ビーター分布をする獨立確率變數の商の分布について

真　野　孝　義

Beta-分布をする二つの独立確率変数ξとηの商の分布函数を求めて見よう。

ξ, ηの分布函数を

$$f_1(\xi)=\frac{1}{B(p_1,q_1)}\cdot\xi^{p_1-1}\cdot(1-\xi)^{q_1-1} \qquad 0\leqq\xi\leqq1,\quad p_1>0,\quad q_1>0$$

$$f_2(\eta)=\frac{1}{B(p_2,q_2)}\cdot\eta^{p_2-1}\cdot(1-\eta)^{q_2-1} \qquad 0\leqq\eta\leqq1,\quad p_2>0,\quad q_2>0$$

として，$\zeta=\xi/\eta$ の分布函数を求めればよろしい。

二変数の場合ζの分布函数$f(\zeta)$は $f_1(\xi)\cdot f_2(\eta)\cdot d\xi\cdot d\eta$ を $\xi/\eta\leqq\zeta$ を満足する(ξ,η)の領域で積分すれば求め得られる。

$$f(\zeta)\cdot d\zeta=\int_{\xi/\eta\leqq\zeta}f_1(\xi)\cdot f_2(\eta)\cdot d\xi\cdot d\eta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)に$\xi=\xi$, $\zeta=\xi/\eta$ なる変数の変換を行えば

$$g(\xi,\eta)=f_1(\xi)\cdot f_2(\eta)$$

$$g(\xi,\eta)\cdot d\xi\cdot d\eta=g(\xi,\eta)\cdot\left|\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(\xi,\zeta)}\right|\cdot d\xi\cdot d\zeta$$

然るに

$$\frac{\partial(\xi,\zeta)}{\partial(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}1 & \dfrac{1}{\eta}\\ 0 & -\dfrac{\xi}{\eta^2}\end{vmatrix}=-\frac{\xi}{\eta^2}$$

従ってξ,ζの同時確率函数$h(\xi,\zeta)$は

$$h(\xi,\zeta)=g(\xi,\eta)\cdot\frac{\eta^2}{\xi}=f_1(\xi)\cdot f_2(\eta)\cdot\frac{\eta^2}{\xi}=f_1(\xi)\cdot f_2\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\cdot\frac{\xi}{\zeta^2}$$

故に(1)は次となる。

$$f(\zeta)\cdot d\zeta=\left[\int_0^1 h(\xi,\zeta)\cdot d\xi\right]d\zeta=\left[\int_0^1 f_1(\xi)\cdot f_2\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)\cdot\frac{\xi}{\zeta^2}d\xi\right]d\zeta$$

$$=\left[\frac{1}{B(p_1,q_1)\cdot B(p_2,q_2)}\int_0^1\xi^{p_1-1}(1-\xi)^{q_1-1}\cdot\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^{p_2-1}\cdot\left(1-\frac{\xi}{\zeta}\right)^{q_2-1}\cdot\frac{\xi}{\zeta^2}d\xi\right]d\zeta$$

$$=\left[\frac{1}{B(p_1,q_1)\cdot B(p_2,q_2)}\cdot\frac{1}{\zeta^{p_2+1}}\cdot\int_0^1\xi^{p_1+p_2-1}\cdot(1-\xi)^{q_1-1}\cdot\left(1-\frac{\xi}{\zeta}\right)^{q_2-1}d\xi\right]d\zeta$$

q_1 又は q_2 が正整数なるときは有限級数と被積分級数はなるが q_1 又は q_1 が正整数ならざるときは無限級数に展開されることとなって

$$=\left[\frac{1}{B(p_1,q_1)\cdot B(p_2,q_2)}\cdot\frac{1}{\zeta^{p_2+1}}\int_0^1\xi^{p_1+p_2-1}\cdot(1-\xi)^{q_1-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{q_2-1}{n}\left(\frac{\xi}{\zeta}\right)^n d\xi\right]d\zeta$$

$$=\left[\frac{1}{B(p_1,q_1)\cdot B(p_2,q_2)}\cdot\frac{1}{\zeta^{n+p_2+1}}\int_0^1\xi^{p_1+p_2+n-1}(1-\xi)^{q_1-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)\binom{q_2-1}{n}d\xi\right]d\zeta$$

$$=\left[\frac{1}{B(p_1,q_1)\cdot B(p_2,q_2)}\cdot\frac{1}{\zeta^{n+p_2+1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{q^2-1}{n}\int_0^1\xi^{p_1+p_2+n-1}\cdot(1-\xi)^{q_1-1}d\xi\right]d\zeta$$

なお一様收斂性及び$\xi=0$，1の点の吟味をすれば積分出来ることとなった。