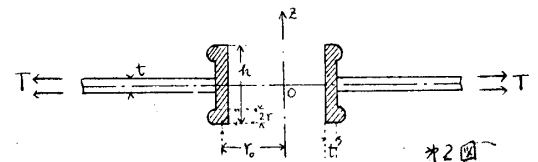
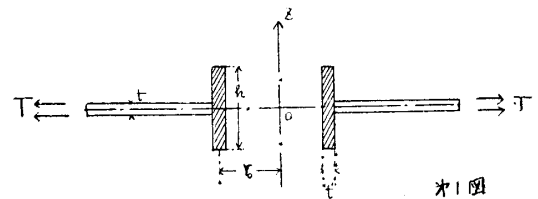
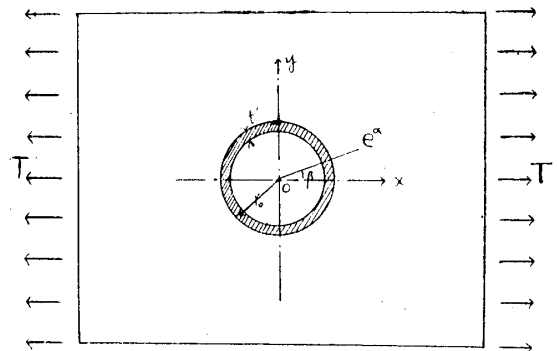


円孔を有する直交異方性板における孔縁材の有効高さについて

野村 恭雄

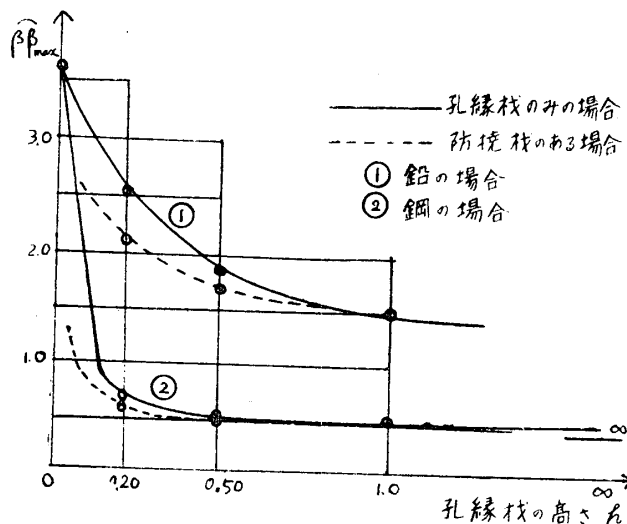
1. 緒言

円孔を有する直交異方性板の孔縁を補強するために、その円孔に十字棒をあてたり¹⁾、孔縁材をあてたり²⁾ またその孔縁材に防撓材をつけたり³⁾ あるいはまた二重強化節をあてたり⁴⁾ している。そのうち孔縁材をあてる場合には、その高さが高い程周辺応力は軽減されて孔縁の補強に役立つのであるが、その孔縁材の効果を更に一層上げるため、孔縁材の両端に防撓材をつけるときには、孔縁材の高さが余りに高いと、その防撓材の効果は全くなくなり、防撓材はあってもなくても同じ結果となり、防撓材はなるべく低い所につけなければならないことになる。(第3図参照) このことは孔縁材のみの場合でも、孔縁材の高さを次第に増してゆくと、周辺応力 $\beta\beta_{max}$ はそれに伴って次第に減少してゆくが、孔縁材の高さがある値に達すると、 $\beta\beta_{max}$ の減り方は急に僅かとなり、それ以後はいくら高さを増しても、 $\beta\beta_{max}$ の値は殆んど減



第1図 孔縁材のある場合

第2図 孔縁材に防撓材のついている場合



第3図 孔縁材の高さと最大周辺応力の軽減の有様

らなくなる。(同様に第3図参照) すなわち、このときの高さ以上に、孔縁材を高くしても孔縁材の効きは高くした程には効果のないわけであり、この高さをいわゆる有効高さと呼んでいるわけである。

しかしこれでは図からもわかるように、大体の値はわかって、どのようにもその値はとれるわけで、種々の寸法の孔縁材に対してまちまちになる。そこで等方性板において、太田博士の提唱された定義⁵⁾ をそのまま直交異方性板についても、その定義を拡張して

考えてみる。

上にのべたことからわかるように、今度はそれと殆んど変わらないところの無限大の高さをもつ孔縁材の有効高さをもって、有効限界高さおよびよぶことにしている。しかし問題は、このように実際的に論ずるこの有効高さということの前に、孔縁材の有効断面—断面の高さ、厚さの何れを増しても周辺応力は軽減され、今ここで有効高さといっているのは、その厚さを一定とみなした上でのことである—について考えなくてはならないのであって、そのいみから、孔縁材の厚さを無限板の板厚に等しくしておいて、有効高さを考えてみることにする。

2. 有効断面と有効高さ

今円孔板の孔縁材をある断面でもつ円環でおきかえた場合に、板の応力分布が前と変わらないれば、この様な円環の断面をもつ孔縁材の有効断面とよぶことにする。すなわち $(\widehat{rr})_c, (\widehat{r\beta})_c$ を孔縁材を薄肉円筒と考えたところの実際の場合の板と孔縁材のつけ根における応力とし、 $(\widehat{rr})_r, (\widehat{r\beta})_r$ を孔縁材をある断面—これが求めんとする断面—をもつ円環と考えた場合のつけ根における応力とすると

$$(\widehat{rr})_r = (\widehat{rr})_c \dots\dots\dots(1)$$

$$(\widehat{r\beta})_r = (\widehat{r\beta})_c \dots\dots\dots(2)$$

となるような円環の断面を考慮せる孔縁材の有効断面と定義している。

しかしこの定義は、理想的なもので、無限遠において引張りとか屈曲とかをうける場合には必ずしも適用できないわけで、このときは(2)式は不用で、剪断をうけるときには(1)、(2)両式が適用され、したがって有効断面の高さを h_e とし、厚さを t_e とすると、その積 $h_e t_e$ が変わらなければ任意にとって差支えないことになる。そこで緒言のところの一寸のべたように、今厚さ t_e を常に板厚に等しくとって一定にしておく、それに対する高さがでてくるわけで、これが先にのべた有効高さということになるわけである。

そこで今孔縁材を(1)薄肉円筒とした場合、(2)円環と仮定した場合について考えてみることにする。その前に無限板について、円孔縁における応力および変位を求めておく。

3. 板

直交異方性板は無限板とし、一般化した平面応力のもとにあるものとし、その平均応力は Airy の関数 χ から次式を満足するものとし、佐藤氏の超複素関数を用いる。すなわち

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^4} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial^4 \chi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \chi}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ただし

$$\lambda_1^2 \lambda_2^2 \equiv \frac{E_x}{E_y}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \equiv \frac{E_x}{G_{xy}} - 2\nu_x$$

ここで E_x, E_y : 板の x, y 方向のヤング率

G_{xy} : 板の剛性率

ν_x : 板のポアソン比

この一般解:

$$\chi(x, y) = \frac{-1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} R \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} F_1(z_1) - \frac{1}{\lambda_2^2} F_2(z_2) \right\} \dots\dots\dots(4)$$

ただし $z_j = x + i\lambda_j y \quad (j=1, 2)$

R : 実数部分 (後にでてくる I_m は虚数部分である)

応力函数:

$$F_j'(z_j) = A_j^{(0)} z_j + B_j + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} A_j^{(2n-1)} \zeta_j^{2n-1}}{\zeta_j^{2n-1}} \dots\dots\dots (5)$$

ただし $A_j^{(0)}$: 実常数, $B_j, A_j^{(2n-1)}$: 虚常数
 $\zeta_j = e^{\alpha_j + i\beta_j}$

そこで

$$z_j = x + i\lambda_j y = \frac{1}{2} \left\{ (1 + \lambda_j) \zeta_j + (1 - \lambda_j) \zeta_j^{-1} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

なる座標の二重変換を行うと $\alpha_j = 0, \beta_j = \beta$ で単位円を表わす。故に今問題の円孔を $\alpha_j = 0$ にとるものとする。

そうすると応力および変位は

$$\left. \begin{aligned} \widehat{xx} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} R \left\{ F_1''(z_1) - F_2''(z_2) \right\} \\ \widehat{yy} &= \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = \frac{-1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} R \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} F_1''(z_1) - \frac{1}{\lambda_2^2} F_2''(z_2) \right\} \\ \widehat{xy} &= -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} I_m \left\{ \frac{1}{\lambda_1} F_1''(z_1) - \frac{1}{\lambda_2} F_2''(z_2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x u_x &= \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} R \left\{ \frac{\lambda_1^2 + \nu_x}{\lambda_1^2} F_1'(z_1) - \frac{\lambda_2^2 + \nu_x}{\lambda_2^2} F_2'(z_2) \right\} \\ E_x u_y &= \frac{-1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} I_m \left\{ \frac{\lambda_2^2 + \nu_x}{\lambda_1} F_1'(z_1) - \frac{\lambda_1^2 + \nu_x}{\lambda_2} F_2'(z_2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

これを r, β 方向の応力および変位にかきかえると

$$\left. \begin{aligned} 2r\widehat{rr} &= \widehat{xx}(1 + \cos 2\beta) + \widehat{yy}(1 - \cos 2\beta) + 2x\widehat{xy} \sin 2\beta \\ 2\beta\widehat{\beta\beta} &= \widehat{xx}(1 - \cos 2\beta) + \widehat{yy}(1 + \cos 2\beta) - 2x\widehat{xy} \sin 2\beta \\ 2r\widehat{r\beta} &= (\widehat{yy} - \widehat{xx}) \sin 2\beta + 2x\widehat{xy} \cos 2\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= u_x \cos \beta + u_y \sin \beta \\ v &= -u_x \sin \beta + u_y \cos \beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

そこで板と孔縁材とのつけ根における応力を

$$\left. \begin{aligned} r\widehat{rr} &= P_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} \cos 2n\beta \\ r\widehat{r\beta} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n} \sin 2n\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

と簡単に仮定し、そのために増えた未知常数は板の孔縁における x, y 方向の合力 X, Y を求めることによって解決する。すなわち

$$\left. \begin{aligned} X &= \int (r\widehat{rr} \cos \beta d\beta - r\widehat{r\beta} \sin \beta d\beta) = \frac{\partial \chi}{\partial y} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \\ &\quad \times I_m \left\{ \frac{1}{\lambda_1} F_1'(z_1) - \frac{1}{\lambda_2} F_2'(z_2) \right\} \\ Y &= \int (r\widehat{r\beta} \sin \beta d\beta + r\widehat{rr} \cos \beta d\beta) = \frac{-\partial \chi}{\partial x} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \\ &\quad \times R \left\{ \frac{1}{\lambda_1^2} F_1'(z_1) - \frac{1}{\lambda_2^2} F_2'(z_2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

ここで無限遠に一樣な引張り T が働くものとする

$$A_1^{(0)} = \lambda_1^2 T, \quad A_2^{(0)} = \lambda_2^2 T \quad \dots\dots\dots(13)$$

こうして結局、板と孔縁材のつけ根における周辺応力 $\beta\beta$ および変位 u, v は

$$\begin{aligned} \beta\beta = & T - \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \left[(\lambda_1^2 - 1) \{ T - P_0(1 - \lambda_2) - (P_2 - S_2)(1 + \lambda_2) \} \right. \\ & \left. - \frac{\delta_1}{\Delta_1} - (\lambda_2^2 - 1) \{ T - P_0(1 - \lambda_1) - (P_2 - S_2)(1 + \lambda_1) \} \frac{\delta_2}{\Delta_2} \right. \\ & \left. - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda_1^2 - 1)}{\Delta_1} \{ (1 - \lambda_2)(P_{2n-2} + S_{2n-2}) + (1 + \lambda_2)(P_{2n} - S_{2n}) \} \right. \\ & \left. \{ \cos 2(n-1)\beta \cdot \delta_1 - \sin 2(n-1)\beta \cdot \varepsilon_1 \} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda_2^2 - 1)}{\Delta_2} \right. \\ & \left. \{ (1 - \lambda_1)(P_{2n-2} + S_{2n-2}) + (1 + \lambda_1)(P_{2n} - S_{2n}) \} \{ \cos 2(n-1)\beta \cdot \delta_2 \right. \\ & \left. - \sin 2(n-1)\beta \cdot \varepsilon_2 \} - \left\{ P_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} \cos 2n\beta \right\} \right] \quad \dots(14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u = & \frac{1}{2E_x} \left[\xi_1 T - \xi_2 P_0 - \xi_3 (P_2 - S_2) + \{ \bar{\xi}_1 T - \bar{\xi}_3 P_0 + \bar{\xi}_2 (P_2 - S_2) \} \cos 2\beta \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\{ -\xi_2 (P_{2n-2} + S_{2n-2}) + \xi_3 (P_{2n} - S_{2n}) \} \cos 2(n-1)\beta \right. \right. \\ & \left. \left. - \{ \xi_3 (P_{2n-2} + S_{2n-2}) - \bar{\xi}_2 (P_{2n} - S_{2n}) \} \cos 2n\beta \right) \right] \quad \dots(15) \\ v = & \frac{-1}{2E_x} \left[\{ \bar{\xi}_1 T - \bar{\xi}_3 P_0 + \bar{\xi}_2 (P_2 - S_2) \} \sin 2\beta + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \right. \\ & \left. \{ \xi_2 (P_{2n-2} + S_{2n-2}) + \xi_3 (P_{2n} - S_{2n}) \} \sin 2(n-1)\beta \right. \\ & \left. + \{ -\xi_3 (P_{2n-2} + S_{2n-2}) + \bar{\xi}_2 (P_{2n} - S_{2n}) \} \sin 2n\beta \right] \end{aligned}$$

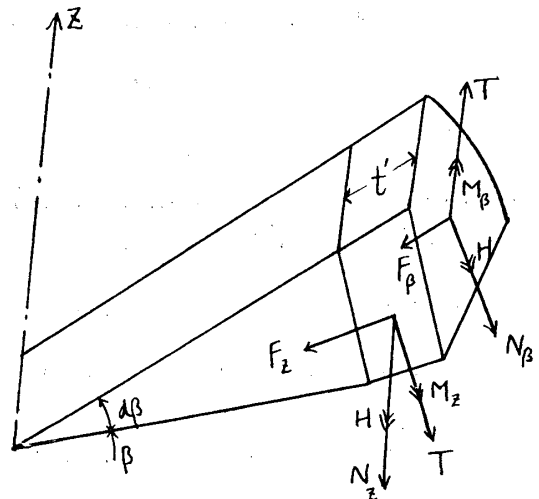
- ただし $\Delta_j = (\lambda_j^2 + 1) - (\lambda_j^2 - 1) \cos 2\beta$
 $\delta_j = (\lambda_j - 1) + (\lambda_j + 1) \cos 2\beta, \quad \varepsilon_j = (\lambda_j + 1) \sin 2\beta$
 $\xi_1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2, \quad \bar{\xi}_1 = 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_2$
 $\xi_2 = 2\nu_x - 2\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)(1 + \lambda_1 \lambda_2)$
 $\bar{\xi}_2 = 2\nu_x - 2\lambda_1 \lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(1 + \lambda_1 \lambda_2)$
 $\xi_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(1 - \lambda_1 \lambda_2)$

4. 孔縁材を薄肉円筒と考えた場合

孔縁材の厚さは孔の太さ(すなわち円筒の直径)に比べて小さいものと仮定し、円筒軸の中央に座標点を取り、 z 軸を軸方向にとって筒壁上の点を円筒座標で表わすと、次の力の方程式が成り立つ。(第4図)

ただし N_z : 円筒の軸に直角な断面に働く単位長さについての垂角力

F_z : 円筒の軸に直角な断面において、



第4図 孔縁材を薄肉円筒と考えたとき

半径方向に働く単位長さについてのせん断力

M_z : 円筒の軸に直角な断面において、半径方向に働く単位長さについての屈曲モーメント

T : 円筒の軸に直角な断面において、円周方向に働く単位長さについてのせん断力

H : 円筒の軸に直角な断面において、円周方向に働く単位長さについてのねじりモーメント

N_β : 円筒の軸を含む面で切った断面に働く単位長さについての垂直力

F_β : 円筒の軸を含む面で切った断面において半径方向に働く単位長さについてのせん断力

r_0 : 薄肉円筒の平均半径

とにおいて薄肉円筒であるから r については無関係として、問題を二次元的に考えると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial T}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial N_z}{\partial \beta} + \frac{F_\beta}{r_0} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} - \frac{N_\beta}{r_0} &= 0 \\ \frac{\partial M_z}{\partial z} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial H}{\partial \beta} - F_z &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} + F_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

これらの力の方向は図の矢印で示す通りとする

また円筒壁上の点の変位の r, β, z 方向の成分を u_c, v_c, w_c とおくと、変位と力の間には

$$\left. \begin{aligned} N_z &= \frac{Et'}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial w_c}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r_0} \frac{\partial v_c}{\partial \beta} + \frac{u_c}{r_0} \right) \right\} \\ N_\beta &= \frac{Et'}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_c}{\partial \beta} + \frac{u_c}{r_0} + \nu \frac{\partial w_c}{\partial z} \right\} \\ T &= \frac{Et'}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial v_c}{\partial z} + \frac{1}{r_0} \frac{\partial w_c}{\partial \beta} \right\} \\ M_z &= -\frac{Et'^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 u_c}{\partial \beta^2} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial u_c}{\partial \beta} \right) \right\} \\ M_\beta &= -\frac{Et'^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_c}{\partial \beta^2} - \frac{\partial v_c}{\partial \beta} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} \right\} \\ H &= \frac{Et'^3}{12(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 u_c}{\partial \beta \partial z} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_c}{\partial z} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

ここで E : 孔縁材のヤング率
 ν : 孔縁材のポアソン比
 t' : 円筒の厚さで $t' \ll r_0$

さてここで、円筒の円周方向の屈曲剛性を無視して $w_c=0$ と考えて (17) 式を (16) 式にいれて整理すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^3 \partial v_c}{\partial \beta^3} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 u_c}{\partial \beta^2} - \nu \left(\frac{\partial^3 v_c}{\partial \beta \cdot \partial z^2} + \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ \frac{t'^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 u_c}{\partial z^4} + \nu \left(\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^4 u_c}{\partial \beta^2 \partial z^2} - \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^3 v_c}{\partial z^2 \partial \beta} \right) \right\} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial v_c}{\partial \beta} + \frac{u_c}{r_0^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

これが孔縁材の円筒の変形成分が満足しなければならない基礎微分方程式である。この解は本論で取扱う範囲では、板のつけ根における境界条件から考えて、次の形となる。

$$\left. \begin{aligned} u_c &= (A_{2n} \cos \lambda z + A'_{2n} \sin \lambda z) \cos 2n\beta \\ v_c &= (B_{2n} \cos \lambda z + B'_{2n} \sin \lambda z) \sin 2n\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

$$\text{ただし } \lambda = \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{1}{\nu} (\nu^2 - 4n^2\nu^2 + 4n^2)}$$

そこで、これらの未知数を孔縁材の円筒と板とのつけ根および孔縁材の両端における境界条件に入れて求める。すなわち

(i) $z=0, r=r_0$ で

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_c}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_c}{\partial z} = 0 \\ u = u_c, \quad v = v_c \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

また、つけ根においては円筒の表面の外力として $t'(rr), t'(r\beta)$ が働いているから、これらの力の釣合を考えると

$$\left. \begin{aligned} F_z - \frac{N_\beta}{r_0} \frac{t'}{2} + \frac{t'}{2} (rr) = 0 \\ z > 0 \\ \frac{1}{r_0} \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} + (r\beta) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} \frac{Et'^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^3 u_c}{\partial z^3} + \nu \left(\frac{\partial^3 u_c}{r_0^2 \partial z \partial \beta^2} - \frac{\partial^2 v_c}{r_0^2 \partial z \partial \beta} \right) \right\} - \frac{Et'^2}{2(1-\nu^2)} \\ \times \left\{ \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial v_c}{\partial \beta} + \frac{u_c}{r_0} \right\} + \frac{t'}{2} P_0 + t' \sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} \cos 2n\beta \\ \frac{Et'}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 v_c}{\partial \beta^2} + \frac{1}{r_0^2} \frac{\partial u_c}{\partial \beta} \right\} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} S_{2n} \sin 2n\beta = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)'$$

(ii) $z = \frac{h}{2}$ で $M_z = 0, F_z = 0$ であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{Et'^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 u_c}{\partial z^2} + \nu \left(\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^2 u_c}{\partial \beta^2} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial v_c}{\partial \beta} \right) \right\} = 0 \\ \frac{Et'^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^3 u_c}{\partial z^3} + \nu \left(\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial^3 u_c}{\partial \beta^2 \partial z} - \frac{1}{r_0} \frac{\partial^2 v_c}{\partial \beta \partial z} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

これらの関係から $A_{2n}, A'_{2n}, B_{2n}, B'_{2n}$ ($n \geq 0$), P_0, P_{2n}, S_{2n} ($n \geq 1$) を求めて $rr, r\beta, \beta\beta$ を求めてやればよい。

5. 孔縁材を円環と仮定した場合

この場合も円環の半径 r_0 はその厚さ t' に比べて大きいとする。(第5図) ここで

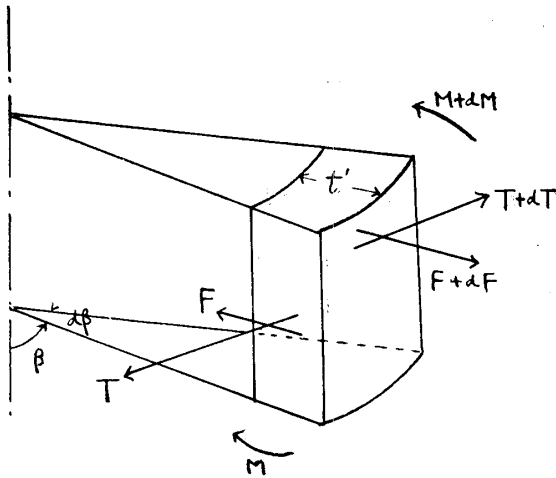
M : 円環の切断面に働く屈曲モーメント

F : 円環の切断面に働くせん断力

T : 円環の切断面に働く垂直力

$A = ht'$: 円環の断面積, h = 円環の高さ

k : 円環の断面の中性軸周りの回転半径 = $\frac{t'}{\sqrt{12}}$



第5図 孔縁材を円環と仮定したとき

E : 円環のヤング率

とすると、円環の中性軸の r, β 方向の変位 u_r, v_r を用いて

$$T = ht' \frac{E}{r_0} \left(u_r + \frac{dv_r}{d\beta} \right)$$

$$M = \frac{EI}{r_0^2} \left(\frac{dv_r}{d\beta} - \frac{d^2u_r}{d\beta^2} \right)$$

であり、また

$$\frac{dF}{d\beta} - T + r_0 \widehat{(rr)} = 0$$

$$\frac{dT}{d\beta} + F + r_0 \widehat{(r\beta)} = 0$$

$$\frac{dM}{d\beta} + r_0 \frac{dT}{d\beta} + t \cdot r_0^2 \widehat{(r\beta)} = 0 \quad \dots\dots\dots(23)$$

ここで t = 板の厚さ

が成り立つから

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^5u_r}{d\beta^5} + 2 \frac{d^3u_r}{d\beta^3} + \frac{du_r}{d\beta} &= - \frac{r_0^2 t}{EA} \left\{ \frac{d^2}{d\beta^2} \widehat{(r\beta)} - \left(1 + \frac{r_0^2}{k^2} \right) \frac{d}{d\beta} \widehat{(rr)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_0^2}{k^2} \widehat{(r\beta)} \right\} \\ \frac{d^6v_r}{d\beta^6} + 2 \frac{d^4v_r}{d\beta^4} + \frac{d^2v_r}{d\beta^2} &= - \frac{r_0^2 t}{EA} \left\{ \frac{d^4}{d\beta^4} \widehat{(r\beta)} - \frac{d^3}{d\beta^3} \widehat{(rr)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_0^2}{k^2} \frac{d}{d\beta} \widehat{(rr)} + \frac{r_0^2}{k^2} \widehat{(r\beta)} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

これが円環の円周方向の引張りを考慮した変形の微分方程式である。この解は $\widehat{(rr)}, \widehat{(r\beta)}$ の値 (11) 式を代入して

$$\left. \begin{aligned} u_r &= H + (K + L\beta \sin \beta + (M + N\beta) \cos \beta - \frac{r_0^2 t}{EA} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(4n^2 - 1)} \\ &\quad \times \left\{ (8n^2 + 2 \frac{r_0^2}{k^2}) S_{2n} - 4n \left(1 + \frac{r_0^2}{k^2} \right) P_{2n} \right\} \cos 2n\beta \\ v_r &= H' + H''\beta + (K' + L'\beta) \sin \beta + (M' + N'\beta) \cos \beta + \frac{r_0^2 t}{EA} \sum_{n=1}^{\infty} \\ &\quad \frac{1}{4n^2(4n^2 - 1)} \left\{ (32n^4 + 2 \frac{r_0^2}{k^2}) S_{2n} - 4n \left(4n^2 + \frac{r_0^2}{k^2} \right) P_{2n} \right\} \sin 2n\beta \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

このうち、 H を除く $K, L, M, N, H', H'', K', L', M', N'$ は変形の対称性から全部零となり、 H は円環の変形の成分と垂直力および剪断力との関係から

$$\frac{d^2u_r}{d\beta^2} + u_r + \frac{d^3v_r}{d\beta^3} + \frac{dv_r}{d\beta} = \frac{r_0^2 t}{EA} \left\{ \widehat{(rr)} + \frac{d}{d\beta} \widehat{(r\beta)} \right\}$$

$$\therefore H = \frac{r_0^2 t}{EA} T \quad \dots\dots\dots(26)$$

そうして、これが境界条件として、板とのつけ根において

$$\left. \begin{aligned} u &= u_r \\ v &= v_r \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(27)$$

なる関係にあるのであるから、これから未知常数は求まり、これから \widehat{rr} , $\widehat{r\beta}$, $\widehat{\beta\beta}$ の値が求まるわけである。

6. 数値計算

孔縁材をそれぞれ薄肉円筒および円環と考えた場合の未知常数をそれぞれ別個に求めて、それらの値による \widehat{rr} を $(\widehat{rr})_e$, $(\widehat{rr})_r$ として $(\widehat{rr})_e = (\widehat{rr})_r$ によって有効高さ h_e を求めてみる。この計算は極めて複雑であり、無限連立方程式を解くことになるので、実際の値を代入して計算をすすめてゆく。

そこで今迄しばしば用いて来た例によって板は柏として

$$E_x = 58200 \text{ kg/cm}^2, \quad E_y = 21900 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu_x = 0.33 \quad (\nu_y = 0.12)$$

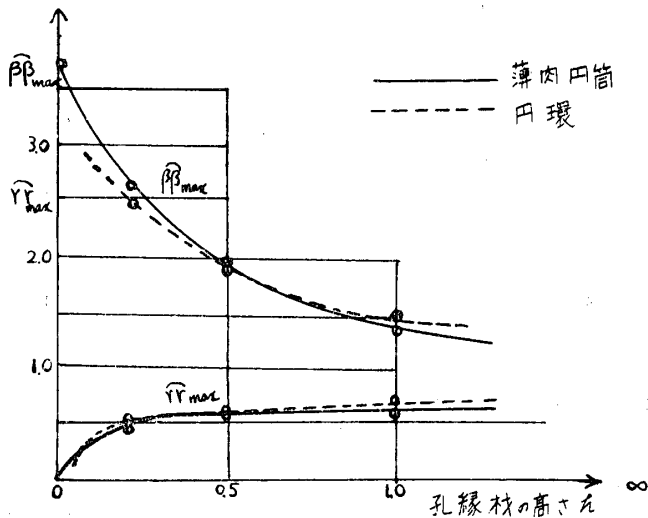
であるから繊維方向が x 軸と一致するときには $\lambda_1 = 1.67$, $\lambda_2 = 0.97$

となる。そうして、孔の半径 $r_0 = 1.0$, 板厚 $t = 0.10$ とする。

孔縁材としては、薄肉円筒、円環の何れの場合、今迄と同じく、鉛として

$$E = 160000 \text{ kg/cm}^2, \quad \nu = 0.45$$

厚さ $t' = 0.10$ (すなわち $t = t'$ とする)



第1表 孔縁材の高さによる \widehat{rr}_{max} , $\widehat{\beta\beta}_{max}$ の変化

	h	0	0.20	0.50	1.0
薄肉円筒	\widehat{rr}_{max}	0	0.42	0.46	0.49
	$\widehat{\beta\beta}_{max}$	3.64	2.61	1.70	1.49
円環	\widehat{rr}_{max}	0	0.41	0.51	0.61
	$\widehat{\beta\beta}_{max}$	3.64	2.54	1.78	1.56

第6図 孔縁材の高さによる $\widehat{\beta\beta}_{max}$, \widehat{rr}_{max}

こうして計算して h を変えて求めた結果が第6図であり、第1表である。すなわち有効高さ h_e として、未知数のまま求めると

$$h_e = \frac{2E_x}{E \cdot t} \times \frac{r_0^2 t P_0}{\{ (1 + \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \lambda_2) T - \{ 2\nu_x - 2\lambda_1 \lambda_2 + (\lambda_1 + \lambda_2) \} (1 + \lambda_1 \lambda_2) \} P_0 - (\lambda_1 + \lambda_2) (1 - \lambda_1 \lambda_2) P_2 - S_2} \quad \dots\dots\dots(28)$$

これに上のいろんな高さの場合の数値を代入すると

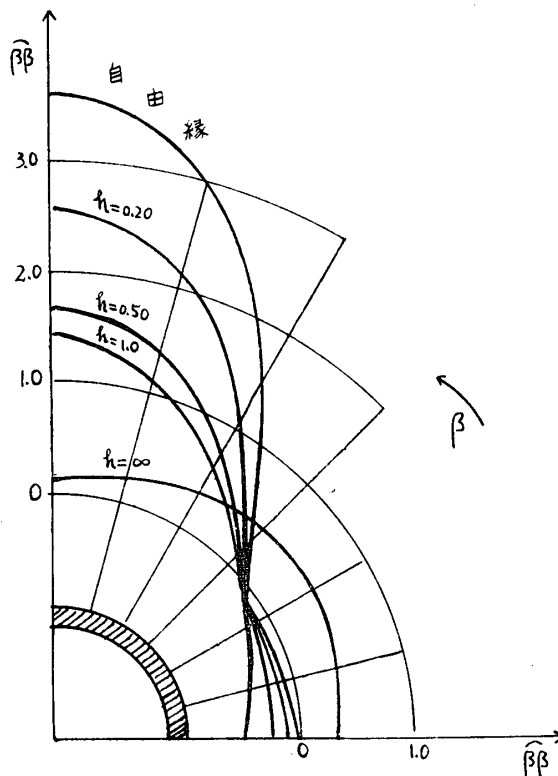
$$h_e = 0.30 \sim 0.40$$

となり、上の計算結果の図及び表と大体一致する。すなわち、有効高さは板厚の3~4倍程度であることが言える。

7. 結 論

第6図において、孔縁材の高さをいろいろ変えた場合について、薄肉円筒、円環とみなした場合の最大応力がとってある。この場合、最大応力は $\beta = 90^\circ$ (第7図参照) に生じている。そうして $(\widehat{rr})_r = (\widehat{rr})_c$ は $h/r_0 = 0.30 \sim 0.40$ ($r_0 = 1.0$) の附近に出て上の数式から求めた結果と一致している。ただし薄肉円筒の場合は $z = 0$ の附近は適用できず、また円環の場合は $z = 0$ の附近のみしか、理論の仮定から適用できないわけである。

これで孔縁材の高さは、この高さ以上に高くなっても、応力集中の緩和の目的からいって、あまり効果はないわけである。このいみにおいて有効高さの定義がはっきりしてくるのである。



第7図 孔縁材のある場合の周辺応力の分布
(孔縁材を円環と仮定した場合)

参 考 文 献

- 1) 野村：円孔を有する直交異方性板の孔縁の補強について（第1報：十字棒で円孔を補強した場合）日本機械学会論文集91号
- 2) 野村：同上（第2報：孔縁材をあてた場合）日本機械学会論文集135号
- 3) 野村：同上（第3報：孔縁材に防撓材をつけた場合）日本機械学会論文集139号
- 4) 野村：同上（第4報：二重強化節をつけた場合）日本機械学会論文集139号
- 5) 太田友彌：船体構造部分の不連続箇所における応力集中に関する研究（第4報，第6報）造船協会論文集63号