の場合の岸壁を想定し、強制振動周期を種々変化させた場合の圧力分布は図一四の通りで強制周期が地盤の固有周期に近くなると圧力値が大きくなり、それを乗り越すと負圧になり圧力分布が複雑になることがわかる。この場合の第一次固有周期は0.282秒で計算より求めたものである。これは、岸壁高  $H$

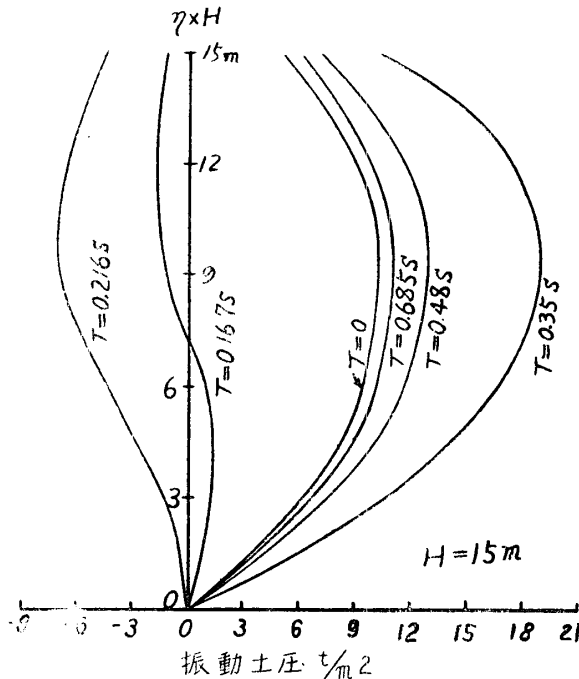


図-4 強制振動周期と振動土圧分布状態

4. 地表面載荷重のある場合の計算

図-5 の様に裏込地盤上に等分布荷重  $W$  がある場合についての計算及びその結果について述べる。この場合の方程式及び境界条件は、

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{C_1^2}{a^2} (1 - \alpha_1 \eta) \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \frac{C_2^2}{H^2} (1 - \alpha_2 \eta) \frac{\partial U}{\partial \eta} \right] + \frac{kg}{H} \sin pt \dots (12)$$

i)  $\eta=0$ :  $U=0$

ii)  $\eta=1$ ;  $\frac{C_2^2(1-\alpha_2)}{H} \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{kW}{H} + p^2 \frac{W}{g} U$

iii)  $\xi=0, 1$ ;  $U=0$

となる。但し  $W$  は単位面積当りの荷重である。これは厳密解は勿論、前述の Ritz 法でも解けないので、筆者は階差法を用いて解いた。

すなわち、前同様に

$$U = \sum_n Y_n \sin(2n+1)\xi \cdot \sin pt$$

$$\frac{kg}{H} \sin pt = \sum_n \frac{4kg}{(2n+1)\pi H} \sin(2n+1)\pi\xi \cdot \sin pt$$

$$\frac{kW}{H} = \sum_n \frac{4kW}{(2n+1)\pi H} \sin(2n+1)\pi\xi \cdot \sin pt$$

とおく。(12)式は(7)式と同一の式

$$\frac{d}{d\eta} \left[ P(\eta) \frac{dY_n}{d\eta} \right] + Q(\eta)Y_n + R = 0$$

となり境界条件は

$$\eta=0; Y_n=0$$

と、弾性常数の増加状態によって異なる。次表に第一次固有周期を示す。

弾性常数 増加状態	第一次固有周期(秒)
①	0.0271H
②	0.0221H
③	0.0188H
④	0.0166H
⑤	0.0151H

なお、以上の計算結果では奥行方向の長さ  $a$  は  $10H$ 、すなわち  $H/a=1/10$  としてあるが、これは、 $a=10H$  以上であれば  $\sigma_x=0$  の値が  $a=\infty$  と殆ど等しいことが前報告でわかったからである。

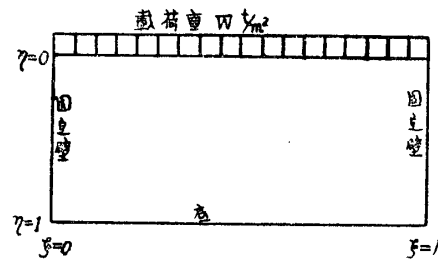


図-5

$$\eta \neq 1; \frac{C_2^2(1-\alpha_2)}{H} \frac{dY_n}{d\eta} = \frac{4kW}{(2n+1)\pi H} + \rho^2 \frac{W}{g} Y_n$$

階差式を求めると、

$$\text{内点; } Z_1(Y_n)_{\eta+h} + Z_0(Y_n)_\eta + Z_{-1}(Y_n)_{\eta-h} + C = 0 \quad \dots\dots(13)$$

$$\text{但し, } Z_0 = \left\{ -\frac{2}{h^2}(1-\alpha_2\eta) + |\gamma - \delta_n(1-\alpha_1\eta)| \right\}$$

$$Z_1 = \left\{ \frac{1}{h^2}(1-\alpha_2\eta) - \frac{\alpha_2}{2h} \right\}$$

$$Z_{-1} = \left\{ \frac{1}{h^2}(1-\alpha_2\eta) + \frac{\alpha_2}{2h} \right\}$$

$$C = \beta_n kgH$$

となり、辺点では境界条件により

$$(Y_n)_{\eta=0} = 0 \quad \dots\dots(14)$$

$$(Y_n)_{\eta=1-h} - (Y_n)_{\eta=1+h} = \frac{2hH}{C_2^2(1-\alpha_2)} \left[ \frac{4kW}{(2n+1)\pi H} + \rho^2 \frac{W}{g} (Y_n)_{\eta=1} \right] \quad \dots\dots(15)$$

となる。

(13), (14), (15)式を連立方程式として各々の  $\eta$  に対する  $Y_n$  の値を求めるのであるが、この場合も前と同様に  $n$  を順次変えて、それぞれの  $n$  についての  $Y$  の値を求める。

階差法は  $h$  を小さくとればとる程、近似度がよくなるが、連立方程式の元の数が増加するので労力が増大する。

筆者は  $h$  をどの程度にすればよいかを知るために、前述の載荷重のない場合 ( $W=0$ ) の場合を階差法によって解き前の Ritz 解と比較してみた。その結果、 $h=0.1$  すなわち、 $\eta$  を 10 等分すれば充分であるとの結果を得た。

この場合の両者の  $Y_0$  の値を比較したのが次表である。

この方法によって、 $W=3.2t/m^2$   $H=10m$  として求めた  $\sigma_{z=0}$  が図-6の曲線①である。このときの弾性常数の増加状態は図中に示してあり、これは図-2の②の場合のものが、 $3.2t/m^2$

$\eta$	Ritz	階差法
	$\times 10^{-12}$	$\times 10^{-12}$
0.1	266.5474	268.3606
0.2	531.3398	530.9360
0.3	789.8020	788.6822
0.4	1036.6578	1037.7178
0.5	1270.3146	1274.5646
0.6	1492.9664	1490.8015
0.7	1703.0810	1689.3903
0.8	1886.4652	1865.8866
0.9	2015.5910	2006.6444
1.0	2062.6192	2080.0544

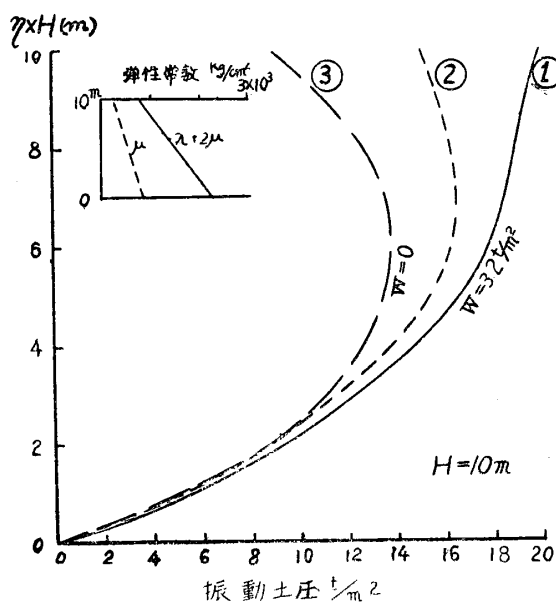


図-6 地表面に載荷重のある場合の振動土圧分布 (曲線①)

の載荷重をうけたため地盤高  $2m$  分だけ増大したとしたものである。

又、図一6の曲線③は図一2の②で  $H=10m$  とした場合の土圧分布である。

同じく、図一6の曲線②は、図一2で  $H=12m$  として土圧分布を求めたときの  $\eta \times H=10m$  までの土圧分布で、これは従来の土圧計算に地表面載荷重のある場合には載荷重分に等しい重量分だけ地盤高が増加したとして考えると云う方法をこの場合にも適用してみたのである。

## 5. 結 語

以上、筆者が現在までに行った地震時に岸壁に作用する振動土圧の計算について総括して述べたが、載荷重のある場合についても種々計算を行う必要があり、実際の岸壁の様に幾分でもロッキングを起す場合等について順次計算を行う予定である。

最後に御指導いただいている九大の松尾教授に厚く感謝の意を表する。

## 参 考 文 献

- 1), 2) 九大工集, 29巻2号, 30巻1号, 31巻2号
- 3), 4) 土木学会論文集, 58号