開放型垂直二重管内の層流を伴う自由対流における熱伝達の理論

村　川　勝　彌

1. 緒　言

二重管型式の熱交換装置[1)]は工業上，ボイラの予熱器，冷凍機，化学工業，原子炉等に広く使用せられ，また原子炉ならびに原子力発電の工業的発展に伴い，特にソ連，フランス，カナダ，イギリス，アメリカではウラニウム燃料要素として二重管或は三重管の垂直管として使用され，原子炉用二重管式熱交換装置で N_a—蒸気あるいは N_a—K を用いた熱交換器では二重隙間に水銀，鉛，不活性ガスとしてヘリウムを封入するので特に自由対流熱伝達の研究の必要性に迫られる。

ここでは層流と自由対流とが共存するときの一般理論について略述する。

2. 基　礎　式

(i) 流体力学の運動方程式

$$C_r\cdot\frac{\partial C_r}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_r}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\nabla^2C_r-\frac{C_r}{r^2}\right)\quad\cdots\cdots(1)$$

$$C_r\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial Z}+\nu\cdot\nabla^2C_Z+g\cdot\beta\cdot(T-T_0)\quad\cdots\cdots(2)$$

ただし

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2}\quad\cdots\cdots(3)$$

(ii) 連続の式

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot C_r)+\frac{\partial C_Z}{\partial Z}=0\quad\cdots\cdots(4)$$

(iii) 境界条件

$$(C_Z)_{z=0}=F(r)\cdots\cdots(5),\quad (C_Z)_{r=r_1}=0\cdots\cdots(6),\quad (C_Z)_{r=r_2}=0\cdots\cdots(7)$$

$$(C_r)_{z=0}=0\cdots\cdots(8),\quad (C_r)_{r=r_1}=0\cdots\cdots(9),\quad (C_r)_{r=r_2}=0\cdots\cdots(10)$$

流れ函数 ψ,

$$C_Z=\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdots\cdots(11),\quad C_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial Z}\cdots\cdots(12)$$

(iv) エネルギ式

$$C_r\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+C_Z\cdot\frac{\partial T}{\partial Z}=a\left(\frac{\partial^2T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2T}{\partial Z^2}\right)\quad\cdots\cdots(13)$$

(v) 境界条件

$$(T)_{z=0}=T_0\cdots\cdots(14),\quad (T)_{r=r_1}=F_0(Z)\cdots\cdots(15),\quad (T)_{r=r_2}=F_1(Z)\cdots\cdots(16)$$

$\frac{\partial}{\partial Z}(1)-\frac{\partial}{\partial r}(2)$ より p の項を消去し

$$x=(r-r_1)/(r_2-r_1)\cdots\cdots(17),\quad z=Z/L\quad\cdots\cdots(18)$$

$t=(T-T_0)/(T_{w1m}-T_{w2m})$ ……(19), $\psi=\overline{w}\cdot(r_2-r_1)^2\cdot\phi$ ………………(20)

$\varepsilon=G_r/Re^2$ …………(21)

$$\nabla_0{}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\dfrac{r_1}{r_2-r_1}}\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial Z^2} \quad\cdots\cdots(22)$$

$$\phi=\Phi_0+\varepsilon\cdot\Phi_1+\varepsilon^2\cdot\Phi_2+\cdots\cdots, \quad\cdots\cdots(23)$$

$$t=\frac{1}{Re}(t_0+\varepsilon\cdot t_1+\varepsilon^2\cdot t_2+\cdots\cdots), \quad\cdots\cdots(24)$$

とおいて無次元化し ε の係数を比較し，パラメーター λ を導入すれば

$$\nabla_0{}^2\nabla_0{}^2\Phi_0=\lambda\cdot\varphi_0(\Phi_0) \quad\cdots\cdots(25)$$

$$\Phi_0={}_0\phi_0+\lambda\cdot{}_0\phi_1+\lambda^2\cdot{}_0\phi_2+\cdots\cdots, \quad\cdots\cdots(26)$$

とおけば

$$\nabla_0{}^2\nabla_0{}^2{}_0\phi_0=0 \quad\cdots\cdots(27)$$

$$\nabla_0{}^2\nabla_0{}^2{}_0\phi_1=F_0(x,z) \quad\cdots\cdots(28)$$

$R_e=2(r_2-r_1)\cdot\overline{w}/\nu=$ レイノルズ数,

$G_r=g\beta(r_2-r_1)^3(T_{w1m}-T_{w2m})/\nu^2=$ Grashof 数

$\sigma_2=2(r_2-r_1)\overline{w}/a\cdot 2(r_2-r_1)/L=4/\pi\cdot G_{z2}$,

$G_{z2}=$ Graetz 数 $=\pi/4\cdot R_e\cdot P_r\cdot 2(r_2-r_1)/L=\pi/4\cdot\sigma_2$

$p_r=\nu/a=$ Prandtl 数.

$${}_0\phi_0=u+z\cdot\frac{\partial v}{\partial z} \quad\cdots\cdots(29)$$

$$u=x^2\int_x^1 y\cdot dx+(1-x)^2\cdot\int_0^x w\cdot dx+\int_0^x f(x)\cdot dx \quad\cdots\cdots(30)$$

とおき y, w の第0次近似を，それぞれ y_0, w_0 として次の関係から求めることにする。

$$\begin{aligned}y_0=w_0=u_0&-\frac{z^2}{8}\cdot\left(\frac{L}{r_2-r_1}\right)^2\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{f(x)}{x+\dfrac{r_1}{r_2-r_1}}\right]\\&+\frac{z^2}{8}\left(\frac{L}{r_2-r_1}\right)^2\cdot x\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{f(x)}{x+\dfrac{r_1}{r_2-r_1}}\right]_{x=1}\\&+\frac{z^2}{8}\left(\frac{L}{r_2-r_1}\right)^2\cdot(1-x)\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}f(x)+\frac{f(x)}{x+\dfrac{r_1}{r_2-r_1}}\right]_{x=0}\quad\cdots\cdots(31)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2u_0}{\partial x^2}+\frac{1}{x+\dfrac{r_1}{r_2-r_1}}\frac{\partial u_0}{\partial x}+\left(\frac{r_2-r_1}{L}\right)^2\cdot\frac{\partial^2u_0}{\partial Z^2}+M_0(x,z)=0 \quad\cdots\cdots(32)$$

$(u_0)_{x=0}=0$ ……………(33), $(u_0)_{x=1}=0$ ……………(34), $(u_0)_{z=0}=0$ ……………(35)

$\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial Z}\right)_{z=0}=0$ ………(36)

Laplace Transform を行って

$$y_0=\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot w_0 \quad\cdots\cdots(37)$$

$$F(x,\ p)=\int_0^1 G(x,\ \xi)\cdot\left(\xi+\frac{r_1}{r_2+r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot f(\xi,\ p)\cdot d\xi \qquad \cdots\cdots(38)$$

とおけば次の第2種 Fredholm 積分方程式に帰着できる。

$$w_0(x,\ p)=F(x,\ p)+\lambda\int_0^1 G(x,\ \xi)\cdot w_0(\xi,\ p)\cdot d\xi \qquad \cdots\cdots(39)$$

Schmidt の対称核の理論により

$$w_0(x,\ p)=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{k_s{}^2\cdot\varphi_s(x)}{k_s{}^2-\lambda}\int_0^1 F(\xi,\ p)\cdot\varphi_s(\xi)\cdot d\xi \qquad \cdots\cdots(40)$$

Green 函数 $G(x,\xi)$

$$\begin{aligned}
&=\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\log e\frac{r_2}{r_2-r_1}-\log e\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}\cdot\\
&\qquad\left\{\log e\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)-\log e\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}\Big/\log e\frac{r_2}{r_1},\quad \{0\leqq x\leqq\xi\leqq1\}\\
&=\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left\{\log e\frac{r_2}{r_2-r_1}-\log e\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}\cdot\\
&\qquad\left\{\log e\left(\xi+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)-\log e\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}\Big/\log e\frac{r_2}{r_1},\quad \{0\leqq\xi\leqq x\leqq1\}. \qquad \cdots\cdots(41)
\end{aligned}$$

固有函数 $\varphi_s(x)$

$$\begin{aligned}
&=\left[\frac{2}{\left(\frac{r_2}{r_2-r_1}\right)^2\cdot\left[u_0'\left\{k_s\frac{r_2}{r_2-r_1}\right\}\right]^2-\left(\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^2\cdot\left[u_0'\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}\right]^2}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\\
&\qquad\times\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot u_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}, \qquad \cdots\cdots(42)
\end{aligned}$$

$$u_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}=\frac{J_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}}{J_0\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}}-\frac{Y_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}}{Y_0\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}}, \qquad \cdots\cdots(43)$$

固有値 $\lambda_s=k_s{}^2$

k_s は $J_0\left\{k\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}\cdot Y_0\left\{k\frac{r_2}{r_2-r_1}\right\}=Y_0\left\{k\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}\cdot J_0\left\{k\frac{r_2}{r_2-r_1}\right\}$ の根。

Faltung によって逆変換を行えば

$$\begin{aligned}
u_0=&-\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\sum_{s=1}^{\infty}k_s\cdot\varphi_s(x)\int_0^1\int_0^1 G(\xi,\ \eta)\left(\eta+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\varphi_s(\xi)\cdot\\
&\int_0^z M_0(\eta,\ \xi)\frac{L}{r_2-r_1}\sinh k_s\frac{L}{r_2-r_1}(z-\zeta)\cdot d\zeta\cdot d\eta\cdot d\xi \qquad \cdots\cdots(44)
\end{aligned}$$

$$v=\int_0^z\left\{x^2\int_x^1\theta\cdot dx+(1-x)^2\cdot\int_0^x\Theta\cdot dx\right\}\cdot dz \qquad \cdots\cdots(45)$$

とおいて θ, Θ の第0次近似を，それぞれ θ_0, Θ_0 として次の関係式から求めることにする。

$$\nabla_0{}^2\begin{Bmatrix}\theta_0,\\ \Theta_0\end{Bmatrix}=0\cdots\cdots(46),\quad \begin{Bmatrix}\theta_0,\\ \Theta_0\end{Bmatrix}_{z=0}=0\cdots\cdots(47),\quad \begin{Bmatrix}\theta_0,\\ \Theta_0\end{Bmatrix}_{x=0}=0\cdots\cdots(48)'\quad \begin{Bmatrix}\theta_0,\\ \Theta_0\end{Bmatrix}_{x=1}=0\cdots\cdots(49)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \theta_0=\Theta_0=\sum_{s=1}^{\infty}&\left[\frac{J_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}}{J_0\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}}-\frac{Y_0\left\{k_s\left(x+\frac{r_1}{r_2-r_1}\right)\right\}}{Y_0\left\{k_s\frac{r_1}{r_2-r_1}\right\}}\right]\cdot\\
&\sinh k_s\frac{L}{r_2-r_1}z \qquad \cdots\cdots(50)
\end{aligned}$$

同様な計算によって ${}_0\phi_0$ が求まる。次に (28) については

$$\nabla_0^2\nabla_0^2\phi_1=F_0(x,z) \qquad \cdots\cdots(28)$$

$$({}_0\phi_1)_{x=0}=0\cdots\cdots(51),\quad ({}_0\phi_1)_{x=1}=0\cdots\cdots(52),\quad ({}_0\phi_1)_{z=0}=0\cdots\cdots(53)$$

$$\left(\frac{\partial_0\phi_1}{\partial z}\right)_{z=0}=0\cdots\cdots(54)$$

において，Finite Hankel Transform と Laplace Transform によって次の解が求まる。

$$\begin{aligned}{}_0\phi_1=&\sum_{s=1}^{\infty}\frac{k_s\cdot J_0^2(k_s\frac{r_1}{r_2-r_1})}{J_0^2(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})-J_0^2(k_s\frac{r_1}{r_2-r_1})}\cdot\Big[J_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\cdot Y_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})\\&-J_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})\cdot Y_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\Big]\times\int_0^z\int_0^1(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\cdot\\&F_0(x,\eta)\Big[J_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\cdot Y_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})\\&-J_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})\cdot Y_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\Big]\cdot dx\cdot\Big(\frac{L}{r_2-r_1}\Big)^3\int_0^{(z-\eta)}\\&\cdot\zeta\cdot\sinh k_s\frac{L}{r_2-r_1}\zeta\cdot d\zeta\cdot d\eta\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(55)$$

以下同様な計算を繰返えせば流れ函数したがって速度分布が決定される。二重管の境界値問題に上述の Finite Hankel Transform を適用すれば境界条件が直ちに解の中に入って解の偶然性がなく必然的な解が極めて簡単に機械的に求まるので便利である。

(13)〜(16) 式についてはパラメータ μ を導入し，

$$t_0=\Theta_0+x\{f_1(z)-f_0(z)\}\cdot R_e+f_0(z)\cdot Re \qquad\cdots\cdots(56)$$

とおけば

$$\nabla_0^2\Theta_0=f_0(x\cdot z)+\mu\cdot[\cdots\cdots] \qquad\cdots\cdots(57)$$

$$\Theta_0=\theta_0+\mu\cdot\theta_1+\mu^2\cdot\theta_2+\cdots\cdots\quad, \qquad\cdots\cdots(58)$$

$$\therefore\quad \nabla_0^2\theta_0=f_0(x,\ z) \qquad\cdots\cdots(59)$$

$$(\theta_0)_{z=0}=0\cdots\cdots(60),\quad (\theta_0)_{x=0}=0\cdots\cdots(61),\quad (\theta_0)_{x=1}=0\cdots\cdots(62)$$

$$\nabla_0^2\theta_n=f_n(x,z) \qquad\cdots\cdots(63)$$

$$(\theta_n)_{z=0}=0\cdots\cdots(64),\quad (\theta_n)_{x=0}=0\cdots\cdots(65),\quad (\theta_n)_{x=1}=0\cdots\cdots(66)$$

一般の形 (63)〜(66) について考えれば，(64) を用いて Laplace Transform を，(65)〜(66) を用いて Finite Hankel Transform を適用して解けば次の解が求まるので以下同様にして t_0, t_1, t_2, …… が決定できる。したがってエネルギ式が解け温度分布が求まる。

$$\begin{aligned}\theta_n=&\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2k_sJ_0^2(k_s\frac{r_1}{r_2-r_1})}{J_0^2(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})-J_0^2(k_s\frac{r_1}{r_2-r_1})}\Big[J_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\cdot Y_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})\\&-J_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})\cdot Y_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\Big]\int_0^z\int_0^1(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\cdot f_n(x,\zeta)\cdot\\&\Big[J_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\cdot Y_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})-J_0(k_s\frac{r_2}{r_2-r_1})\cdot\\&Y_0\Big\{k_s(x+\frac{r_1}{r_2-r_1})\Big\}\Big]\cdot dx\cdot\frac{L}{r_2-r_1}\times\sinh k_s\frac{L}{r_2-r_1}(z-\zeta)\cdot d\zeta\end{aligned}\qquad\cdots\cdots(67)$$

以上により自由対流と層流とが共存するときの熱伝達は次の式から決定できる。

Nusselt 数 $Nu_1=2(r_2-r_1)\cdot\alpha_1/\lambda_1$

$$=-2\int_0^1\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0}\cdot dx\bigg/\int_0^1 f_0(z)\cdot dz \qquad \cdots\cdots(68)$$

3. 結　言

自由対流と層流とが共存する場合の理論を略述したが次のことがわかった。

理論解析の結果 G_r の代表的長さは (r_2-r_1), Nu, Re, σ_2 の代表的長さは $2(r_2-r_1)$ を用うべきことがわかり，また，自由対流を示す項は $G_r\cdot P_r\cdot 2(r_2-r_1)/L$ で，この理論は自由対流だけの特別な場合にも適用され，且つ任意に与えられた管壁温度分布 $f_0(z)$, 半径 r_2, r_1, 伝熱長さ L, σ_2, G_r, P_r のもとにそのつど，一般的に数値計算が（68）式からでき，更に管壁温度分布を多項式で与えた場合は数値計算が便利であることが，著者の水と空気に関する実験[2)]ならびに数値計算の結果からも証明された。(68) 式は純理論から導かれた厳密な計算式である。

文　献

1) Mechanical Engineering, June 1953, vol. 75, No. 6, p. 472, p. 473 fig. 3.
Mechanical Engineering, July 1956, vol. 78, No. 7, p. 611, p. 612.
日本機械学会誌，59巻 448号（昭和31年5月）414頁
Nucleonics, 1954, vol. 12, No. 8, p. 8～11.
Nucleonics, vol. 11, No. 6, June 1953, p. 32, p. 63,
Nucleonics, vol. 10, No. 1, January, 1952, p. 31.
B.W.K. Bd. 6, Nr. 9, Sept. 1954, p. 371.
Nuclear Science Abstracts, vol. 7. Sept.—Dec. 1953, p. 581.
原子力工業，vol. 2, No. 7, Jul. 1956（昭和31年7月号）p. 12, 15, 16, 19.
原子力工業，vol. 2, No. 9, Sep. 1956（昭和31年9月号）p. 14, 16, 18.
原子力工業，vol. 2, No. 10, Oct. 1956（昭和31年10月号）p. 12, 16.
Mech. Eng. Feb. 1957, vol. 79, No. 2, p. 187.
Proc, Inst, Mech, Engrs, 1956, vol. 170, No. 10, p. 323, fig. 4, fig. 6, fig. 10.
Proc. Inst. Mech. Engrs, 1956, vol. 170, No. 8, p. 283, fig, 3.
原子核工学（杉本朝雄訳）p. 178, p. 181.
Mech. Eng., May, 1957, vol. 78, No. 5.
J. Am. Inst.Chem. Engrs. I., 501, 1955.
工業物理学講座（杉本朝雄）25頁，第16図，第17図.
原子核物理学（上巻）菊池正士　101頁.
Mech. Eng. Jan. 1957, vol. 79, No. 1, p. 96.
Oak Ridge National Laboratory Report, No. 521, 1950.
The Review of Scientific Instruments, vol. 28, No. 5, May, 1957, p. 376, fig. 2, fig. 3.
日本機械学会誌，60巻 462号（昭和32年7月号）746頁　第1図，第2図.
Mech. Eng. Dec. 1956, vol. 78, No. 12, p. 1139, Calaer Hall Reactor.
Mech. Eng. June, 1957, p. 564.
Engineering, vol. 183, No. 4759, May, 24, 1956, p. 666. fig. 7.
The Chartered Mech, Engr. June 1957, vol. 4, No. 6, p. 291.

Selected Articles on Nuclear Power reprinted from the Westinghouse Engineer.
(Reprint 5240) Westinghouse Testing Reactor p. 40, p. 41, fig. 4.
I.E.C., July, 1957, vol. 49, No. 7. p. 1144.
電力技術研究所, 所報, vol. 7, No. 1, p. 67.
東芝レビュー, July, 1957, 原子力特集, 756頁, 図4.

2) 村川勝彌, 日本機械学会論文集, 21巻 112号 895～901頁.
村川勝彌, 日本機械学会論文集, 19巻 88号 18頁.
村川勝彌, 日本機械学会論文集, 18巻 67号 43頁.
村川勝彌, 日本機械学会論文集, 20巻 92号 262頁.