

三次元弾性有限要素法による亀裂先端近傍の応力解析

河野俊一*・清水茂俊*

Investigation of Stresses in the Vicinity of Crack Tip through the Three Dimensional Elastic Finite Element Analysis

Shun-ichi KAWANO and Shigetoshi SHIMIZU

Abstract

The object of this paper is to find the stress distributions through the thickness direction by using the three dimensional elastic finite element method (3-D FEM).

First, the authors propose the new procedure for the FEM calculation without assembling the stiffness matrix $[K]$, because the 3-D FEM requires the large storage core for $[K]$. Furthermore, the deflection vectors obtained by the two dimensional FEM are used as the initial values for the iteration method, which is programmed in the 3-D FEM. In consequence, it is clear that the present method is able to analyse the problem with a large number of nodal points within the storage core and to expect the good convergence of solutions within a few number of iterations.

Finally, the stress distribution and the stress intensity factor K_I through the thickness direction are evaluated by using the present FEM program. At the center of thickness, the thickness directional stress is effected on the plate thickness B , but the other stresses and K_I are almost independent of B .

1. 緒言

脆性破壊発生時の破壊靱性は、板厚が十分厚い場合は平面ひずみ、薄い場合には平面応力条件下における材料定数であるといわれている。ところで、実構造物では 10 mm から 30 mm の板厚材も多く使用され、この範囲の板厚では単純に平面ひずみあるいは平面応力破壊が生ずると定義するには問題がある。すなわち、破壊強度に及ぼす応力の多軸度の影響—板厚効果—を考慮しなければならない。しかし、亀裂先端近傍の三次元応力の理論解析は非常に困難であるので、現状では有限要素法 (FEM) 等の数値解析が多く用いられている。

一般に三次元 FEM を用いて数値解析を行う場合、次のような困難さを伴う。三次元では 1 節点の自由度が平面問題の 2 に対して 3 にふえる事のみならず、精度の良い解を得るためには多くの要素分割数を必要とする。その結果、大きな連立方程式を解くことが要求され、実際の問題に適用する際計算機の能力限界がし

ばしば厳しい制約となることが多い。

そこで本報告は、まず 20 節点アイソパラメトリック要素を用い単一要素に対する解の精度の向上をはかり、次に全体剛性マトリックスを組むことなしに連立方程式を解くプログラミングを提案してディメンジョンの大幅な縮小化を試みた。

さらに、上記のプログラムを用いてコンパクト引張試験片について弾性応力解析を行い、亀裂先端近傍の応力分布および応力拡大係数 K_I について考察を行った。

2. 計算方法

通常の FEM 計算は、全体の剛性マトリックス $[K]$ を組み、次に示す連立方程式をバンドマトリックス法あるいは反復法によって解く方法が一般的である。^{1)~4)}

$$\{P\} = [K]\{U\} \quad \dots\dots (1)$$

ここで $\{P\}$, $\{U\}$ はそれぞれ荷重マトリックス、変位マトリックスである。例えばバンドマトリックス法では $[K]$ の記憶容量は次のように表わされる。

* 機械工学科

$$\left. \begin{aligned} \text{記憶容量} &= 3N_p \cdot NB_{\max} \\ NB_{\max} &= 3 \cdot (I_{\max} + 1) \\ N_p &: \text{総節点数} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

NB_{\max} はいわゆるバンド幅であり、各要素の最大節点番号と最小節点番号の最大差 I_{\max} によって決定される。後述のコンパクト引張試験片 (CTS) の要素分割に式 (2) を当てはめると、 $NB_{\max} = 2840$, $N_p = 1717$ であるので、 $[K]$ に必要な記憶容量は約30メガバイトとなり、一般の大型計算機をもってしてもはるかに能力を越えている。

そこで著者らは各要素について逐次共役傾斜法⁵⁾ を適用する計算方法を提案し、記憶容量の縮少を試みた。

すなわち、 m 回反復後の近似解 \tilde{u}_j に対する残差 r_i は次式で表わされる。

$$r_i = P_i - \sum_{j=1}^n k_{ij} \tilde{u}_j \quad \dots\dots (3)$$

ただし、 P_i は節点荷重、 k_{ij} は $[K]$ の要素である。Fig. 1 に示すような要素分割を行うと、各要素について次の関係が成り立つ。

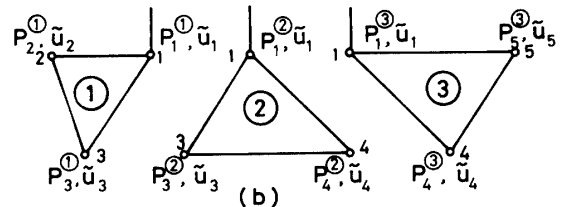
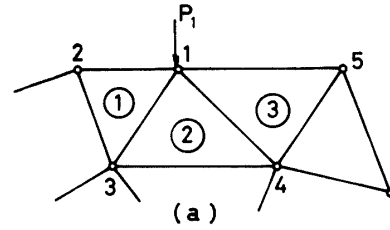
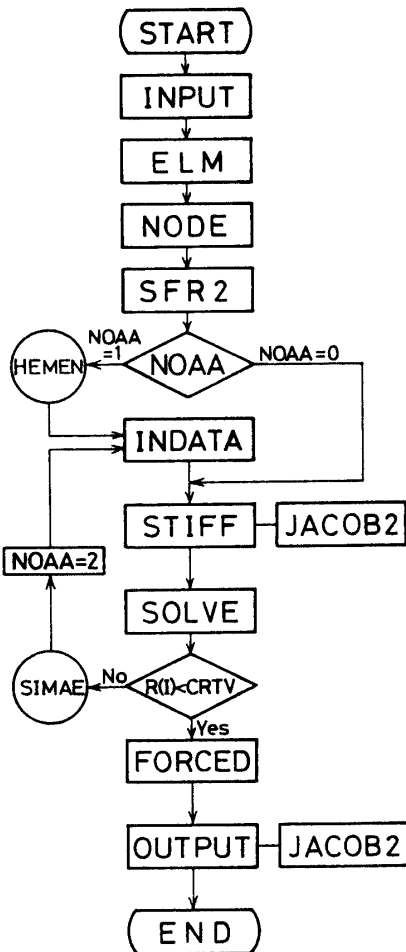


Fig. 1

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \\ P_3^{(1)} \end{Bmatrix} &= [K_e^{(1)}] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \end{Bmatrix}, & \begin{Bmatrix} P_1^{(2)} \\ P_3^{(2)} \\ P_4^{(2)} \end{Bmatrix} &= [K_e^{(2)}] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_4 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} P_1^{(3)} \\ P_4^{(3)} \\ P_5^{(3)} \end{Bmatrix} &= [K_e^{(3)}] \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_4 \\ \tilde{u}_5 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots (4)$$



- 注) □ は Subroutine を示す
 INPUT: 二次元要素数節点数材料定数の読み込み [D] マトリックス作成, 印刷
 ELM: 要素構成節点番号の読み込みと作成, 印刷
 NODE: 境界条件, 節点座標荷重, 変位の読み込み, 作成, 印刷
 SFR2: 形状関数, 微分した形状関数の積分値の計算
 INDATA: 外部記憶装置からの変位の読み込み
 STIFF: 要素1コの剛性マトリックス作成
 JACOBI2: Jacobian の計算と [B] マトリックスの作成
 SOLVE: 共役傾斜法による計算
 FORCED: 支持節点の反力の計算
 OUTPUT: 歪, 応力, 変位, 反力の印刷
 ○は外部記憶装置
 HEMEN: 二次元 F.E.M による変位の記憶
 SIMAE: 三次元 F.E.M による変位の記憶

Fig. 2 Flow chart of the present three dimensional elastic FEM program

ここで $[K_i^{(i)}]$ は要素 i のみの剛性マトリックスである。節点 1 の力のつり合に注目すると

$$P_1 = P_1^{(1)} + P_1^{(2)} + P_1^{(3)} \quad \dots (5)$$

となる。式 (5) の P_1 は節点 1 に作用する外力、 $P_1^{(i)} (i=1\sim 3)$ は内力に相当する。式 (4), (5) を式 (3) に代入すると残差 r_1 は次のようになる。

$$\begin{aligned} r_1 &= (P_1^{(1)} - \sum_{j=1,2,3} k_{1j}^{(1)} \bar{u}_j) + (P_1^{(2)} - \sum_{j=1,3,4} k_{1j}^{(2)} \bar{u}_j) \\ &\quad + (P_1^{(3)} - \sum_{j=1,4,5} k_{1j}^{(3)} \bar{u}_j) \\ &= r_1^{(1)} + r_1^{(2)} + r_1^{(3)} \end{aligned} \quad (6)$$

すなわち $r_i^{(i)} (i=1\sim 3)$ は要素 i のみにおける残差とみることができる。従って、各要素ごとに計算した $r_i^{(i)}$ を式 (6) に代入して r_j を求め、次にこの r_j と式 (5) に示す P_j より $(m+1)$ 回目の近似解が共役傾斜法で計算できる。以上の操作をくり返すと、全体の剛性マトリックスを組むことはなしに、式 (1) の解が求まる。

ところで、上述の共役傾斜法は n 元の連立方程式に対して n 回の反復計算で解が収束することが理論的に証明されている。しかし、方程式の元が多くなると計算機そのものの精度の限界（けた落誤差）から、解の収束性が悪くなることが考えられる。

そこで次に平面応力あるいは平面ひずみ条件で計算した二次元 FEM の解を第 0 次の近似解として与え、収束までの計算時間の短縮を試みた。

本プログラムのフローチャートを Fig. 2 に示す。なお、板厚方向の各節点番号は、平面的に要素分割すれば自動的に割り振りするようにプログラミングされており、入力データ作製に要する手間は二次元の場合とほとんど変わらない。

3. 計算結果および考察

3.1 解の収束性に対する検討

三次元 FEM 解析は膨大な記憶容量と計算時間が必要であるので、数値解析の精度が保証できる範囲内で要素数を減らすことが経済的である。一般に FEM は応力勾配が大きい所では精度が悪いといわれている。そこで、どの程度の分割で亀裂先端近傍の応力を精度良く求めることができるかどうか検討するために、まず二次元応力解析を行った。ここで座標軸は Fig. 3 に示すようにとる。

Table 1 に総要素数、総節点数を示す。Fig. 4 に x_1 軸上における σ_{22} の分布を示す。なお、図の縦軸は

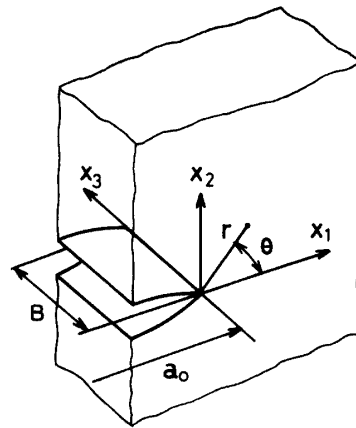


Fig. 3 Schematic illustration of the coordinate for the cracked plate.

Table 1 Total number of nodes and meshes

Type	No. nodes	No. meshes
A	398	120
B	340	102
C	224	66

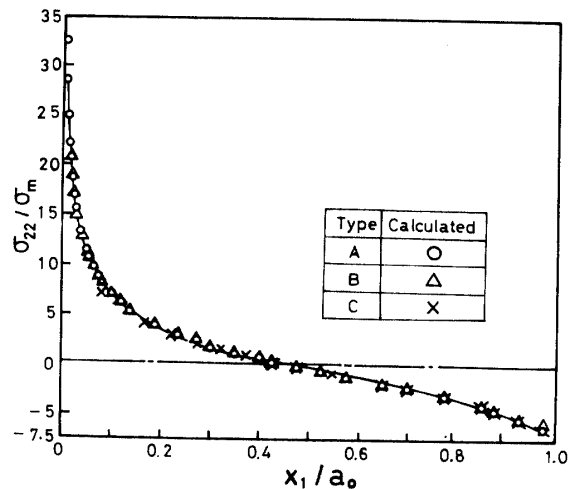


Fig. 4 The x_2 -directional stresses distributed along the x_1 axis

σ_{22} をリガメント部に作用する平均引張応力 σ_m で除し、横軸は x_1 を亀裂長さ a_0 で除して無次元化している。 x_1/a_0 が 0.08 以上では、要素分割数の相異にもかかわらず、全ての計算結果はほぼ同一の値となった。しかし、 x_1/a_0 が 0.08 以下では要素分割数の最も少ない C-Type ではかなりの誤差を生ずるものと考えられる。そこで本計算では計算時間と解の精度の兼ね合いから、総要素数 340 の B-Type を三次元解析にも採用することにする。

Fig. 5 に要素分割図を示す。なお、試験片の対称性からその1/4について解析し、板厚方向は等分に3分割している。総要素数、総節点数はそれぞれ306, 1717である。

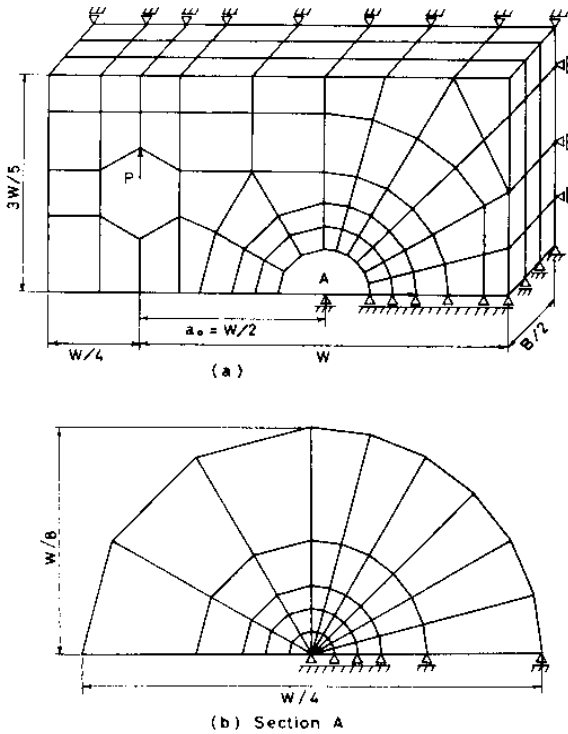


Fig. 5 Finite-element idealization for crack configuration of the compact tension specimen.

Fig. 6 に亀裂先端近傍 ($x_1/a_0 \doteq 0.005, x_2/a_0 \doteq 0$) における板厚方向の σ_{33}/σ_m の分布を示す。ここで x_3/a_0 が0および0.75はそれぞれ板表面および板中央を表わし、板厚と亀裂長さの比 B/a_0 は1.5である。同図から明らかなように反復回数 No. Rep が100の場合、各要素の接合部で著しい応力の不連続が見られる。この不連続は反復回数の増加と共に次第に消失し340回ではほぼ滑らかな応力分布が得られた。また510回以上では反復回数の影響はなくなると考えられる。また、340回の解と510回以後の解に有為な差は見られず、理論上では No. Rep が1700程度で解の収束が保証されているのに対し、本計算ではその1/5程度で実用に供しうる解が求まることがわかった。

なお、本計算では第0次の近似解として、Fig. 4 に示した二次元 FEM による計算結果 (B-Type) を採用しているの、 x_1, x_2 方向の応力およびひずみは板厚方向 (x_3 方向) のそれらの値と比較して反復回数の影響は非常に少なかった。

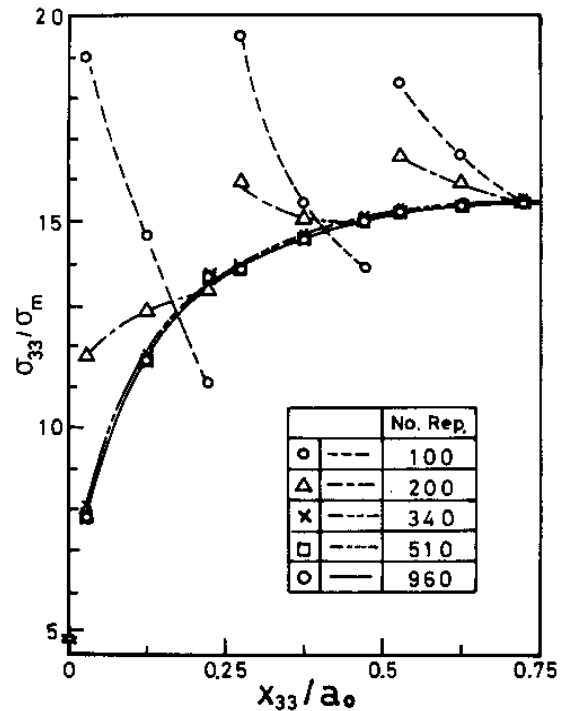


Fig. 6 Convergence of the finite element solutions by using present program

3.2 亀裂先端の応力およびひずみ分布

Fig. 7~11 に亀裂先端近傍 ($x_1/a_0 \doteq 0.005, x_2/a_0 \doteq 0$) における板厚方向の応力およびひずみの分布を示す。なお、実線および破線は B/a_0 がそれぞれ1.5および

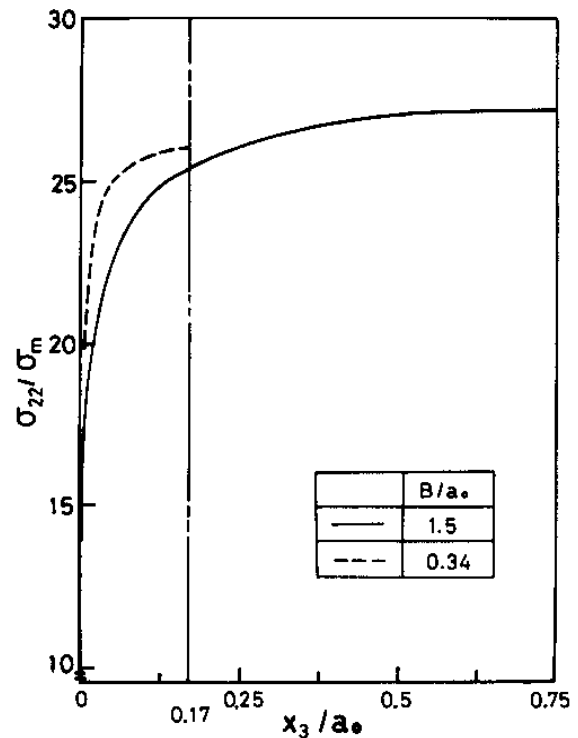


Fig. 7 Distribution of σ_{11}/σ_m through the thickness direction

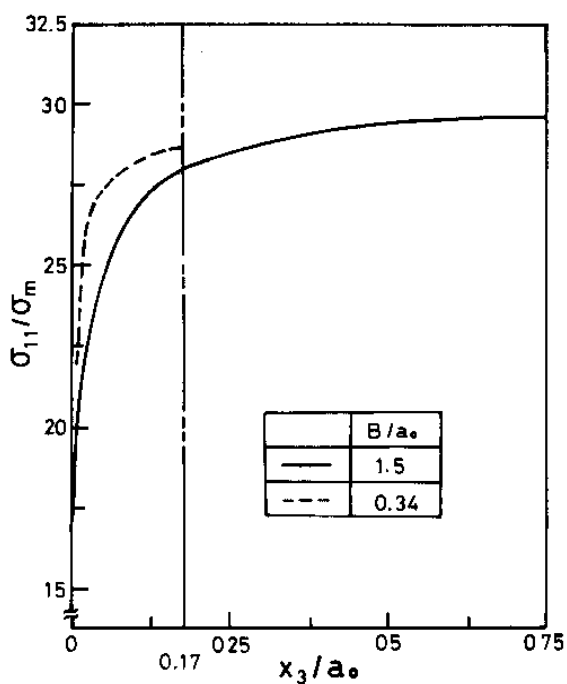


Fig. 8 Distribution of σ_{11}/σ_m through the thickness direction

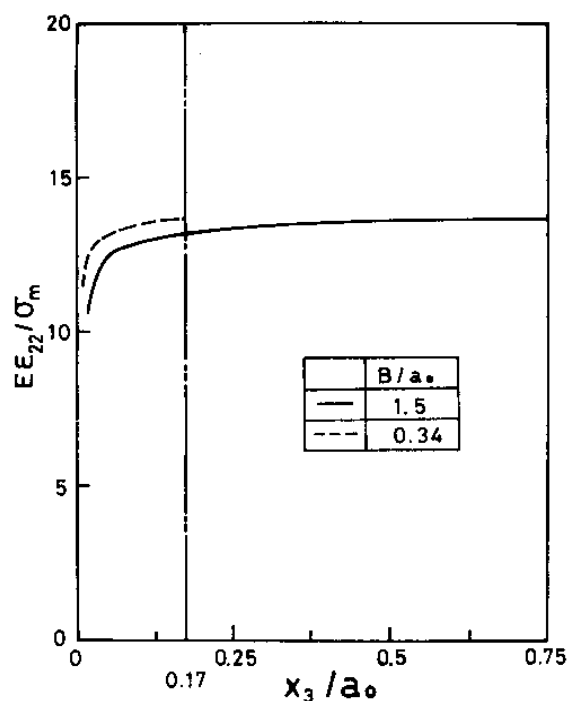


Fig. 10 Distribution of $E\epsilon_{22}/\sigma_m$ through the thickness direction

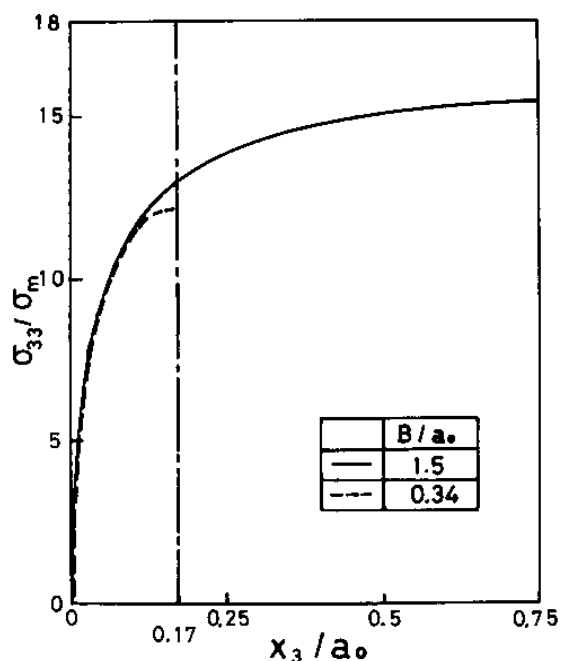


Fig. 9 Distribution of σ_{33}/σ_m through the thickness direction

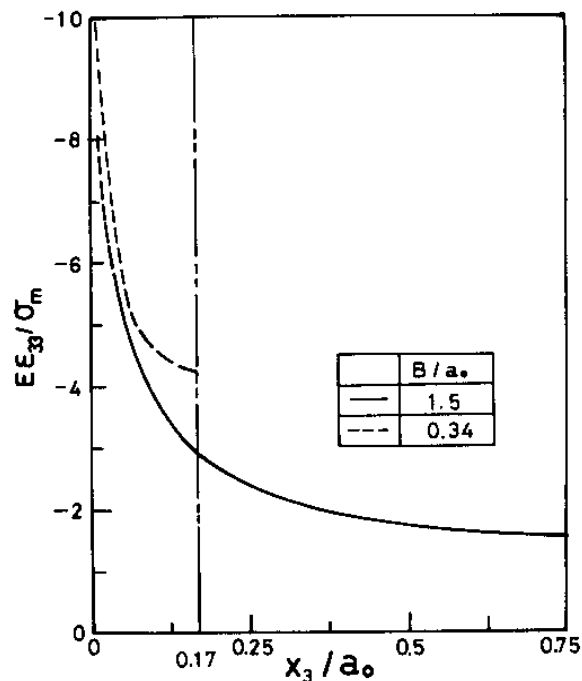


Fig. 11 Distribution of $E\epsilon_{33}/\sigma_m$ through the thickness direction

0.34の計算結果である。

Fig. 7, 8 に示すように x_3/a_0 が0から0.1の範囲では, $\sigma_{11}/\sigma_m, \sigma_{22}/\sigma_m$ は x_3/a_0 の増加に伴って急激に増加し, その度合は B/a_0 が小さい, すなわち板厚が小さい程大きい。しかし, x_3/a_0 が0.1以上では増加の程度はそれほどでなく, 板厚中央部では両計算結果の差はほとんど見られなかった。

Fig. 10 に示す ϵ_{22} についても σ_{11}, σ_{22} と同様な傾向があった。

これに対して板厚中央における σ_{33}/σ_m は, Fig. 9 に示すように B/a_0 が小さい程低くなっており, 板厚拘束の影響がある。

また Fig. 11 に示す $-\epsilon_{33}$ の分布から明らかなように B/a_0 が1.5の場合でも板厚中央は平面ひずみ ($\epsilon_{33} = 0$) 条件を満足せず, 平面ひずみを実現するためには非常に大きな B/a_0 が必要であることがわかる。

3.3 応力拡大係数

三次元の応力拡大係数 K_I を平面問題に準じて求めることにする。すなわち, 亀裂先端近傍の変位 u, v は次式のように表わされている。

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos \frac{\theta}{2} \left\{ 2(1-\nu) + 2(1+\nu) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} + \dots \\ v &= \frac{K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \left\{ 4 - 2(1+\nu) \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ただし, r, θ は Fig. 3 に示すように亀裂先端を原点とした極座標, u, v は x_1, x_2 方向の変位である。 $\theta = \pi$ とおくと式(7)は次のようになる。

$$u = 0 + \dots, \quad v = \frac{4K_I}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} + \dots$$

上式の第2式より

$$K_I = \frac{E\nu}{4} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} + O(r) \quad (8)$$

となる。したがって K_I は $r_{\theta=0} = x_1$ を限りなく0に近づけることによって求めることができる。

一方, 平面ひずみ条件下の K_I は次に示す ASTM E 399⁶⁾ 規格より計算できる。

$$K_I = (P/BW^{1/2}) \cdot f(a/W) \quad (9)$$

ただし

$$\begin{aligned} f(a/W) &= (2+a/W)(0.886 + 4.64 a/W - 13.32 a^2/W^2 \\ &+ 14.72 a^3/W^3 - 5.6 a^4/W^4)/(1-a/W)^{3/2} \end{aligned} \quad (10)$$

Fig. 12 に亀裂縁上における変位 v と亀裂先端からの距離 x_1 の関係を示す。同図から明らかなように, 変位 v は板厚中央で最大となり, 既報⁷⁾で著者らが示した亀裂先端開口変位の板厚方向の分布と同様な傾向を示した。外挿法によって得た $x_2=0$ における v

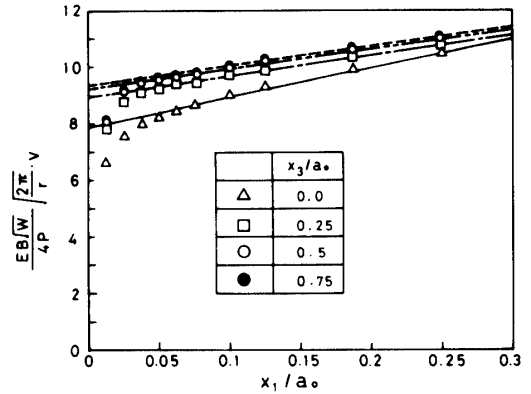


Fig. 12 The x_1 -directional deflection along the crack surface

と式(8), (9)から修正係数 $f(a/W)$ を求めると Fig. 13 に示すようになる。 B/a_0 が0.35および1.5の場合, 板表面における $f(a/W)$ は8.9および8.1と異なった値となったが, 板厚中央ではほぼ等しい値(9.2および9.4)が得られた。

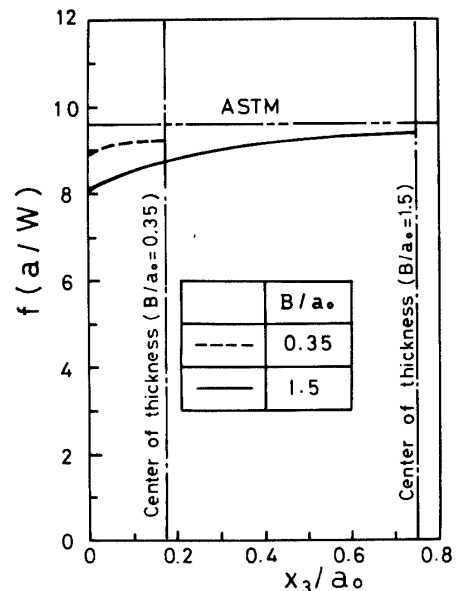


Fig. 13 Correction factor for the various B/a_0

一方, ASTM 規格の式(10)による $f(a/W)$ は9.6であり, 板厚中央の値に近似している。この結果より, 板厚中央における $f(a/W)$ は B/a_0 に無関係に平面ひずみ条件下の値で近似できることがわかる。

4. 結 言

一般に三次元 FEM 解析は、全体の剛性マトリックス $[K]$ に要する記憶容量が膨大となるため、計算機の能力を超え実行不可能となることが多い。そこで、著者らは全体の $[K]$ を組まずに解を求める計算方法を提案し、次に本計算方法による解の収束性の検討を行った。さらに、本 FEM プログラムを用いてコンパクト引張試験片の亀裂先端近傍の応力を解析した。得られた結果を要約すると次のようになる。

1) 著者らの提案した計算方法によって、三次元 FEM に要する記憶容量が大幅に節減できた。さらに、本プログラムに組み込まれた反復法の初期値として、二次元 FEM による解を採用することにより、著しい計算時間の短縮が可能となった。

2) 板厚中央における σ_{33} に及ぼす板厚 B の影響はかなり大きい。しかし他の応力は B には無関係にほぼ一定となった。

3) 板厚中央における修正係数 $f(a/W)$ は、 B に無

関係に平面ひずみ条件下のそれではほぼ近似できる。したがって、応力拡大係数 $K_I (= P \cdot f(a/W) / B \sqrt{W})$ に及ぼす B の影響が少ないことがわかった。

参 考 文 献

- 1) Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method, McGraw-Hill, (1977).
- 2) Gallagher, R. H., Finite Element Analysis: Fundamentals, Prentice-Hall (邦訳: 川井監訳, ギャラガー有限要素法の基礎, 丸善)
- 3) 山田嘉昭, 塑性・粘弾性, 有限要素法の基礎と応用シリーズ 6, 培風館, (1980).
- 4) 有限要素法ハンドブック: I 基礎編, 鷲津他共編, 培風館, (1981).
- 5) 赤坂, 数値解析, 応用数学講座 7 巻, コロナ社
- 6) ASTM: Standard Test Method for PLANE-STRAIN FRACTURE TOUGHNESS OF METALLIC MATERIALS, ASTM Designation, E399-74 (1974).
- 7) 永井, 清水他, 大規模降伏破壊強度に及ぼす板厚の影響について, 日本造船学会論文集, No. 146, 189 (1980).

(昭和 58 年 4 月 15 日 受理)