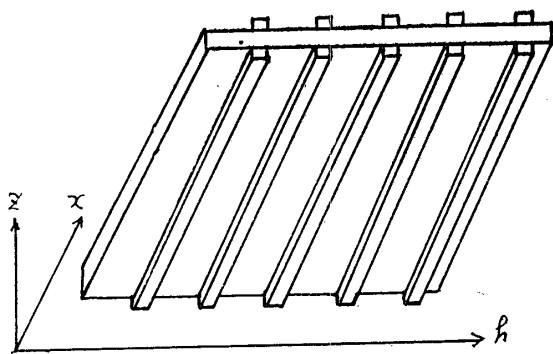


# 直交防撓く形板のたわみについて

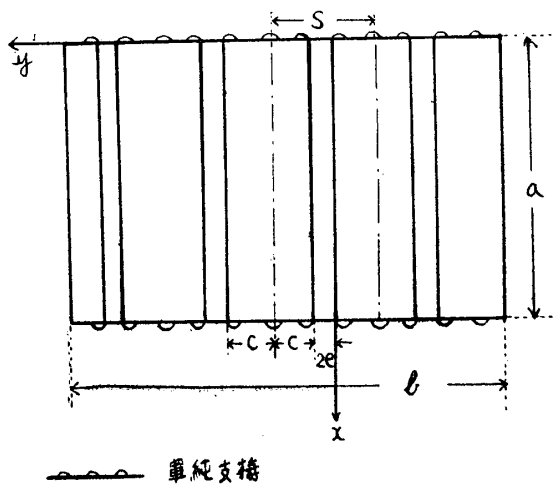
野村 恭雄

## 1. 緒言

直交防撓板の曲げ及び座屈の解析は、板と防撓材の結合体を厚さ一定の一様な直交異方性板をもって置換えることによって、簡単に取り扱える。このためには、その等価の直交異方性板の4個の剛性係数を決定して、その基礎方程式を解けばよいのであって、この方法として



第1図 防撓材の位置



第2図 防撓板

M. T. Huber<sup>1)</sup> が近似的にこれら諸剛性を求めて、大方の研究者はこれに従っている。ところが最近 N. J. Huffington<sup>2)</sup> によって、これら諸剛性の理論的決定法が明かにされているので筆者はこの Huffington の方法によって直交異方性板の撓みを計算してみる。

## 2. 基礎方程式

直交異方性板の大なるたわみの基礎方程式は

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_1 + 2D_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(1)$$

ここで

- $D_x, D_y, D_{xy}, D_1$  : 直交異方性板の剛性係数
- $w$  : 板の  $z$  方向のたわみ
- $p(x, y)$  : 荷重
- $\Phi$  : 応力関数

また適合条件式としては

$$C_1 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + C_3 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + C_2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \dots\dots\dots(2)$$

ここで

$$C_1 \equiv \frac{1}{\alpha_y(1-\nu_x\nu_y)}, \quad C_2 \equiv \frac{1}{\alpha_x(1-\nu_x\nu_y)}, \quad C_3 \equiv \frac{1}{\beta} - \frac{\nu_y\alpha_x + \nu_x\alpha_y}{\alpha_x\alpha_y(1-\nu_x\nu_y)}$$

$\alpha_x, \alpha_y$  : 板の中性面の  $x, y$  方向の引張剛性

$\beta$  :  $x, y$  間の剪断剛性

$\nu_x, \nu_y$  : ポアソン比

緒言でのべたように、直交防撓矩形板は等方性板と防撓材との結合体であるから、これら等方性板および防撓材の弾性係数その他の記号については、下のようにおくものとする。

等方性板：—

$$D \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} : \text{板の剛性}$$

$E$  : 板のヤング率

$\nu$  : 板のポアソン比

$G$  : 板の剪断弾性係数

$h$  : 板の厚さ

$a$  : 板の  $x$  方向の巾

$b$  : 板の  $y$  方向の巾

防撓材：—

$I$  : 防撓材の断面二次モーメント

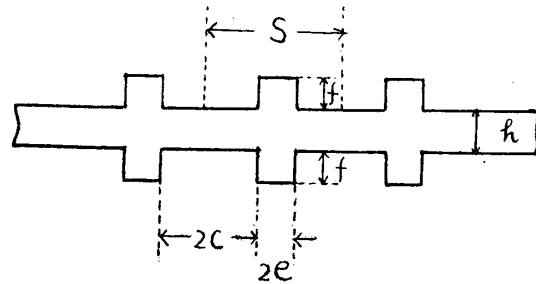
$c$  :  $y$  方向の防撓材の間隔の  $\frac{1}{2}$

$e$  : 防撓材の巾の  $\frac{1}{2}$

$f$  : 防撓材の高さ

$w_b$  : 防撓材のたわみ

$$S = 2(e+e)$$



第3図 防撓材

### 3. 諸剛性の関係

前述の Huffington によれば、上の記号によって直交防撓板と等価直交異方性板の諸剛性の間の関係は次のようになる。

(i)  $D_x$

第1図、第2図のように等価直交異方性板の対称軸の一つを実際の防撓板の防撓材の方向に一致せしめ、 $x$  座標を防撓材に平行にすると、防撓材方向において曲げに関連した直交方向の曲げ係数は  $D_x$  で表わされる。すなわち

$$D_x = \frac{\pi^4 SD}{960 \sum_{m=1,3,5}^{\infty} Q_m} \dots\dots\dots (3)$$

ここで

$$Q_m = \frac{1}{m^4} \left[ \left( \frac{2e - \frac{EI}{D}}{\frac{EI}{D} m\pi + 4a\kappa_m \sinh \alpha_m} \right)^2 \left\{ \frac{EI}{D} + 4c\kappa_m^2 \left( 1 + \frac{\sinh \alpha_m \cosh \alpha_m}{\alpha_m} \right) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{m\pi} \left( \frac{2c - \frac{EI}{D}}{\frac{EI}{D}m\pi + 4a\kappa_m \sinh \alpha_m} \right) \left\{ \frac{2C\kappa_m}{\alpha_m} [(1-\nu)(1 + \alpha_m - \cosh \alpha_m)] \right. \\
 & \left. + (1 + \nu) \sinh \alpha_m + \frac{EI}{D} \right\} + \frac{1}{m^2\pi^2} \left( 2c - \frac{EI}{D} \right) \Big]
 \end{aligned}$$

すなわち  $D_x$  は  $a$  に関連し、 $a$  の増大と共に  $D_x$  は急速に極限值に近づく。 $a$  が防撓材の間隔に比べて非常に大きい場合には  $a \rightarrow \infty$  として

$$D_x = \frac{2cD + EI}{S} \dots\dots\dots(3)'$$

ここで

$I$  : 2本の防撓材とその間の板の部分との合計の断面二次モーメントであって

$$I = I_s + \frac{2eD}{E}$$

$I_s$  : 2本の防撓材の断面二次モーメント

したがって

$$D_x = D + \frac{EI_s}{S} \dots\dots\dots(3)''$$

(ii)  $D_y$

$D_x$  を求めた場合と全く同様に

$$D_y = \frac{b^5}{30 \int_0^b \frac{(by - y^2)^2}{D(y)} dy} \dots\dots\dots(4)$$

となり、 $D(y)$  は  $y$  のみの関数であって、この防撓材のモーメント  $M_y$  と曲率との関係式

$$M_y = -D(y) \frac{d^2w}{dy^2} = \frac{P_0}{2} (by - y^2) \dots\dots\dots(5)$$

から求められ、 $y$  方向の剛性を無視すると

$$D(y) = D \dots\dots\dots(5)'$$

となって、これより小さくなることはない。また上限としては

$$D(y) = \frac{E|h(y)|^3}{12(1-\nu^2)} \dots\dots\dots(5)''$$

であって、 $h(y)$  は板と防撓材の結合体の合計の厚さである。

(iii)  $D_{xy}$

$D_{xy}$  は板のせん断歪に対する抵抗として出てくるものであって

$$D_{xy} = \frac{K_a' \cdot G}{4S} \dots\dots\dots(6)$$

ただし  $K_a'$  は実際の防撓板の断面形状に関する係数であって、近似的に<sup>3)</sup> この場合は

$$K_a' = \frac{h^3 S^2}{12C}$$

となる。

(iv)  $D_1$

$D_1$  は  $D_x$  を求めたときと同じく曲げを考えて

$$D_1 = D_x \left[ \nu - \frac{32(2e - \frac{EI}{D})}{\pi^3(c+e)} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m^2 \left( \frac{EI}{D} \frac{m\pi}{a} + 4\kappa_m \sinh \alpha_m \right)} \left\{ (1-\nu) \right. \right. \\ \left. \left. (1-\kappa_m \cosh \alpha_m) \sinh \alpha_m - (1+\nu)\kappa_m \sinh \alpha_m + \kappa_m(1-\cosh \alpha_m) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e\alpha_m}{c}(1-\nu-2\kappa_m \cosh \alpha_m) \right\} \right] \dots\dots\dots(7)$$

ここで  $a \rightarrow \infty$  とすると

$$D_1 = \nu D \dots\dots\dots(7)'$$

となり、これから等価異方性板の二つのポアソン比は次の関係から得られる。すなわち

$$\nu_{xy} = \frac{D_1}{D_y}, \quad \nu_{yx} = \frac{D_1}{D_x} \dots\dots\dots(7)''$$

**4. Huffington の結果と Hubber の結果との比較**

上述のように理論的に求めた Huffington の結果と、今まで多く用いられてきた Hubber の近似的の結果とを実際の数値にあてはめて、比較してみる。第2図、第3図の如く厚さ  $h$  なる平板を  $x$  方向の材料と同じ補強材によって  $S$  なるピッチで補強した矩形板の一部であるとする。この場合  $S$  は、考えている矩形板の巾  $b$  に対して十分に小さいとして単簡に  $a \rightarrow \infty$  として計算する。

そうすると Hubber によると

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{Eef^3h^3}{48S(1-\nu^2)}, & D_y &= \frac{Eh^3 \cdot S}{24(1-\nu^2)c} \\ D_1 &= \frac{Gh^3 \cdot S}{48c}, & D_{xy} &= \frac{Eh^3(1+\nu)}{48c(1-\nu^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

となり  $f=10h=1.0$ ,  $e = \frac{2}{5}S=4.0$ ,  $S=10$ ,  $\nu=0.30$  として計算すると<sup>4)</sup>

$$\left. \begin{aligned} D_x &= 1.456 \times 10^3 D, & D_y &= 1.250 D, \\ D_1 &= 0.219 D, & D_{xy} &= 0.375 D \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)'$$

ただし  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

となる。

これを全く同様な場合を Huffington の方法から求めると

$$\left. \begin{aligned} D_x &= 0.365 \times 10^3 D, & D_y &= 1.000 D, \\ D_1 &= 0.228 D, & D_{xy} &= 0.300 D \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

となる。

これで見ると  $D_y, D_1, D_{xy}$  は近似的には等しいとおけても  $D_x$  はその値が約  $\frac{1}{3}$  程となる。

**5. 計 算 例**

i. Huffington の考え方にしたがって第1, 2図の如き直交異方性板の無限長ストリップを考え、 $x=0, x=a$  で単純支持され、 $P_0$  なる等分布荷重をうけている場合を考えると、(1)式のたわみ  $w$  は次式で支えられる。

$$w = \frac{P_0}{24D_x} (x^4 - 2ax^3 + a^3x) \dots\dots\dots(10)$$

また一方防撓板においては

$$D\Delta^4 w = P_0 \dots\dots\dots(11)$$

を満足し，防撓材は

$$EI \frac{d^4 w_b}{dx^4} = 2eP_0 + 2V_y|_{y=0} \dots\dots\dots(12)$$

ただし

$$V_y = -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} y=0 \text{ において} \\ w = w_b, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ y=c \text{ において} \\ \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad V_y = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

これをとくと

$$w = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left( A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{4P_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad 0 \leq y \leq c \dots\dots\dots(14)$$

$$w_b = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left( A_m + \frac{4P_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \dots\dots\dots(15)$$

ここで

$$A_m = \frac{4P_0 a^3 \left( 2e - \frac{EI}{D} \right)}{EI \frac{m\pi}{a} + 4D\kappa_m \sinh \alpha_m}, \quad \alpha_m = \frac{m\pi c}{a}$$

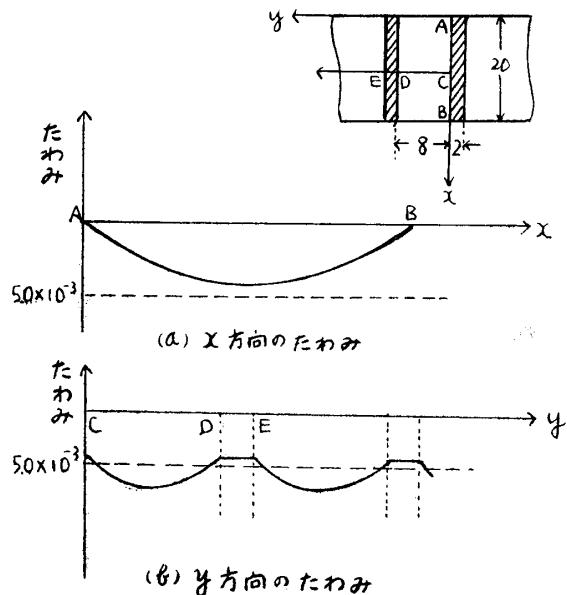
$$B_m = -C_m = -\kappa_m A_m \sinh \alpha_m$$

$$\kappa_m = \frac{1}{\cosh \alpha_m + \alpha_m \operatorname{csch} \alpha_m}$$

$$D_m = -\kappa_m A_m \cosh \alpha_m$$

となる。これを図示したのが第4図であり，(a)はx軸に沿ってのたわみ，(b)はx=10すなわち中央におけるy軸にそってのたわみである。ここで面白いのは防撓材間のたわみと板全体のたわみのうち，荷重が大きくなった場合，何れの方が先に座屈するかということである。このことについては，前掲引用の林博士の論文があるので，これにHuffingtonの結果を入れて検討してみよう。

ii. 四辺単純支持でx方向に $N_1$  kg/cmの圧縮力をうける $a \times b$ の矩形板



第4図 防撓板ストリップのたわみ

(第5図)

このときの解は

$$w = f \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} \dots\dots(16)$$

で表わされ、応力関数  $\Phi$  は

$$\begin{aligned} \Phi = & -\frac{f^2}{32} \left( \frac{a^2}{c_1 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \right. \\ & \left. + \frac{b^2}{c_2 a^2} \cos \frac{\pi y}{b} \right) - \frac{N_1}{2} y^2 \end{aligned} \dots\dots(17)$$

この応力関数に対しては

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{\pi^3 f^2}{8c_2 a^2} \cos \frac{2\pi y}{b} - N_1 \\ N_y &= \frac{\pi^2 f^3}{8c_1 b^2} \cos \frac{2\pi x}{a} \\ N_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

となる。これを(1)式に代入すると、解は完全に満足されずに誤差  $\delta$  が生ずるので Galerkin<sup>5)</sup>の方法によって

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \delta \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \dots\dots(19)$$

のように  $f$  を決定するとたわみは(16)式のように簡単に仮定したときの  $f$  の最良値が得られる。これから

$$\begin{aligned} \frac{f^3}{c_2} \left\{ \frac{c_2}{c_1} + \left( \frac{b}{a} \right)^4 \right\} - 16f \left[ N_1 \frac{b^4}{a^2 \pi^2} - \left\{ D_x \left( \frac{b}{a} \right)^4 + 2(D_1 + 2D_{xy}) \left( \frac{b}{a} \right)^2 + D_y \right\} \right] \\ = \frac{256}{\pi^6} P b^4 \end{aligned} \dots\dots(20)$$

また境界条件から

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= c_2 N_1 + \frac{\pi^2 f^2}{8a^2} \\ \varepsilon_2 &= \nu_x c_2 N_1 + \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

となる。

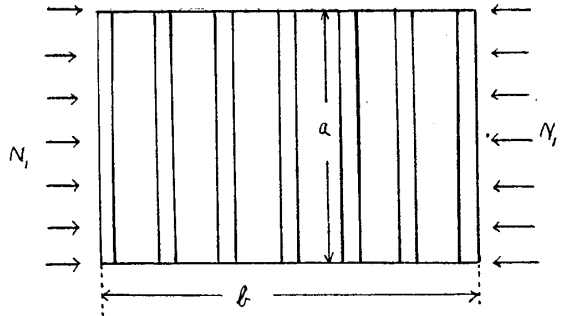
今座屈荷重を考えているのであるから (21) を (20) に代入して

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2\pi^5} N_1 \left\{ \frac{c_2}{c_1} + 3 \left( \frac{b}{a} \right)^4 \right\} \\ = D_x \left( \frac{b}{a} \right)^4 + 2(D_1 + 2D_{xy}) \left( \frac{b}{a} \right)^2 + D_y + \varepsilon_1 \frac{a^2}{2\pi^2} \left\{ \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \left( \frac{b}{a} \right)^4 \right\} \end{aligned} \dots\dots(22)$$

となるから、この  $\varepsilon_1$  中の  $f=0$  において

$$N_1 = \frac{\pi^2}{b^2} \left\{ D_x \left( \frac{b}{a} \right)^2 + 2(D_1 + 2D_{xy}) + D_y \left( \frac{a}{b} \right)^2 \right\} \dots\dots(23)$$

となって座屈荷重  $N_1$  が得られる。そこで  $b$  を一定にして、 $N_1$  を極少とするときの  $\frac{a}{b}$  を求めて  $i$  のときの数値をそのまま代入してみると



第5図 x方向のみ圧縮力  $N_1$  kg/cm をうける防撓く形板

$$\frac{a}{b} = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} = 4.37 \quad \dots\dots\dots(24)$$

となつて、このときの座屈荷重  $N_1^*$  は

$$N_1^* = \frac{2\pi^2}{b^2} (\sqrt{D_x D_y} + D_1 + 2D_{xy}) \quad \dots\dots\dots(25)$$

座屈歪  $\varepsilon_1^*$  は

$$\varepsilon_1^* = \frac{N_1^*}{\alpha_x(1-\nu_x\nu_y)} = \frac{N_1^*}{\alpha_x} = \frac{2\pi^2}{\alpha_x b^2} (\sqrt{D_x D_y} + D_1 + 2D_{xy}) = 7.38 \frac{h^2}{b^2} \quad \dots\dots(26)$$

次に防撓材間の平板部分は、その  $x$  方向の二辺を固定とみなして、その座屈荷重  $N_{1板}^*$ 、座屈歪  $\varepsilon_{1板}^*$  は

$$N_{1板}^* = 7 \frac{\pi^2 D}{(s-2e)^2} = 7 \frac{\pi^2 D}{(s-2e)^2} \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$\varepsilon_{1板}^* = \frac{N_{1板}^*}{\alpha(1-\nu^2)} = \frac{7\pi^2 D}{(s-2e)^2} \frac{1}{\alpha(1-\nu^2)} = 2.46 \frac{h^2}{s^2} \quad \dots\dots\dots(28)$$

したがつて

$$\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_{1板}^*} = 3.00 \frac{s^2}{b^2} \quad \dots\dots\dots(29)$$

となり、 $s$  が  $b$  に対して十分に小さいとき、例えば  $b=5s$  のときでも

$$\varepsilon_1^* = 0.12\varepsilon_{1板}^*$$

となつて、座屈比が  $\frac{s^2}{b^2}$  に比例することとなり、このように防撓板は異方性板とし向座屈することがわかるのである。

これが Hubber の値による林博士の計算の結果によると

$$\frac{a}{b} = \sqrt[4]{\frac{D_x}{D_y}} = 5.84$$

$$\varepsilon_1^* = 16.11 \frac{h^2}{b^2}$$

$$\varepsilon_{1板}^* = 9.88 \frac{h^2}{s^2}$$

$$\frac{\varepsilon_1^*}{\varepsilon_{1板}^*} = 1.63 \frac{s^2}{b^2}$$

となる。しかし傾向としては同じであり、結論としては上と同じことがそのままいえるわけである。

## 6. 結 語

以上 Huffington の理論的決定法による諸剛性の値を、Hubber の近似的決定値と比較して、今迄の二、三の論文を引用して、その結果をのべた。大体の値は同じで、したがつて、その結果は同じことがいえるにしても、数値的には多少の差異がはっきりと出ている。この何れが正しいかは実験にまつ外はないわけである。

## 参 考 文 献

- 1) M. T. Hubber: Die Theorie der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendungen auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben über rechteckige Platten. Der Bauingenieur (1923) S. 354.

- 2) N. J. Huffington: Theoretical Determination of Rigidity Properties of Orthogonally Stiffened Plates Blacksburg, VA.
- 3) 理論的に求めれば

$$D_{xy} = \frac{D_{xy} \cdot h_e^3}{12}, \quad h_e = \text{等価直交異方性板の厚さ}$$

ここで  $G_{xy}$  は実際の防撓材と等価異方性板のねじれ剛性を比較して決定することが出来、Saint Venant の捩れの問題を考えると、ねじれ軸を  $x$  軸にとって

$$\frac{1}{G_{xy}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{G_{xz}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2\theta$$

$\varphi = \text{応力関数}, \quad \theta = x \text{ 方向の単位長さの捩れ角}$

この式をとくと、ねじれモーメント  $M_t$  と  $\theta$  との間の式が求められ

$$M_t = K_e G_{xy} \theta$$

ここで

$$K_e = \frac{256bh_e^3}{\pi^6} \sum_{l=1,3,5}^{\infty} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{l^2 m^2 \left[ \left( \frac{b}{h_e} \right)^2 \left( \frac{G_{xz}}{G_{xy}} \right)^2 + m^2 \right]}$$

この  $K_e$  は  $\frac{b}{h_e}$  が大きくなると  $G_{xz}$  の値に無関係になることがわかる。またこの場合  $G_{xz}$  は殆ど  $G_{xy}$  に等しくなることもわかる。

歪エネルギー理論を適用すると

$$G_{xy} = \frac{K_a}{K_e} G$$

$K_a = \text{実際の防撓板の断面形状に関連する係数}$

$K_a$  を求めるには Saint Venant の理論を用いて求めるのであるが、今ここで問題としているような不規則な断面の場合には厳密解は求めることが困難である。しかし Prandtl の膜の理論とか遅緩法で計算すれば満足すべき近似値が得られる。このため  $K_a$  を直接求めず、繰返し断面の一つのための  $K_a$  を  $K_a'$  とすると  $K_e$  は殆ど  $K_a' n$  に等しいから  $K_a'$  を求めることにする。(n は繰返えしの数) 同様のことが  $K_e$  についても云える。すなわち

$$K_e' = \frac{K_a}{h} = \frac{1}{3} s h_e^3$$

したがって

$$D_{xy} = \frac{K_a' G}{4s}$$

となって  $D_{xy}$  は  $h_e$  に関係ないことになる。

- 4) 林毅: 直交異方性板の撓み方程式とく形板の圧縮座屈後の有効率, 航空学会誌, 第9巻83号(昭和17年3月) p. 255
- 5) W. J. Duncan: Galerkins Method in Mechanics and Differential Equation R. & M. No. 1798 1937/8/3.