

# 単純曲げ又は曲げに伴う剪断を受ける切欠き又は盛り上げを有する半無限板の應力について

野村 恭雄

## 1. 緒言

表記の一般解及び一様な張力をうける場合については鶴戸口博士<sup>1)</sup>が双極座標を巧妙に使用されて解決されている。その解法と同方法によって、単純曲げ又は曲げに伴う剪断を受ける場合を取扱ってみた。

## 2. 一般解

説明の都合上、鶴戸口博士の解法を再録する。Fig. 1の如く半無限板の直線縁を  $y$  軸に、切り欠き又は盛り上げ円弧の中心を通って之に垂直に  $x$  軸をとり、円弧と直線縁との交点  $O_1, O_2$  を両極とする双極座標を

$$z = i a \coth \frac{w}{2}, \quad z = x + i y, \quad w = \alpha + i \beta \quad (1)$$

とすると

$$x = \frac{a \sin \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \sinh \alpha}{\cosh \alpha - \cos \beta} \quad (2)$$

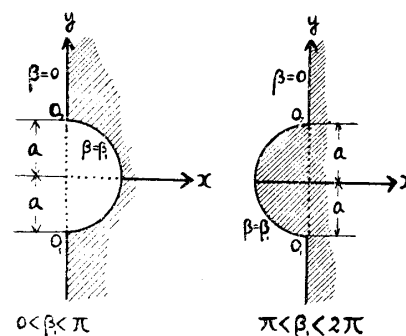


Fig. 1

を考えると、直線縁は  $\beta=0$ 、円弧は  $\beta=\beta_1$  で指定できる。但し切欠きの場合は  $0 < \beta_1 < \pi$ 、盛り上げの場合は  $\pi < \beta_1 < 2\pi$  である。そこで

$$h\chi_1 = \int_0^\infty \phi(\beta, n) \cos n \alpha dn + \int_0^\infty \psi(\beta, n) \sin n \alpha dn$$

とし、Jeffery<sup>2)</sup>の式を満足し更に  $\beta=0$  の条件を満足する  $\phi(\beta, n), \psi(\beta, n)$  を

$$\left. \begin{aligned} \phi(\beta, n) &= A \sinh n \beta \sin \beta + B \left( \cosh n \beta \sin \beta - \frac{1}{n} \sinh n \beta \cos \beta \right) \\ \psi(\beta, n) &= A' \sinh n \beta \sin \beta + B' \left( \cosh n \beta \sin \beta - \frac{1}{n} \sinh n \beta \cos \beta \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

今  $h\chi_0$  を Fourier 積分で示し

$$h\chi_0 = \int_0^\infty f(\beta, n) \cos n \alpha dn + \int_0^\infty g(\beta, n) \sin n \alpha dn \quad \dots \dots \dots (4)$$

但し  $f(\beta, n), g(\beta, n)$  は既知とする。

とすると  $\beta=\beta_1$  の条件として

$$\phi' + f' = 0, \quad \psi' + g' = 0, \quad \phi + f = 0, \quad \psi + g = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

之らより  $A, B, A', B'$  を決定すれば応力  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \tau_{\alpha\beta}$  は次の式から求まる。

$$\left. \begin{aligned} a\sigma_\alpha &= \left\{ (\cosh\alpha - \cos\beta) \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \sinh\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta \frac{\partial}{\partial\beta} + \cosh\alpha \right\} h\chi \\ a\sigma_\beta &= \left\{ (\cosh\alpha - \cos\beta) \frac{\partial^2}{2\alpha^2} - \sinh\alpha \frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta \frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta \right\} h\chi \\ a\tau_{\alpha\beta} &= -(\cosh\alpha - \cos\beta) \frac{\partial^2(h\chi)}{\partial\alpha \cdot \partial\beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (6)$$

但し  $h\chi = h\chi_0 + h\chi_1$  で  $h$  は写像縮小率:  $h = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\alpha}\right)^2}} = \frac{\cosh\alpha - \cos\beta}{a}$

である。

### 3. 単純曲げを受ける場合

Fig. 2 に示す如く  $y = \infty$  附近の応力状態が  $\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$  及び  $\sigma_x$  が直線的に変化する  
場合を考えると、之は単純曲げモーメントを受けた半無限  
限板の場合を示している。今  $x = d$  で  $\sigma_x = 0$  とすると、  
 $y$  の  $\infty$  附近の応力状態は

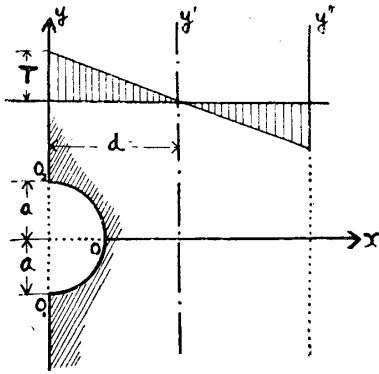


Fig. 2

$$\sigma_x = -\frac{T}{d}(x-d), \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0, \quad T \text{ は } x=0 \text{ での} \\ \text{応力} \quad \dots\dots (7)$$

更に  $x = 2d$  で  $y$  に平行に  $y''$  を考えれば、この一般解  
法で求められた結果は勿論  $y''$  での境界条件  $(\sigma_x)_{y''} =$   
 $(\tau_{xy})_{y''} = 0$  を満足しないが、 $a$  が  $2d$  に比して小さい  
場合には、 $y''$  の応力状態は切欠き又は盛り上げ附近の応

力に殆ど影響しない。従って  $2d \gg a$  の場合には、幅  $2d$  の帯板が単純曲げを受ける場合の切  
欠き又は盛り上げ附近の応力及び形状係数の算定に使用できるわけである。

(7)を満足する Airy の stress function  $\chi_0$  は

$$\chi_0 = -\frac{T}{6d}(x-d)^3$$

であり、之を展開して stress 及び strain に影響を及ぼさない  $x$  の一次項を省略すると

$$\chi_0 = \frac{Tx^2}{2} - \frac{Tx^3}{6d} \quad \dots\dots (8)$$

(8)を双曲座標に変換し、更に写像縮小率  $h$  を乗すると

$$h\chi_0 = \frac{aT}{2} \cdot \frac{\sin^2\beta}{\cosh\alpha - \cos\beta} - \frac{aT}{2} \cdot k \frac{\sin^3\beta}{(\cosh\alpha - \cos\beta)^2}, \quad \text{但し } k = \frac{a}{3d} \quad \dots (9)$$

(9)を Fourier 積分の形に展開すると

$$h\chi_0 = aT \int_0^\infty \frac{\sin\beta \sinh n(\pi - \beta) - k\{n \sin\beta \cosh n(\pi - \beta) + \sinh(\pi - \beta)\}}{\sinh n\pi} \cos n\alpha \, dn \\ 0 < \beta < 2\pi \quad \dots\dots (10)$$

この両辺を  $\beta$  で微分して

$$\frac{\partial(h\chi_0)}{\partial\beta} = aT \int_0^\infty \frac{1}{\sinh n\pi} [\{\cos\beta \sinh n(\pi - \beta) - n \sin\beta \cosh n(\pi - \beta)\} \\ - nk\{\cos\beta \cosh n(\pi - \beta) - n \sin\beta \sinh n(\pi - \beta) - \cosh n(\pi - \beta)\}] \cos n\alpha \cdot dn \\ \dots\dots (11)$$

従って(4)より

$$\left. \begin{aligned} f'(\beta, n) &= \frac{\alpha T}{\sinh n \pi} [\cos \beta \sinh n(\pi - \beta) - n \sin \beta \cosh n(\pi - \beta) \\ &\quad - nk \{ \cos \beta \cosh n(\pi - \beta) - n \sin \beta \sinh n(\pi - \beta) - \cosh n(\pi - \beta) \}] \\ f(\beta, n) &= \frac{\alpha T}{\sinh n \pi} [\sin \beta \sinh n(\pi - \beta) - k \{ n \sin \beta \cosh n(\pi - \beta) + \sinh n(\pi - \beta) \}] \\ g'(\beta, n) &= g(\beta, n) = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

そこで補正函数を

$$hX_1 = \alpha T \left\{ \int_0^\infty \phi(\beta, n) \cos n \alpha dn + \int_0^\infty \psi(\beta, n) \sin n \alpha dn \right\} \dots \dots \dots (13)$$

として、 $\phi(\beta, n)$ ,  $\psi(\beta, n)$  に(3)の形を与え、円弧縁  $\beta = \beta_1$  に対する自由境界条件(5)を使用すると

$$\left. \begin{aligned} \phi' &= A(n \cosh n \beta_1 \sin \beta_1 + \sinh n \beta_1 \cos \beta_1) + B(n + \frac{1}{n}) \sinh n \beta_1 \sin \beta_1 \\ \phi' + f' &= 0 \\ \therefore A(n \cosh n \beta_1 \sin \beta_1 + \sinh n \beta_1 \cos \beta_1) + B(n + \frac{1}{n}) \sinh n \beta_1 \sin \beta_1 \\ &= - \left[ \frac{\cos \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) - n \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \right. \\ &\quad \left. - kn \left\{ \frac{\cos \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1) - n \sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) - \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \right\} \right] \\ \phi + f &= 0 \\ \therefore A \sinh n \beta_1 \sin \beta_1 + B(\cosh n \beta_1 \sin \beta_1 - \frac{1}{n} \sinh n \beta_1 \cos \beta_1) \\ &= \frac{- \sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) + kn \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1) + k \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \\ \psi = \psi' &= 0 \end{aligned} \right\} (14)$$

(14)をとりて  $A$ ,  $B$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} A &= \coth n \pi - kn - \frac{1}{2}(1 - kn \coth n \pi) \frac{\sinh 2n \beta_1 - n \sin 2\beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \\ &\quad + \frac{k}{2} \frac{n \cos \beta_1 (\cosh 2n \beta_1 - 1) + \sin \beta_1 \sinh 2n \beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \\ &\quad + \frac{k}{2} \coth n \pi \frac{\sin \beta_1 (2n^2 + 1 - \cosh 2n \beta_1) - n \cos \beta_1 \sinh n \beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \\ B &= \frac{n^2 \sin^2 \beta_1 (1 - kn \coth n \pi)}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} - kn \frac{n \sin \beta_1 \sinh n \pi + \cos \beta_1 \sinh n \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi (\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1)} \\ A' &= B' = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

之によりこの問題の補正函数における  $\phi$ ,  $\psi$  が具体的に決まり、 $hX_1$  従って  $hX = hX_0 + hX_1$  が完全に求められ、(6)式によって任意の応力成分が求められる訳であるが、鶴戸口博士も指摘されている如く、この種の問題で主として注目を要するのは境界線に沿う主応力  $\sigma_\alpha$  の値である。

之を求めるために(9)及び(13)を(6)に代入して整理すると

$$\frac{\sigma_{\alpha}}{T} = \frac{(\cosh \alpha \cos \beta - 1)^2}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} - 3k \sin \beta \frac{(\cosh \alpha \cos \beta - 1)^2}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} + (\cosh \alpha - \cos \beta) \int_0^{\infty} \phi'' \cos n \alpha d n$$

$$+ \sinh \alpha \int_0^{\infty} n \phi \sin n \alpha d n - \sin \beta \int_0^{\infty} \phi' \cos n \alpha d n + \cosh \alpha \int_0^{\infty} \phi \cos n \alpha d n \quad \dots (16)$$

をうる。直線縁  $\beta=0$  では  $\phi(0)=\phi'(0)=0$ ,  $\phi''(0)=2nA$  であるから

$$\left[ \frac{\sigma_{\alpha}}{T} \right]_{\beta=0} = 1 + 2(\cosh \alpha - 1) \int_0^{\infty} n A \cos n \alpha d n$$

$$= 1 + 2(\cosh \alpha - 1) \int_0^{\infty} n \left[ \coth n \pi - kn - \frac{1}{2}(1 - kn \coth n \pi) \frac{\sinh 2n \beta_1 - n \sin 2\beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \frac{n \cos \beta_1 (\cosh 2n \beta_1 - 1) + \sin \beta_1 \sinh 2n \beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \right. \\ \left. + \frac{k}{2} \coth n \pi \frac{\sin \beta_1 (2n^2 + 1 - \cosh 2n \beta_1) - n \cos \beta_1 \sinh 2n \beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \right] \cos n \alpha d n \quad \dots (17)$$

之が直線縁に沿う主応力の分布式である。

次に円弧縁  $\beta=\beta_1$  に対しては  $\phi$  の境界値は (14) より

$$\phi(\beta_1) = \frac{-\sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) + kn \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1) + k \sin n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi}$$

$$\phi'(\beta_1) = -\frac{\cos \beta_1 \sin n(\pi - \beta_1) - n \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi}$$

$$+ kn \frac{\cos \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1) - n \sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) - \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi}$$

$$\phi''(\beta_1) = \frac{(1 - n^2) \sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) + 2n \cos \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi}$$

$$- kn \frac{(1 - n^2) \cosh n(\pi - \beta_1) \sin \beta_1 + 2n \cos \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} - k \frac{\sin n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi}$$

$$+ 2n(1 - kn \coth n \pi) \frac{n \sin \beta_1 \cosh n \beta_1 - \cos \beta_1 \sinh n \beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} + kn^2 \times$$

$$\frac{\cosh n(\pi - \beta_1)(n \sin 2\beta_1 - \sinh 2n \beta_1) \sinh n(\pi - \beta_1) \{ (n^2 + 1) \sin^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_1 \sinh^2 n \beta_1 \}}{\sinh n \pi (\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1)}$$

従って

$$\left[ \frac{\sigma_{\alpha}}{T} \right]_{\beta=\beta_1} = 2(\cosh \alpha - \cos \beta_1) \int_0^{\infty} n(1 - kn \coth n \pi) \frac{n \sin \beta_1 \cosh n \beta_1 - \cos \beta_1 \sinh n \beta_1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \cos n \alpha d n$$

$$+ k(\cosh \alpha - \cos \beta_1) \int_0^{\infty} n^2 \left[ \frac{\cosh n(\pi - \beta_1)(n \sin 2\beta_1 - \sinh 2n \beta_1)}{\sinh n \pi (\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1)} \right. \\ \left. - \frac{\sinh n(\pi - \beta_1) \{ (n^2 + 1) \sin^2 \beta_1 + \cos^2 \beta_1 \sinh^2 n \beta_1 \}}{\sinh n \pi (\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1)} \right] \cos n \alpha d n + \frac{k \sin \beta_1}{2(\cosh \alpha - \cos \beta_1)} \times$$

$$\left\{ 3 + \frac{\sinh^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\cosh \alpha - \cos \beta_1} + \frac{\sinh^2 \alpha (1 - 7 \sin^2 \beta_1 - \cos \beta \cosh \alpha)}{(\cosh \alpha - \cos \beta_1)^2} + \frac{6(\cosh \alpha \cos \beta_1 - 1)^2}{(\cosh \alpha - \cos \beta_1)^2} \right. \\ \dots (18)$$

之が切欠き又は盛り上げの円弧縁に沿う主応力の分布式である。

更に形状係数(切欠きの応力集中度:  $\alpha=c$ ,  $\beta=\beta_1$  の切欠きの底部)  $\kappa$  は (18) 式において  $\alpha=0$  とした場合即ち

$$\kappa = \frac{\sigma_{\max}}{T} = \frac{[\sigma\alpha]_{\alpha=0, \beta=\beta_1}}{T} \dots\dots\dots (19)$$

の値を求めればよい。

なお  $k=a/3d=0$  は中性軸が  $x \rightarrow \infty$  に移ること即ち一様な引張りの場合となり (17) 又は (18) に  $k=0$  を代入すると、一様な張力をうける鶴戸口博士の結果と一致するのは当然である。

**4. 曲げに伴う剪断力を受ける場合**

矩形断面の梁が曲げに伴い剪断力を受ける場合には、横断面における shearing stress は拋物線状の分布をなし、中性軸位置における maximum shearing stress は mean shearing stress の1.5倍である。又 shearing force が作用する以上、梁は当然断面位置によって変化する bending moment を受ける。このような荷重状態にある梁の plane stress を示す Airy の stress function は Fig. 3 の如く座標軸を選ぶと

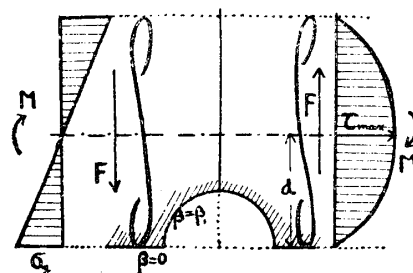


Fig. 3

$$\chi_0 = \frac{p}{4d^2}(x-3d)x^2y \dots\dots\dots (20)$$

何となれば (20) より  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  を計算すると

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial y^2} = 0 \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x^2} = \frac{3p}{2d^3}(x-d)y \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial^2 \chi_0}{\partial x \partial y} = -\frac{3p}{4d^3}(x-2d)x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

即ち  $\sigma_y$  は中性軸  $x=d$  で 0、両縁  $x=0, x=2d$  でその絶対値は相等しくて符号反対な直線分布をなし、 $\sigma_x$  は至るところで 0 であるから、之は曲げ応力を示し、又  $\tau_{xy}$  は  $x=0$  及び  $x=2d$  で 0、中性軸  $x=d$  で maximum  $3p/4d$  の拋物線をなしている。

(21) より任意の横断面の shearing force  $F$  を計算すると

$$F = \int_0^{2d} \tau_{xy} dx = \frac{3p}{4d^3} \int_0^{2d} x(2d-x) dx = p = \text{const}$$

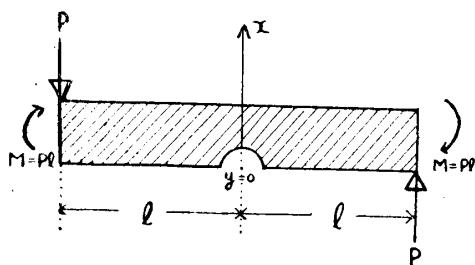


Fig. 4

であり、又  $y$  断面のモーメント  $M$  を計算すると

$$M = \int_0^{2d} \sigma_y (y-d) dy = p y$$

となる。従って shearing force はすべての断面で一定  $p$  であり、 $y$  断面に働く bending moment は  $p$  と原点からの距離  $y$  との積で与えられる。従って梁の状態は Fig. 4 のよう

な力の作用を受ける場合をいみすることになる。

従って (20) を双極座標に変換すると

$$\chi_0 = \frac{\rho}{4d^3} (x^3 y - 3d x^2 y) = \frac{\rho}{4d^3} \left\{ \frac{a^4 \sin^3 \beta \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^4} - \frac{3d a^3 \sin^2 \beta \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} \right\} \dots (22)$$

$$\begin{aligned} \therefore h\chi_0 &= \frac{\rho}{4d^3} \left\{ \frac{a^3 \sin^3 \beta \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} - \frac{3d a^2 \sin^2 \beta \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right\} \\ &= \frac{\rho}{4} k^3 \int_0^\infty \left\{ \frac{n \cos \beta \sinh n(\pi - \beta)}{\sinh n \pi} + \frac{n^2 \sin \beta \cosh n(\pi - \beta)}{\sinh n \pi} \right\} \sin n a d n \\ &\quad - \frac{3\rho}{2} k^2 \int_0^\infty \frac{n \sin \beta \sinh n(\pi - \beta)}{\sin n \pi} \sin n a d n, \quad \text{但し } k = \frac{a}{d} \dots (23) \end{aligned}$$

この両辺を  $\beta$  で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial(h\chi_0)}{\partial \beta} &= \frac{\rho}{4} k^3 \int_0^\infty \left\{ \frac{-n \sin \beta \sinh n(\pi - \beta) - n^3 \sin \beta \sinh(\pi - \beta)}{\sinh n \pi} \right\} \sin n a d n \\ &\quad - \frac{3\rho}{2} k^2 \int_0^\infty \left\{ \frac{n \cos \beta \sinh n(\pi - \beta) - n^2 \sin \beta \cosh n(\pi - \beta)}{\sinh n \pi} \right\} \sin n a d n \dots (24) \end{aligned}$$

従って (4) より

$$\left. \begin{aligned} g'(\beta, n) &= \frac{\rho}{4 \sinh n \pi} [-k^3 n \sin \beta \sinh n(\pi - \beta)(1 + n^2) \\ &\quad - 6k^2 \{n \cos \beta \sinh n(\pi - \beta) - n^2 \sin \beta \cosh n(\pi - \beta)\}] \\ g(\beta, n) &= \frac{\rho}{4 \sinh n \pi} [k^3 \{n \cos \beta \sinh n(\pi - \beta) + n^2 \sin \beta \cosh n(\pi - \beta)\} \\ &\quad - 6k^2 n \sin \beta \sinh n(\pi - \beta)] \\ f'(\beta, n) &= f(\beta, n) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

そこで補正函数  $h\chi_1$  を

$$h\chi_1 = \frac{\rho}{4} \left\{ \int_0^\infty \phi \cos n a d n + \int_0^\infty \psi \sin n a d n \dots (26) \right.$$

とし  $\phi, \psi$  に (3) の形を与えて, 円弧縁  $\beta = \beta_1$  に対する自由境界条件 (5) を使用すると

$$\left. \begin{aligned} \psi'(\beta, n) &= A'(n \cosh n \beta \sin \beta + \cos \beta \sin n \beta) + B'(n + \frac{1}{n}) \sinh n \beta \sin \beta \\ \psi' + g' &= 0 \\ \therefore A'(n \sin \beta_1 \cosh n \beta_1 + \cos \beta_1 \sinh n \beta_1) + B'(n + \frac{1}{n}) \sin \beta_1 \sinh n \beta_1 \\ &= \left[ k^3 n \frac{\sin \beta_1 \sinh(\pi - \beta_1) + n^2 \sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \right. \\ &\quad \left. + 6k^2 n \frac{\cos \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) - n \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \right] \\ \psi + g &= 0 \\ A' \sin \beta_1 \sinh n \beta_1 + B'(\sin \beta_1 \cosh n \beta_1 - \frac{1}{n} \cos \beta_1 \sinh n \beta_1) \\ &= k^3 n \frac{\cos \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) + n \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} - 6k^2 n \frac{\sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \\ \phi(\beta, n) &= \phi'(\beta, n) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

(27)をといて  $A'$ ,  $B'$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} A' &= 6k^2 n \coth n \pi + \frac{k^3 n^2 \sin^2 \beta_1 (1+n^2) - 3k^2 n (\sinh 2n \beta_1 - n \sin 2\beta_1)}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \\ B' &= \frac{1}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \{ 6k^2 n^2 \sin^2 \beta_1 - k^3 n^3 \sin \beta_1 (\cos \beta_1 + n \sin \beta_1 \coth n \pi) \\ &\quad - k^3 n^2 \sinh n \beta_1 (\cosh n \beta_1 - \sinh n \beta_1 \coth n \pi) \} \\ A &= B = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

之によつて  $\phi(\beta, n)$ ,  $\psi(\beta, n)$  が定まり,  $hX = hX_0 + hX_1$  が完全に求められる。この場合も前と同様に, 境界線に沿う主応力  $\sigma_\alpha$  の値を求めてみる。即ち(6)に(22)及び(26)を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\alpha}{p} &= \frac{1}{4a} \left[ \frac{3k^3 \sin^3 \beta \sinh \alpha (4 - 6 \cos \beta \cosh \alpha + 2 \cos^2 \beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^4} + \frac{6k^3 \sin \beta \cos^2 \beta \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^2} \right. \\ &\quad + \frac{6k^2 \sin^2 \beta \sinh \alpha (4 \cos \beta \cosh \alpha - 3 - \cos^2 \beta)}{(\cosh \alpha - \cos \beta)^3} - \frac{6k^2 \cos^2 \beta \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta)} \\ &\quad + (\cosh \alpha - \cos \beta) \int_0^\infty \psi'' \sin n \alpha d n - \sinh \alpha \int_0^\infty n \psi \cos n \alpha d n - \sin \beta \int_0^\infty \psi' \sin n \alpha d n \\ &\quad \left. + \cosh \alpha \int_0^\infty \psi \sin n \alpha d n \right] \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

をうる。

直線縁  $\beta = 0$  では  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ ,  $\psi''(0) = 2nA'$  であるから

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\sigma_\alpha}{p} \right]_{\beta=0} &= \frac{1}{4a} \left[ - \frac{6k^2 \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - 1)} + (\cosh \alpha - 1) \int_0^\infty 2nA' \sin n \alpha d n \right] \\ &= \frac{1}{4a} \left[ - \frac{6k^2 \sinh \alpha}{(\cosh \alpha - 1)} + 2(\cosh \alpha - 1) \int_0^\infty n \left\{ 6k^2 n \coth n \pi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{k^3 n^2 \sin^2 \beta_1 (1+n^2) - 3k^2 n (\sinh 2n \beta_1 - n \sin^2 \beta_1)}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \right\} \sin n \alpha d n \right] \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

之が直線縁に沿う主応力の分布式である。

次に円弧縁  $\beta = \beta_1$  に対しては  $\psi$  の境界値は (27) より

$$\begin{aligned} \psi(\beta_1) &= k^3 n \frac{\cos \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) + n \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} - 6k^2 n \frac{\sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \\ \psi'(\beta_1) &= -k^3 n \frac{\sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) + n^2 \sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \\ &\quad - 6k^2 n \frac{\cos \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) - n \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \\ \psi''(\beta_1) &= k^3 n \frac{(3n^2 - 1) \cos \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1) + n(n^2 - 1) \sin \beta_1 \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} \\ &\quad - 6k^2 n \frac{(n^2 - 1) \sin \beta_1 \sinh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi} - 2k^2 n \frac{3 \sin \beta_1 \cosh n \beta_1 (6 + k n \coth n \pi)}{\sin^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \\ &\quad - k^2 n \frac{\sinh 2n \beta_1 (6 \cos \beta_1 + k \sin \beta_1) \sinh n(\pi - \beta_1) - \sin 2\beta_1 (6 \sin \beta_1 - k) \cosh n(\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi (\sin^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1)} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\sigma_\alpha}{\rho} \right]_{\beta=\beta_1} = & \frac{1}{4\alpha} \left[ \frac{k^3 \sin \beta_1 \sinh \alpha}{2(\cosh \alpha - \cos \beta_1)^3} \sin^2 \beta_1 (16 \cosh \alpha + 7 \cos \beta_1) \right. \\
 & - \cos \beta_1 (18 \sinh \alpha - 19 - 3 \cos^2 \beta_1) + 18 \sin \beta_1 \cos \beta_1 \sinh^2 \alpha + 2 \cosh \alpha (1 - 2 \cos^2 \beta_1) \\
 & + k^2 \sin^2 \beta_1 \sinh \alpha \frac{5 \cos^2 \beta_1 + 26 - 31 \cos \beta_1 \cosh \alpha}{(\cosh \alpha - \cos \beta_1)^2} - k^2 \sinh \alpha \frac{5 \cos^2 \beta_1 + 1}{\cosh \alpha - \cos \beta_1} \\
 & + 2k^2 \int_0^\infty \frac{n^3 \sin \beta_1 \cosh n \beta_1 (6 + k n \coth n \pi)}{\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1} \sin n \alpha d n \\
 & - k^2 \int_0^\infty n^2 \left\{ \frac{\sinh 2n \beta_1 (6 \cos \beta_1 + k \sin \beta_1) \sinh n (\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi (\sinh^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1)} \right. \\
 & \left. - \frac{n^2 \sin^2 \beta_1 (6 \sin \beta_1 - k) \cosh n (\pi - \beta_1)}{\sinh n \pi (\sin^2 n \beta_1 - n^2 \sin^2 \beta_1)} \right\} \sin n \alpha d n \Big] \dots \dots \dots (31)
 \end{aligned}$$

之が切欠き又は盛り上げの円弧縁に沿う主応力である。

## 5. 結 語

以上 (17) 及び (18) 式によって切欠き又は盛り上げをもつ半無限板の単純曲げをうける場合の直線縁及び円弧縁に沿う主応力の分布が求められる。又 (30) 及び (31) 式からは曲げに伴う剪断を受ける場合の直線縁及び円弧縁の主応力が求められる。只この場合、それら各式から主応力を求める場合には Fourier Integral の項は Filon の数値積分を行う必要がある。極点近傍の応力の吟味などについては、鶴戸口博士の論文で詳細に述べられてある。

本論文は鶴戸口博士の論文を曲げ及び剪断をうける場合に拡張したに過ぎない。鶴戸口博士からは貴重な文献を送っていただいたり終始御指導にあづかった。又本学教育学部久保敏彦講師からも、工学部谷岡源三郎助教授からも色々と御助言、御指導賜った。あわせて厚く謝意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 鶴戸口英善: 日本機械学会論文集, 16巻 55号 p.44~51 (昭和25年)
  - 2) L.N.G. Filon: Proc. Roy. Soc. Edinburah, Vol. 49 p.38~47 (1929)
- 鶴戸口英善: 應用数学, 2巻 1号 p.21 (昭和24年)