

多径間単純げた上を走行する鉄道車両
 —左右・ローリング・ヨーイング系—
 の走行安定性に関する研究
 (第1報, 単純パラメトリック共振の境界振動数方程式)

會 田 忠 義*・池 上 豊 和**

Stability of a Railway Vehicle with Side Swaying, Rolling
 and Yawing Motions on a Multispan Simply Supported Girder System.
 (1st Report. Boundary Frequency Equations of Unstable Regions
 for Simple Parametric Resonance)

Tadayoshi AIDA and Toyokazu IKEGAMI

Abstract

Basic equations of dynamic stability of a railway vehicle with side swaying, rolling and yawing motions, which travels on a multispan simply supported guideway, were derived by mathematically idealizing a multispan guideway to a circulated guideway system. It was shown that the perturbation equations of above coupled system consisted of a vehicle and a circulated guideway are Hill's equations and the boundary frequency equations of simple parametric resonance, which are available to actual system, were presented in this paper.

1. まえがき

等径間, 等剛性の単純げたからなる多径間単純げた上を鉄道車両が走行するとき, ある特定の速度のとき車両の上下・ピッチング振動が大きくなり乗心地が悪化するので, 設計上注意しなければならないことは周知の通りである。著者らは, これまでに車両の上下・ピッチング運動のみに注目し, 係数励振振動面より上記の問題を調査した。その結果を文献(1, 2)に示してきた。本報では, 車両の左右・ローリング・ヨーイング運動に注目し, 多径間単純げた上を鉄道車両が走行するときの安定性を調査する。

調査に当って, 多径間単純げたをエンドレスの循環げたにモデル化し, 車両の左右・ローリング・ヨーイング系についても, 車両とけたの連成振動方程式が, Hill方程式になり, 係数励振不安定振動を起す可能性のあることを示す。

以下, 第1報では, 系のモデル化, 連成振動の運動方程式及び単純パラメトリック共振の境界振動数方程式を示す。

2. 多径間単純げたのモデル化と車両の力学モデル

本研究では, 車両の振動挙動のみに注目すればよいことを考慮すれば, 上下・ピッチング系と同様, 多径間単純げたと車両とからなる系は循環げたとその上を数学的に周回する車両とにモデル化される。(文献1, 2参照)。けたのパン長が車両長より長い場合は2径

*建設工学科

**宇部興産(株)

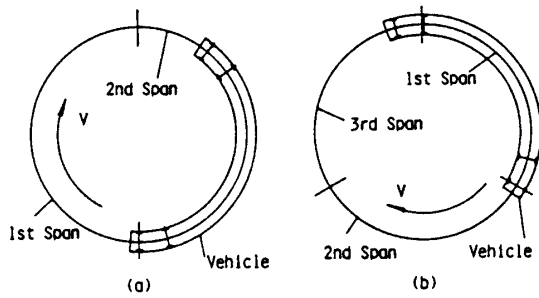


Fig. 1 Circulated Guideway Systems

間からなる循環げたと車両とに、けたのスパン長が車両長より短い場合は3径間からなる循環げたと車両とにモデル化される (Fig. 1参照). このモデル化に当って、けたは車両進入直前に静止の条件を満すこととする.

車両の力学モデルは、一般の軌道を走行する車両モデルと同じで、特に、本研究では、旧国鉄において設定された新幹線力学モデルをすべて線形化し、すべてのばね及びダンパーのストッパーを外した修正モデル³⁾を用いた.

3. 車両と循環げたの連成振動の運動方程式

けたのスパン長 (L) が車両の前後輪軸間隔 (2(l+a)) より長い場合、すなわち、2スパンからなる循環げたと車両との連成振動の運動方程式を以下に示す. 以下で用いるけた及び車両の運動方程式の記号は文献 (1, 2, 3) と同じである.

3.1 循環げたの水平及びねじり振動の運動方程式

Fig. 1(a)に示す循環げたの第1及び第2スパンの水

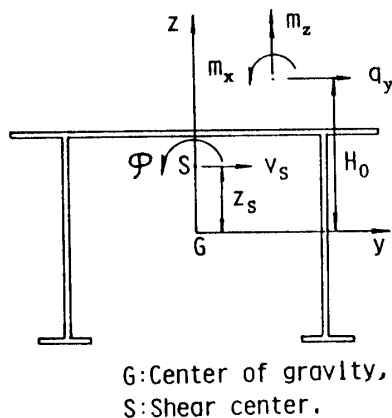


Fig. 2 Cross Section of Girder

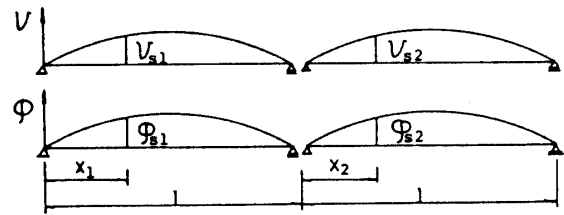


Fig. 3 Coordinates of Circulated Guideway System with Two Spans.

平及びねじり変位を、それぞれ v_{s1} , ϕ_1 及び v_{s2} , ϕ_2 で表わすとき、けたの水平及びねじり振動の運動方程式ならびに車両進入直前のけたの初期条件は次式で表わされる. (Fig. 2及びFig. 3参照).

$$m\ddot{v}_{sr} + m z_s \ddot{\phi}_r + \eta_v \dot{v}_{sr} + EI_{yy} v_{sr}'''' - q_{yr} + m_{zr} = 0 \quad (1)$$

$$\mu I_{ps} \ddot{\phi}_r + m z_s \ddot{v}_{sr} + \eta_\phi \dot{\phi}_r + EI_\omega \phi_r'''' - GK \phi_r'' - m_{xr} + q_{yr} (H_0 - Z_s) = 0 \quad (2)$$

$$r=1, 2$$

$$v_{s1} = \dot{v}_{s1} = \phi_1 = \dot{\phi}_1 = 0 \cdots t=2L(n-1)/V \quad (3)$$

$$v_{s2} = \dot{v}_{s2} = \phi_2 = \dot{\phi}_2 = 0 \cdots t=L/V + 2L(n-1)/V$$

$$n=1, 2, \dots$$

ここで、 $(\dot{\quad}) = \partial/\partial t$, $(\prime) = \partial/\partial x$, V: 車両走行速度 q_{yr} , m_{zr} , m_{xr} は第 r スパンに車両から作用する水平力、水平曲げモーメント及びねじりモーメントである.

運動方程式(1)及び(2)の解を次式で表わす.

$$v_{sr} = \sum_{k=1}^K \sigma_{rk}(t) v_{srk}(x_r)$$

$$\phi_{sr} = \sum_{k=1}^K \tau_{rk}(t) \phi_{rk}(x_r) \quad (4)$$

$$r=1, 2$$

式中、 σ_{rk} 及び τ_{rk} は第 r スパンの時間に関する未知関数 (基準座標), v_{srk} 及び ϕ_{rk} は同じく第 r スパンの座標関数 (基準関数) で、けたの水平曲げ及びねじり振動の k 次の固有関数である. 単純げたの場合次式である.

$$v_{srk}(x_r) = \phi_{rk}(x_r) = \sin k\pi x_r/L \quad (5)$$

式(4)及び(5)を運動方程式に代入整理すると次式となる.

$$\ddot{\sigma}_{rk} + z_s \ddot{\tau}_{rk} + \frac{\eta_v}{m} \dot{\sigma}_{rk} = \frac{2}{mL} \left(\int_0^L q_{yr} v_{srk} dx_r - \int_0^L m_{zr} v_{srk} dx_s \right) \quad (6)$$

$$\ddot{\tau}_{rk} + \frac{m z_s}{\mu I_{ps}} \ddot{\sigma}_{rk} + \frac{\eta_\phi}{\mu I_{ps}} \dot{\tau}_{rk} + \omega_{rk}^2 \tau_{rk} = \frac{2}{\mu I_{ps} L} \times \left(\int_0^L m_{xr} \phi_{rk} dx_r - (H_0 - Z_s) \int_0^L q_{yr} \phi_{rk} dx_r \right) \quad (7)$$

$$r=1, 2, k=1, 2, \dots, K$$

本調査では、車両からけたに作用する水平曲げモーメント m_{zr} は無視し、 q_{yr} 及び m_{xr} のみを考慮した. 車両が

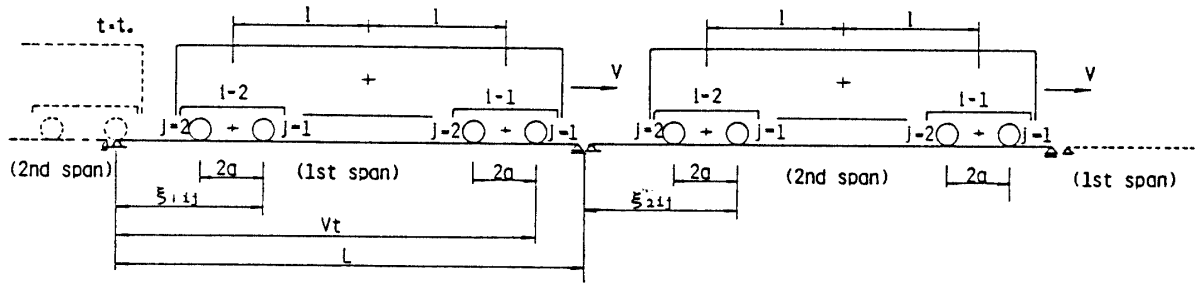


Fig. 4 Vehicle and Circulated Guideway System

循環げたの第2スパン上にあり、車両の最前輪軸が第1スパンに進入直前 (Fig. 1(a)の状態) を基準 ($t=t_0$) に、ある時刻 ($t+t_0$) における各スパンに作用する荷重 $q_{yr}(x_r, t)$, $m_{xr}(x_r, t)$ は次式で表わされる³⁾ (Fig. 4参照).

$$q_{yr}(x_r, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 [-m_w \ddot{y}_{wy} + 2k_{wy} \{y_{T1} + (H_T - r) \times \varphi_{T1} - (-1)^j a \psi_{T1}\} - y_{w1j}] \delta(x_r - \xi_{r1j}(t)) \quad (8)$$

$$m_{xr}(x_r, t) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \{-I_{wx} \ddot{\varphi}_{w1j} + 2b_1^2 c_1 (\dot{\varphi}_{T1} - \dot{\varphi}_{w1j}) + 2b_1^2 k_1 \times (\varphi_{T1} - \varphi_{w1j})\} \delta(x_r - \xi_{r1j}(t)) \quad (9)$$

ここで、

$$\xi_{r1j}(t) = Vt - (r-1)L - 2\{l(i-1) + a(j-1)\}$$

$$y_{w1j} = \sum_{k=1}^K \sigma_{rk}(t) v_{srk}(x_r) - (H_0 - z_0) \sum_{k=1}^K \tau_{rk}(t) \varphi_{rk}(x_r) \Big|_{x_r = \xi_{r1j}}$$

$$\varphi_{w1j} = \sum_{k=1}^K \tau_{rk}(t) \varphi_{rk}(x_r) \Big|_{x_r = \xi_{r1j}} \quad (10)$$

$$r=1, 2$$

車両が循環げた上を走行するとき、車両は $2L/V$ ごとに同じ位置にあることを考慮して、今、基準状態 ($t=t_0$) より一周する状態を想定する。このとき、 $v_{srk}(\xi_{r1j})$ 及び $\varphi_{rk}(\xi_{r1j})$ は車両の第 i 台車第 j 輪軸が第 r スパン上にあるときのみ定義され、第 r スパン外にあるときはゼロである。このことより次式で表わされる。

$$v_{s1k}(\xi_{11j}) = \varphi_{1k}(\xi_{11j}) = \begin{cases} 0, & \dots 0 \leq t \leq 2\{l(i-1) + a(j-1)\}/V, \\ \sin \frac{k\pi}{L} [Vt - 2\{l(i-1) + a(j-1)\}] \\ \dots 2\{l(i-1) + a(i-1)\}/V \leq t \leq [L + 2\{l(i-1) + a(j-1)\}]/V, \\ 0 \dots [L + 2\{l(i-1) + a(j-1)\}]/V \leq t \leq 2L/V, \end{cases} \quad (11)$$

$$v_{s2k}(\xi_{21j}) = \varphi_{2k}(\xi_{21j}) = \begin{cases} \sin \frac{k\pi}{L} [vt + L - 2\{l(i-1) + a(j-1)\}] \dots 0 \leq t \leq \\ \dots 2\{l(i-1) + a(j-1)\}/V, \\ 0 \dots 2\{l(i-1) + a(j-1)\}/V \leq t \leq [L + 2\{l(i-1) + a(j-1)\}]/V, \\ \sin \frac{k\pi}{L} [vt - L - 2\{l(i-1) + a(j-1)\}] \\ \dots [L + 2\{l(i-1) + a(j-1)\}]/V \leq t \leq 2L/V, \end{cases} \quad (12)$$

v_{srk} 及び φ_{rk} は上述より明らかなように、基準状態より車両が循環げた上を周回するたびに式(11)及び(12)を繰返すこととなる。したがって、 v_{srk} 及び φ_{rk} は連続する時間 t に対して周期 $2L/V$ をもつ周期関数となり、次のようにFourier級数に展開することができる。

$$v_{srk}(\xi_{r1j}) = \varphi_{rk}(\xi_{r1j}) = \frac{1}{2} r a_{0kij} + \sum_{p=1}^{\infty} (r a_{pkij} \cos p\omega t + r b_{pkij} \sin p\omega t) \quad (13)$$

ここで、 $\omega = \pi V/L$

式(10)を式(8)及び(9)に代入し、これらを用いて運動方程式(6)及び(7)を整理しマトリックス表示すると次式となる。

$$M_{gr} \ddot{d}_{gHr} + C_{gr} \dot{d}_{gHr} + K_{gr} d_{gHr} + V_{cr} \dot{d}_{Hr} + V_{Kr} d_{Hr} = 0, \quad r=1, 2 \quad (14)$$

ここで、

$$d_{gHr} = \{\sigma_{r1}, \sigma_{r2}, \dots, \sigma_{rk}, \tau_{r1}, \tau_{r2}, \dots, \tau_{rk}\}^T \quad (15)$$

M_{gr} , C_{gr} , K_{gr} , V_{cr} 及び V_{Kr} は第 r スパンのけたの質量、減衰、剛性、及び車両からの影響を表わすマトリックスで、それぞれ、文献(3)のそれと同じ内容をもつ。

一方、けたの周期的初期条件は、式(3)より次式で表わされる。

$$\begin{aligned} d_{gH1} &= \dot{d}_{gH1} = 0 \dots t = 2L(n-1)/V, \\ d_{gH2} &= \dot{d}_{gH2} = 0 \dots t = L/V + 2L(n-1)/V, \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

3.2 車両の運動方程式

車両の運動方程式は次式で表わされる (文献(3)).

$$M_H \ddot{d}_H + C_H \dot{d}_H + K_H d_H + G_c \dot{g}_H + G_K g_H = 0 \quad (17)$$

ここで,

$$d_H = \{y_B, \varphi_B, \psi_B, y_{T1}, \varphi_{T1}, \psi_{T1}, y_{T2}, \varphi_{T2}, \psi_{T2}\}^T \quad (18)$$

$$g_H = \{y_{w11}, y_{w12}, y_{w21}, y_{w22}, \varphi_{w11}, \varphi_{w12}, \varphi_{w21}, \varphi_{w22}\}^T \quad (19)$$

けた上を車両が走行することより, 車両の運動方程式中の輪軸の重心の変位を表わすベクトル g_H は, けたのせん断中心位置の変位で表わされる. すなわち, y_{wrij} 及び φ_{wrij} が式(10)で表わされることから, 次式となる.

$$g_H = \sum_{j=1}^2 H_r d_{gHr} \quad (20)$$

ここで H_r は第 r スパンに関する量で, 文献(3)のそれと同じ内容をもつ.

したがって, 連成振動時の運動方程式は次式となる.

$$M_H \ddot{d}_H + C_H \dot{d}_H + K_H d_H + G_c \sum_{j=1}^2 H_r \dot{d}_{gHr} + (G_c \sum_{j=1}^2 H_r + G_K \sum_{j=1}^2 H_r) d_{gHr} = 0 \quad (21)$$

3.3 連成振動の運動方程式

連成振動の運動方程式は車両及び循環げたの運動方程式(21)及び(14)より次のようにまとめることができる.

$$\begin{cases} M_H \ddot{d}_H + C_H \dot{d}_H + K_H d_H + R_{CH} \dot{d}_{gH} + R_{KH} d_{gH} = 0 & (22) \\ M_{gH} \ddot{d}_{gH} + C_{gH} \dot{d}_{gH} + K_{gH} d_{gH} + Q_{CH} \dot{d}_H + Q_{KH} d_H = 0 & (23) \end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned} d_{gH} &= \{d_{gH1}, d_{gH2}\}^T, \quad R_{CH} = [G_c H_1, G_c H_2], \\ R_{KH} &= [G_c H_1' + G_K H_1, G_c H_2' + G_K H_2], \\ M_{gH} &= \begin{bmatrix} M_{g1} & 0 \\ 0 & M_{g2} \end{bmatrix}, \quad C_{gH} = \begin{bmatrix} C_{g1} & 0 \\ 0 & C_{g2} \end{bmatrix}, \\ K_{gH} &= \begin{bmatrix} K_{g1} & 0 \\ 0 & K_{g2} \end{bmatrix}, \quad Q_{CH} = \begin{bmatrix} V_{C1} \\ V_{C2} \end{bmatrix}, \quad Q_{KH} = \begin{bmatrix} V_{K1} \\ V_{K2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (24)$$

4. 車両の安定解析

4.1 系のHill型運動方程式

循環げたの運動方程式の解の座標関数 $v_{srk}(\xi_{r1j})$ 及び $\varphi_{rk}(\xi_{r1j})$ が, 式(11)及び(12)に示すように, 周期 $2L/V$ を有する周期関数で表わされ, これらが式(13)のFourier級数で表わされる. このとき, けたの運動方程式(23)中のマトリックス M_{gH} , C_{gH} , K_{gH} , Q_{CH} , Q_{KH} ならびに, 車両

の運動方程式(22)中のマトリックス R_{CH} , R_{KH} はこれらが v_{srk} 及び φ_{rk} を要素にもつことより, 次のようにFourier級数表示できる.

$$R_{CH} = \frac{1}{2} R_{CHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{CHP}^c \cos p\omega t + R_{CHP}^s \sin p\omega t)$$

$$R_{KH} = \frac{1}{2} R_{KHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{KHP}^c \cos p\omega t + R_{KHP}^s \sin p\omega t)$$

$$M_{gH} = \frac{1}{2} M_{gHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gHP}^c \cos p\omega t + M_{gHP}^s \sin p\omega t)$$

$$C_{gH} = \frac{1}{2} C_{gHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{gHP}^c \cos p\omega t + C_{gHP}^s \sin p\omega t)$$

$$K_{gH} = \frac{1}{2} K_{gHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gHP}^c \cos p\omega t + K_{gHP}^s \sin p\omega t)$$

$$Q_{CH} = \frac{1}{2} Q_{CHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{CHP}^c \cos p\omega t + Q_{CHP}^s \sin p\omega t)$$

$$Q_{KH} = \frac{1}{2} Q_{KHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{KHP}^c \cos p\omega t + Q_{KHP}^s \sin p\omega t) \quad (25)$$

したがって, 車両及びけたの連成振動の運動方程式は式(26)及び(27)に示すように, 周期 $2L/V$ をもつ係数をもつ方程式となり, Hill型の方程式に相当することとなる.

$$\begin{aligned} M_H \ddot{d}_H + C_H \dot{d}_H + K_H d_H + \left\{ \frac{1}{2} R_{CHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{CHP}^c \right. \\ \left. \times \cos p\omega t + R_{CHP}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{d}_{gH} + \left\{ \frac{1}{2} R_{KHO} \right. \\ \left. + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{KHP}^c \cos p\omega t + R_{KHP}^s \sin p\omega t) \right\} d_{gH} = 0 \quad (26) \\ \left\{ \frac{1}{2} M_{gHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gHP}^c \cos p\omega t + M_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \ddot{d}_{gH} \\ + \left\{ \frac{1}{2} C_{gHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{gHP}^c \cos p\omega t + C_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{d}_{gH} \\ + \left\{ \frac{1}{2} K_{gHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gHP}^c \cos p\omega t + K_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} d_{gH} \\ + \left\{ \frac{1}{2} Q_{CHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{CHP}^c \cos p\omega t + Q_{CHP}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{d}_H \\ + \left\{ \frac{1}{2} Q_{KHO} + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{KHP}^c \cos p\omega t + Q_{KHP}^s \sin p\omega t) \right\} d_H \\ = 0 \quad (27) \end{aligned}$$

ただし, けたの周期的初期条件は式(16)の通りで, 第1スパンのけたは, $2L/V$ の時間間隔に, 第2スパンのけたは L/V だけ遅れて $2L/V$ 時間間隔に静止の条件を満たすものとする.

4.2 車両の運動の係数励振不安定振動解析

4.2.1 撓乱方程式

車両及び循環げたの連成振動の運動方程式は上述の通りHill型方程式に相当することから係数励振不安定振動が発生することが予想される。

今、走行速度の微小変化にともなう、すなわち、励振振動数 ω の微小変化により車両の振動変位が増加し、不安定振動を起した場合は想定する。不安定振動にともなう、定常振動からの振動変位増分を、車両に対して \bar{d}_H 、けたに対して、 \bar{d}_{gHr} ($r=1, 2$)とすると、この変位増加量に対する運動方程式、すなわち、撓乱方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 M_H \ddot{\bar{d}}_H + c_H \dot{\bar{d}}_H + K_H \bar{d}_H + \left\{ \frac{1}{2} R_{CHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{CHP}^c \right. \\
 \times \cos p\omega t + R_{CHP}^s \sin p\omega t) \left. \right\} \dot{\bar{d}}_{gH} + \left\{ \frac{1}{2} R_{KHO}^c \right. \\
 + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{KHP}^c \cos p\omega t + R_{KHP}^s \sin p\omega t) \left. \right\} \bar{d}_{gH} = 0 \\
 \left(28 \right) \\
 \left\{ \frac{1}{2} M_{gHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gHP}^c \cos p\omega t + M_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \ddot{\bar{d}}_{gH} \\
 + \left\{ \frac{1}{2} C_{gHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (C_{gHP}^c \cos p\omega t + C_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{\bar{d}}_{gH} \\
 + \left\{ \frac{1}{2} K_{gHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gHP}^c \cos p\omega t + K_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \bar{d}_{gH} \\
 + \left\{ \frac{1}{2} Q_{CHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{CHP}^c \cos p\omega t + Q_{CHP}^s \sin p\omega t) \right\} \dot{\bar{d}}_H \\
 + \left\{ \frac{1}{2} Q_{KHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{KHP}^c \cos p\omega t + Q_{KHP}^s \sin p\omega t) \right\} \bar{d}_H \\
 = 0
 \end{aligned}$$

このとき、けたの増分変位ベクトルに対する周期性初期条件は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \bar{d}_{gH1} = \dot{\bar{d}}_{gH1} = 0 & \quad t = 2L(n-1)/V \\
 \bar{d}_{gH2} = \dot{\bar{d}}_{gH2} = 0 & \quad t = L/v + 2L(n-1)/V \quad (30)
 \end{aligned}$$

車両の安定性の検討は増分ベクトルについて行う。

以下の解析では、車両及びけたの減衰の影響を無視した場合を対象とし、次の示す運動方程式について考察する。

$$\begin{aligned}
 M_H \ddot{\bar{d}}_H + K_H \bar{d}_H + \left\{ \frac{1}{2} R_{KHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (R_{KHP}^c \cos p\omega t \right. \\
 + R_{KHP}^s \sin p\omega t) \left. \right\} \bar{d}_{gH} = 0 \quad (31) \\
 \left\{ \frac{1}{2} M_{gHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gHO}^c \cos p\omega t + M_{gHO}^s \sin p\omega t) \right\} \ddot{\bar{d}}_{gH}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 + \left\{ \frac{1}{2} K_{gHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gHP}^c \cos p\omega t + K_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \bar{d}_{gH} \\
 + \left\{ \frac{1}{2} Q_{KHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{KHP}^c \cos p\omega t + Q_{KHP}^s \sin p\omega t) \right\} \bar{d}_H \\
 = 0 \quad (32)
 \end{aligned}$$

4.2.2 境界振動数方程式

車両が不安定振動を起し、増分変位ベクトル \bar{d}_H が調和振動であると想定する。このとき、けたの振動方程式の解は、式(32)において \bar{d}_H の項が削除され場合の解(自由振動解)と車両の振動 \bar{d}_H による強制振動解の和で表わされる。既述のけたの周期性初期条件は自由振動解にのみ影響(積分定数の決定にのみ影響)し、強制振動解には影響しない。また、自由振動はけたの固有振動数をもつ振動するのみで、車両と同じ周期をもつ振動するけたの振動解は強制振動解のみである。したがって、係数励振振動する車両と同じ周期をもつ振動する調和振動解に注目した安定性の調査には、けたの基準座標ベクトル \bar{d}_{gH} の初期条件は考慮する必要はない。以下の解析では、連成振動の運動方程式の初期条件を無視し、単純パラメトリック共振の調査をBolotin法⁴⁾にもとずいて行う。

Hill型方程式の解について、係数の周期と同じか、あるいは2倍の周期をもつ周期解が単純パラメトリック共振の不安定領域と安定領域を区分すること、より厳密にいうと、同じ周期を持つ2つの解が上記の不安定領域を区分し、異なる周期をもつ解が安定領域を区分することが知られている⁴⁾。ここで、係数の周期は前述より $T_p = 2L/V$ で表わされる。

初めに、係数の周期 T_p の2倍の周期をもつ周期解の存在条件としての境界振動変数方程式を求める。今、車両が周期 $2T_p$ をもつて運動するとし、このときの車両ベクトルを次式で表わす。

$$\bar{d}_H = \sum_{p=1,3,5}^{\infty} (a_p \cos \frac{1}{2} p\omega t + b_p \sin p\omega t) \quad (33)$$

車両振動ベクトルが上式であるときのけたの振動ベクトル \bar{d}_{gH} を求める。すなわち、式(33)を式(32)に代入すると、次式で表わされるけたの運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \left\{ \frac{1}{2} M_{gHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (M_{gHP}^c \cos p\omega t + M_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \ddot{\bar{d}}_{gH} \\
 + \left\{ \frac{1}{2} K_{gHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (K_{gHP}^c \cos p\omega t + K_{gHP}^s \sin p\omega t) \right\} \bar{d}_{gH} \\
 = - \left\{ \frac{1}{2} Q_{KHO}^c + \sum_{p=1}^{\infty} (Q_{KHP}^c \cos p\omega t + Q_{KHP}^s \sin p\omega t) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos \frac{1}{2} p \omega t + b_p \sin p \omega t) \quad (34)$$

\bar{d}_{gH} は上式を強制振動方程式と考えたとき、右辺の強制項によるけたの強制振動ベクトル \bar{d}_{gH} として得られる。 \bar{d}_{gH} は次式で表わすことができる。

$$\bar{d}_{gH} = \sum_{p=1,3,5}^{\infty} (\alpha_p \cos \frac{1}{2} p \omega t + \beta_p \sin \frac{1}{2} p \omega t) \quad (35)$$

上式を式(34)に代入し、左右両辺における係数を等置することにより、式(33)及び(35)の係数、 α_p 、 β_p 、 a_p 及び b_p が存在するための条件として次式が得られる。

$$\left(-\frac{\omega^2}{4} [M]_1 + [K]_1 \right) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [P]_1 \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (36)$$

ここで、

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \{ \dots \alpha_5, \alpha_3, \alpha_1, \beta_1, \beta_3, \beta_5, \dots \}^T$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \{ \dots a_5, a_3, a_1, b_1, b_3, b_5, \dots \}^T \quad (37)$$

$[M]_1$ 、 $[K]_1$ 及び $[P]_1$ は付録に示す。

一方、式(33)及び(35)は車両の運動方程式(31)も同時に満たさなければならない。すなわち、式(31)に式(33)と(35)を代入し、左右両辺における係数を等置することによって、車両の振動ベクトル \bar{d} とけたの振動ベクトル \bar{d}_{gH} が車両の振動方程式(31)を満たす条件式として次式が得られる。

$$\left(-\frac{\omega^2}{4} [M_H]_1 + [K_H]_1 \right) \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [H]_1 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (38)$$

ここで、 $[M_H]_1$ 、 $[K_H]_1$ 及び $[H]_1$ は付録に示す。

式(36)及び(38)が同時に満たされるとき、車両とけたは周期 $2T_p$ をもった振動する。したがって、このための条件は、式(33)と(38)の係数行列式とすることによって得られ、次式で表わされる。

$$\begin{vmatrix} -\frac{\omega^2}{4} [M]_1 + [K]_1 & -[P]_1 \\ \frac{1}{2} [H]_1 & -\frac{\omega^2}{4} [M_H]_1 + [K_H]_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

上式が、周期 $2T_p$ をもつ不安定振動の境界振動数方程式である。

次に、周期 T_p をもつ周期解の存在条件としての境界振動数方程式は同様の手順により求めることができる。すなわち、周期 T_p をもつ車両振動ベクトルを

$$\bar{d}_H = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (a_p \cos p \omega t + b_p \sin p \omega t) \quad (40)$$

で表わし、同じ周期をもつけたの振動ベクトルを

$$\bar{d}_{gH} = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_p \cos p \omega t + \beta_p \sin p \omega t) \quad (41)$$

で表わすとき、両式が車両の運動方程式(31)及びけたの運動方程式(32)を同時に満たすための条件として次式が得られる。

$$(-\omega^2 [M]_2 + [K]_2) \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = [P]_2 \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (42)$$

$$(-\omega^2 [M_H]_2 + [K_H]_2) \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} [H]_2 \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (43)$$

ここで、

$$\begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \{ \dots \alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots \}^T$$

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \{ \dots a_3, a_2, a_1, a_0, b_1, b_2, b_3, \dots \}^T \quad (44)$$

$[M]_2$ 、 $[K]_2$ 、 $[P]_2$ 、 $[M_H]_2$ 、 $[K_H]_2$ 、及び $[H]_2$ の内容は付録に示す。

式(40)及び(41)で表わされる周期解が存在するための条件として次の行列式が得られる。

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 [M]_2 + [K]_2 & [P]_2 \\ \frac{1}{2} [H]_2 & -\omega^2 [M_H]_2 + [K_H]_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

上式が周期 T_p をもつ不安定振動の境界振動数方程式である。

本研究における系の不安定振動領域は境界振動数方程式(39)及び(45)より求めることができ、不安定振動を起す車両の相当速度がわかる。

5. 結 び

多径間単純けた上を単一車両（左右・ローリング・ヨーイング系）が走行する場合の定式化に当って、上下・ピッチング系車両と同様、次の点が明らかになった。

- (1)無限に連続する単純けたと車両からなる系を循環けた系に置換することにより、永年形の運動方程式を有限形に定式化することができた。
- (2)運動方程式がHill型方程式になることを示し、車両の左右・ローリング・ヨーイングの係数励振振動の発生の可能性を示唆した。
- (3)単純パラメトリック共振に注目し、不安定領域の境界振動数方程式を提示した。これにより、実橋実車に対する調査が可能となった。

参考文献

- 1) 會田忠義・池上豊和・楠窪 剛：多径間単純げた上を走行する鉄道車両—上下・ピッチング系—の走行安定性に関する研究(第1報)，山口大学工学部研究報告，37巻，2号，pp.47~57.
- 2) 會田忠義・池上豊和：多径間単純げた上を走行する鉄道車両—上下・ピッチング—の走行安定性に関する研究(第2報)，山口大学工学部研究報告，38巻，1号，pp.65~74.
- 3) 會田忠義・楠窪 剛・池上豊和：右左動・ローリング及びヨーイング運動する鉄道車両による橋げたの動的応答に関する研究，山口大学工学部研究報告，36巻，2号，pp.93~105.
- 4) V.V.Bolotin： The Dynamic Stability of Elastic Systems, Holden-Day, San Francisco (1964)

(昭和62年10月15日受理)

付 録

$$\begin{aligned}
 [M]_1 &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots 3^2(M_{gH0}^C + M_{gH3}^C) & 1^2(M_{gH1}^C + M_{gH2}^C) & 1^2(M_{gH2}^S - M_{gH1}^S) & 3^2 M_{gH3}^S & \cdots \\ \cdots 3^2(M_{gH1}^C + M_{gH2}^C) & 1^2(M_{gH0}^C + M_{gH1}^C) & 1^2 M_{gH1}^S & 3^2(M_{gH2}^S + M_{gH1}^S) & \cdots \\ \cdots 3^2(M_{gH2}^S - M_{gH1}^S) & 1^2(M_{gH1}^S) & 1^2(M_{gH0}^C - M_{gH1}^C) & 3^2(M_{gH1}^C - M_{gH2}^C) & \cdots \\ & 3^2 M_{gH3}^S & 1^2(M_{gH2}^S + M_{gH1}^S) & 1^2(M_{gH1}^C - M_{gH2}^C) & 3^2(M_{gH0}^C - M_{gH3}^C) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\
 [K]_1 &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots (K_{gH0}^C + K_{gH3}^C) & (K_{gH1}^C + K_{gH2}^C) & (K_{gH2}^S - K_{gH1}^S) & K_{gH3}^S & \cdots \\ \cdots (K_{gH1}^C + K_{gH2}^C) & (K_{gH0}^C + K_{gH1}^C) & K_{gH1}^S & (K_{gH2}^S + K_{gH1}^S) & \cdots \\ \cdots (K_{gH2}^S - K_{gH1}^S) & (K_{gH1}^S) & (K_{gH0}^C - K_{gH1}^C) & (K_{gH1}^C - K_{gH2}^C) & \cdots \\ & K_{gH3}^S & (K_{gH2}^S + K_{gH1}^S) & (K_{gH1}^C - K_{gH2}^C) & (K_{gH0}^C - K_{gH3}^C) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\
 [P]_1 &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots (Q_{gH0}^C + Q_{gH3}^C) & (Q_{gH1}^C + Q_{gH2}^C) & (Q_{gH2}^S - Q_{gH1}^S) & Q_{gH3}^S & \cdots \\ \cdots (Q_{gH1}^C + Q_{gH2}^C) & (Q_{gH0}^C + Q_{gH1}^C) & Q_{gH1}^S & (Q_{gH2}^S + Q_{gH1}^S) & \cdots \\ \cdots (Q_{gH2}^S - Q_{gH1}^S) & (Q_{gH1}^S) & (Q_{gH0}^C - Q_{gH1}^C) & (Q_{gH1}^C - Q_{gH2}^C) & \cdots \\ & Q_{gH3}^S & 1^2(Q_{gH2}^S + Q_{gH1}^S) & (Q_{gH1}^C - Q_{gH2}^C) & (Q_{gH0}^C - Q_{gH3}^C) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \\
 [M_H]_1 &= \begin{bmatrix} \cdots & & & & \\ & 3^2 M_H & & & \\ & & 1^2 M_H & & \\ & & & 1^2 M_H & \\ & & & & 3^2 M_H \\ & & & & & \cdots \end{bmatrix} \quad [K_H]_1 = \begin{bmatrix} \cdots & & & & \\ & K_H & & & \\ & & K_H & & \\ & & & K_H & \\ & & & & K_H \\ & & & & & \cdots \end{bmatrix} \\
 [H]_1 &= \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots (R_{gH0}^C + R_{gH3}^C) & (R_{gH1}^C + R_{gH2}^C) & (R_{gH2}^S - R_{gH1}^S) & R_{gH3}^S & \cdots \\ \cdots (R_{gH1}^C + R_{gH2}^C) & (R_{gH0}^C + R_{gH1}^C) & R_{gH1}^S & (R_{gH2}^S + R_{gH1}^S) & \cdots \\ \cdots (R_{gH2}^S - R_{gH1}^S) & (R_{gH1}^S) & (R_{gH0}^C - R_{gH1}^C) & (R_{gH1}^C - R_{gH2}^C) & \cdots \\ & R_{gH3}^S & (R_{gH2}^S + R_{gH1}^S) & (R_{gH1}^C - R_{gH2}^C) & (R_{gH0}^C - R_{gH3}^C) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$[M]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots 2^2(M_{gH0}^C + M_{gH4}^C) & 1^2(M_{gH1}^C + M_{gH3}^C) & 0 & 1^2(M_{gH1}^S - M_{gH3}^S) & -2^2M_{gH4}^S & \dots \\ \dots 2^2(M_{gH1}^C + M_{gH3}^C) & 1^2(M_{gH0}^C + M_{gH2}^C) & 0 & -1^2M_{gH2}^S & -2^2(M_{gH3}^S + M_{gH1}^S) & \dots \\ \dots & 2^2M_{gH2}^C & 1^2M_{gH1}^C & 0 & -1^2M_{gH1}^S & -2^2M_{gH2}^S & \dots \\ \dots 2^2(M_{gH3}^S - M_{gH1}^S) & 1^2M_{gH2}^S & 0 & 1^2(M_{gH0}^C - M_{gH2}^C) & 2^2(M_{gH1}^C - M_{gH3}^C) & \dots \\ & 2^2M_{gH4}^S & 1^2(M_{gH3}^S + M_{gH1}^S) & 0 & 1^2(M_{gH1}^C - M_{gH3}^C) & 2^2(M_{gH0}^C - M_{gH4}^C) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[K]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots (K_{gH0}^C + K_{gH4}^C) & (K_{gH1}^C + K_{gH3}^C) & K_{gH2}^C & (K_{gH1}^S - K_{gH3}^S) & -K_{gH4}^S & \dots \\ \dots (K_{gH1}^C + K_{gH3}^C) & (K_{gH0}^C + K_{gH2}^C) & K_{gH1}^C & -K_{gH2}^S & -(K_{gH3}^S + K_{gH1}^S) & \dots \\ \dots & K_{gH2}^C & K_{gH1}^C & \frac{1}{2}K_{gH0}^C & -K_{gH1}^S & -K_{gH2}^S & \dots \\ \dots (K_{gH3}^S - K_{gH1}^S) & K_{gH2}^S & K_{gH1}^S & (K_{gH0}^C - K_{gH2}^C) & (K_{gH1}^C - K_{gH3}^C) & \dots \\ & K_{gH4}^S & (K_{gH3}^S + K_{gH1}^S) & K_{gH2}^S & (K_{gH1}^C - K_{gH3}^C) & (K_{gH0}^C - K_{gH4}^C) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[P]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots (Q_{gH0}^C + Q_{gH4}^C) & (Q_{gH1}^C + Q_{gH3}^C) & Q_{gH2}^C & (Q_{gH1}^S - Q_{gH3}^S) & -Q_{gH4}^S & \dots \\ \dots (Q_{gH1}^C + Q_{gH3}^C) & (Q_{gH0}^C + Q_{gH2}^C) & Q_{gH1}^C & -Q_{gH2}^S & -(Q_{gH3}^S + Q_{gH1}^S) & \dots \\ \dots & Q_{gH2}^C & Q_{gH1}^C & Q_{gH0}^C & -Q_{gH1}^S & -Q_{gH2}^S & \dots \\ \dots (Q_{gH3}^S - Q_{gH1}^S) & Q_{gH2}^S & Q_{gH1}^S & (Q_{gH0}^C - Q_{gH2}^C) & (Q_{gH1}^C - Q_{gH3}^C) & \dots \\ & Q_{gH4}^S & (Q_{gH3}^S + Q_{gH1}^S) & Q_{gH2}^S & (Q_{gH1}^C - Q_{gH3}^C) & (Q_{gH0}^C - Q_{gH4}^C) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$[M_H]_2 = \begin{bmatrix} \dots & & & & & \\ & 2^2M_H & & & & \\ & & 1^2M_H & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 1^2M_H & \\ & & & & & 2^2M_H & \\ & & & & & & \dots \end{bmatrix} \quad [K_H]_2 = \begin{bmatrix} \dots & & & & & \\ & K_H & & & & \\ & & K_H & & & \\ & & & \frac{1}{2}K_H & & \\ & & & & K_H & \\ & & & & & K_H & \\ & & & & & & \dots \end{bmatrix}$$

$$[H]_2 = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots (R_{gH0}^C + R_{gH4}^C) & (R_{gH1}^C + R_{gH3}^C) & R_{gH2}^C & (R_{gH1}^S - R_{gH3}^S) & -R_{gH4}^S & \dots \\ \dots (R_{gH1}^C + R_{gH3}^C) & (R_{gH0}^C + R_{gH2}^C) & R_{gH1}^C & -R_{gH2}^S & -(R_{gH3}^S + R_{gH1}^S) & \dots \\ \dots & \sum_{p=0}^4 R_{gHp}^C & \sum_{p=0}^4 R_{gHp}^C & 0 & \sum_{p=1}^4 R_{gHp}^S & \sum_{p=1}^4 R_{gHp}^S & \dots \\ \dots & (R_{gH3}^S - R_{gH1}^S) & R_{gH2}^S & R_{gH1}^S (R_{gH0}^C - R_{gH2}^C) & (R_{gH1}^C - R_{gH3}^C) & \dots \\ & R_{gH4}^S & (R_{gH3}^S + R_{gH1}^S) & R_{gH2}^S (R_{gH1}^C - R_{gH3}^C) & (R_{gH0}^C - R_{gH4}^C) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$