

二重管内における助走区間の熱伝達の近似解

村 川 勝 彌

1. 緒 言

工業上、二重管式熱交換器が多数使用されているが、その場合には管の入口から直ちに熱交換の始まる速度助走区間の熱伝達が大部分をしめている。すなわち速度境界層と温度境界層とが同時に発達する場合について簡単な理論解を求めることにする。

2. 近似解と数値計算

無次元化されたエネルギー式と境界条件。

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{1}{x + \frac{r_1}{r_2 - r_1}} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\sigma_2}{4} \cdot w(x, z) \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$(t)_{x=0} = f_0(z) \quad \dots\dots\dots (2), \quad (t)_{x=1} = f_1(z) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$w(x, z) = 1 - z^2 + (z + z^2) \cdot w_0(x) \quad \dots\dots\dots (4)^{(1)}$$

$$t = u + \{f_1(z) - f_0(z)\} \cdot x + f_0(z) \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$F_1(x, z) = \{f_0(z) - f_1(z)\} / (x + \frac{r_1}{r_2 - r_1}) + \frac{\sigma_2}{4} \cdot w(x, z) \left[x \left\{ \frac{d}{dz} f_1(z) - \frac{d}{dz} f_0(z) \right\} + \frac{d}{dz} f_0(z) \right] \quad \dots\dots\dots (6)$$

パラメーター λ を導入して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{x + \frac{r_1}{r_2 - r_1}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = F_1(x, z) + \lambda \cdot \frac{\sigma_2}{4} \cdot w(x, z) \cdot \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$u = u_0 + \lambda \cdot u_1 + \lambda^2 \cdot u_2 + \dots\dots\dots (7)$$

とおけば次の解をうる。

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{1}{x + \frac{r_1}{r_2 - r_1}} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} = F_1(x, z) \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$(u_0)_{x=0} = 0 \quad \dots\dots\dots (9), \quad (u_0)_{x=1} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

Finite Hankel Transform を用いれば

$$u_0 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{-2J_0^2(k_s \frac{r_1}{r_2 - r_1})}{J_0^2(k_s \frac{r_2}{r_2 - r_1}) - J_0^2(k_s \frac{r_1}{r_2 - r_1})} \left[J_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} \cdot Y_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) - J_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) \cdot Y_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} \right] \times \int_0^1 \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \cdot F_1(x, z) \cdot \left[J_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} \cdot Y_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) - J_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2 - r_1} \right) \cdot Y_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \right\} \right] \cdot dx \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$u_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{-2J_0^2(k_s \frac{r_1}{r_2-r_1})}{J_0^2(k_s \frac{r_2}{r_2-r_1}) - J_0^2(k_s \frac{r_1}{r_2-r_1})} \left[J_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2-r_1} \right) \right\} \cdot Y_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2-r_1} \right) - J_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2-r_1} \right) \cdot Y_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2-r_1} \right) \right\} \right] \int_0^1 \left(x + \frac{r_1}{r_2-r_1} \right) F_2(x, z) \left[J_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2-r_1} \right) \right\} \cdot Y_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2-r_1} \right) - J_0 \left(k_s \frac{r_2}{r_2-r_1} \right) \cdot Y_0 \left\{ k_s \left(x + \frac{r_1}{r_2-r_1} \right) \right\} \right] dx \quad (12)$$

$$F_2(x, z) = \frac{\sigma_2}{4} w(x, z) \frac{\partial u_0}{\partial z} \quad (13)$$

熱伝達をあらわす Nusselt 数は

$$Nu = -2 \int_0^1 \left(-\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} \cdot dx \int_0^1 f_0(z) \cdot dz \quad (14)$$

次に水を用いて行った著者の実験結果²⁾によって内外管壁温度分布(2), (3)式は次のようになる。

$$f_0(z) = -0.7167z^2 + 1.268z + 0.0450, \quad (\text{内管})$$

$$f_1(z) = 0.01077z + 0.2461, \quad (\text{外管})$$

ただし垂直二重管における速度助走区間について、内管加熱の水の実験結果である。実験装置の寸法は

$$2r_2/2r_1 = 55\text{mm}/30\text{mm}, \quad \text{伝熱長さ } L = 1400\text{mm}, \quad d_2 = 55\text{mm}(\text{引抜鋼管}), \\ d_1 = 30\text{mm}(\text{銅管}),$$

次に速度助走区間の速度分布を与える著者³⁾の誘導した(4)式の中の $w_0(x)$ は次式で示される。

$$w_0(x) = \frac{1}{\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + 1 - \left\{ \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right\} / \log e \frac{r_2}{r_1}} \cdot \left[- \left\{ \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \cdot x + 1 \right\}^2 + 1 + \left\{ \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1 \right\} / \log e \frac{r_2}{r_1} \cdot \log e \left\{ \left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right) x + 1 \right\} \right]$$

上述の寸法における k_s の値は

$$k_1 = 3.141592654, \quad k_2 = 6.283185308, \quad k_3 = 9.424777962, \quad \dots$$

以上の数値を(14)式に代入して第0次近似を求めれば

$$Nu_0 = 0.7701 + 0.01959 \times \sigma_2 \quad (15)$$

となり、(15)式の第一項すなわち常数項だけが正しい値を示す。

次に更に精度を向上させるために第1次近似まで求めれば

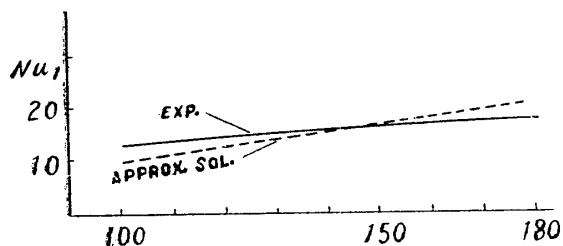
$$Nu_1 = 0.7701 + 0.0201 \times \sigma_2 + 0.000596 \times \sigma_2^2 \quad (16)$$

となり、(16)式の第一項すなわち常数項と、第二項すなわち σ_2 の一乗の係数とは正しい値を示す。(16)式は熱伝達の第1次近をあたえる式である。なお(15), (16)式を求めるとき、(11), (12)式の $\sum_{s=1}^{\infty}$ は $s=1$ すなわち初項だけ計算し、数値積分法は Simpson 1/3 則を適用して略算を行った。(16)式の σ_2 の適用範囲は $100 < \sigma_2 < 180$ である。 σ_2 が100以下になれば自由対流の影響が入るし、又、180以上に大きくなれば乱流に近くなるのでこの理論の適用範囲外となる。

3. 結 言

二重管内における速度助走区間の熱伝達の近似解 (11), (12), (14) 式を求め, 数値を代入して第 1 次近似 (16) 式を計算した。(14) 式から (16) 式の数値計算にはベッセル函数表が利用できるのが甚だ便利であるが, かなりの数値計算を行った。

次に理論結果 (14) 式, したがって, その数値計算結果 (16) 式と, 実験結果とを比較すれば



第 1 図

図の実線が実験結果を示し, 点線が(16)式の理論結果を示す。 $130 < \sigma_2 < 170$ の範囲では割り合い良く一致しているようである。(16)式は自由対流や乱流について考えていないので σ_2 の小さい範囲や, σ_2 の大きい範囲では実験とはなれて来るのは当然であるが, 今, 考えている $100 < \sigma_2 < 180$ の範囲内では, 近似解 (16) 式は, かなり実験と良く一

致することがわかる。温度, 流速, 寸法があたえられれば (11)~(14) 式によって, そのつど, 一般的な数値計算ができる。

文 献

- 1) 村川勝彌, 日本機械学会論文集, 22巻 117号 349~353頁.
- 2) 村川勝彌, 日本機械学会 (昭和31年10月1日, 東京秋期講演大会)
- 3) 村川勝彌, 1) におなじ。