

凹形不連続箇所を有する帯板の應力について *

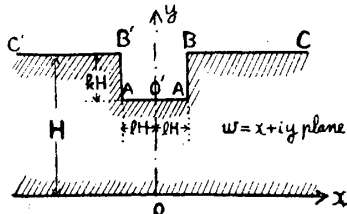
野 村 恭 雄

1. 緒 言

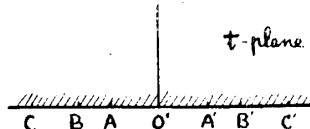
平板などの不連続箇所に応力が集中し、そこが破損の原因になるということは、よく知られている事実である。しかしこの集中する応力の値や、又その附近の応力状態を理論的に求めることは非常に困難なことであって只僅かに凸形不連続箇所について、太田友彌博士、半田孝男両氏¹⁾によって等角写像を巧妙に使って解かれているのみをみるだけであるが、実験的には J. Bruhn²⁾ や E.G. Coker³⁾ その他の人々によって多く研究されている。そこで筆者は凹形不連続箇所を有する帯板について、太田博士と同じく等角写像を用いて、理論的に解いてみた。只この場合も、数値計算は凸形るときと同様に極めて難しいことであり、之は今後の取り残された課題である。

2. 等角写像

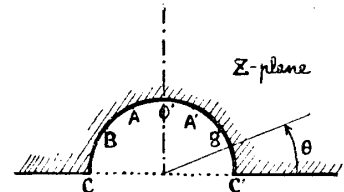
Fig. 1 のような凹形の不連続箇所を有する帯板が両無遠限において、引張りを受ける場合を考える。そして座標軸を図の如くとり、帯板の幅を H 、不連続部の深さを kH 、幅を lH とする。そうして之を $w = x + iy$ -plane とし、先づ次の (1) 式の Schwarz-Christoffel の等角写像函数によって、 w -plane を Fig. 2 の半平面 t -plane の上半分に写像する。



第 1 図



第 2 図



第 3 図

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{C}{t^2 - c^2} \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{t^2 - b^2}} \dots\dots\dots (1)$$

ここで C : 写像係数, a, b, c : w -plane における A, B, C 各点に対応する t -plane の実軸上の点の位置

次に、この t -plane の上半平面を (2) 式によって、Fig. 3 の半円と実軸とに囲まれた z -plane の上半分に写像する。

$$t = \frac{c}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \dots\dots\dots (2)$$

ここで $z = re^{i\theta}$

そこで (1) 式を次の形にかきかえる。

$$d(x + iy) \Big|_{r=1} = -\frac{C}{t^2 - c^2} \sqrt{\frac{t^2 - a^2}{t^2 - b^2}} \frac{dt}{dz} dz \Big|_{r=1} = -\frac{C}{c} \frac{1}{\sin\theta} \sqrt{\frac{\cos^2\theta - a^2/c^2}{\cos^2\theta - b^2/c^2}} d\theta \quad (3)$$

* 昭和31年11月15日, 日本機械学会, 岡山臨時大会において発表

w -plane における境界上の点 (x, y) と, z -plane における (r, θ) との間の関係を知るために, 次の各区間に対して, (3) 式をかきかえる。

i 先づ $C'B'(\theta=0 \sim \cos^{-1} \frac{b}{c})$ に対して。ここで $\frac{c}{b} \cos \theta = \sin \phi_1$ とおくと, $\phi_1 = \sin^{-1} \frac{b}{c} \sim \frac{\pi}{2}$ に対して

$$d(x+iy) \Big|_{r=1} = \frac{C}{a} \left\{ 1 + \frac{\frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\sin^2 \phi_1 - \frac{c^2}{b^2}} \right\} \frac{d\phi_1}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi_1}} \dots\dots\dots (4)$$

ii $B'A'(\theta = \cos^{-1} \frac{b}{c} \sim \cos^{-1} \frac{a}{c})$ に対して。ここで $\sqrt{\frac{1 - a^2 \cos^2 \theta / c^2}{1 - b^2 / a^2}} = \sin \phi_2$ とおくと, $\phi_2 = \frac{\pi}{2} \sim 0$ に対して

$$d(x+iy) \Big|_{r=1} = \frac{Ci}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \sin^2 \phi_2} \right\} \frac{d\phi_2}{\sqrt{1 - (1 - \frac{b^2}{a^2}) \sin^2 \phi_2}}$$

そこで $\phi_2 = \frac{\pi}{2} - \phi'$ とおくと, $\phi' = 0 \sim \frac{\pi}{2}$ に対して

$$d(x+iy) \Big|_{r=1} = \frac{Cbi}{a^2} \left\{ 1 - \frac{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}{1 - \frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2} \sin^2 \phi_2'} \right\} \frac{d\phi_2'}{\sqrt{1 - (1 - \frac{a^2}{b^2}) \sin^2 \phi_2'}} \dots\dots\dots (5)$$

iii $A'O'(\theta = \cos^{-1} \frac{a}{c} \sim \frac{\pi}{2})$ に対して。ここで $\frac{c}{a} \cos \theta = \sin \phi_3$ とおくと, $\phi_3 = \frac{\pi}{2} \sim 0$ に対して

$$d(x+iy) \Big|_{r=1} = \frac{C}{b} \left\{ 1 - \frac{1 - \frac{c^2}{a^2}}{\sin^2 \phi_3 - \frac{c^2}{a^2}} \right\} \frac{d\phi_3}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \phi_3}} \dots\dots\dots (6)$$

iv $C'O(\theta=0)$ に対して。ここで $\frac{c}{b} \cos \theta = \sin \phi_4$ とおくと, $\phi_4 = \sin^{-1} \frac{b}{c} \sim 0$ に対して

$$d(x+iy) \Big|_{\theta=0} = \frac{C}{a} \left\{ 1 + \frac{\frac{c^2}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}}{\sin^2 \phi_4 - \frac{c^2}{b^2}} \right\} \frac{d\phi_4}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \phi_4}} \dots\dots\dots (7)$$

(4), (5), (6), (7) を積分すると, (x, y) と (r, θ) との関係が得られる。そこで (6) を積分すると

$$(x+iy) \Big|_{A'}^{O'} = -\frac{C}{b} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi_3}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \phi_3}} + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi_3}{(1 - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \phi_3) \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2} \sin^2 \phi_3}} \right]$$

$$\therefore lH = -\frac{C}{b} \left[K\left(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{b}\right) + \frac{a^2 - c^2}{c^2} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \frac{a}{b}, -\frac{a^2}{c^2}\right) \right] \dots\dots\dots (8)$$

ここで

K : 第1種の Legendre-Jacobi の完全楕円積分

Π : 第3種の Legendre-Jacobi の完全楕円積分

(5) を積分すると

$$(x+iy) \Big|_{B'}^{A'} = \frac{Cbi}{a^2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi_2'}{\sqrt{1-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin^2\phi_2'}} - \frac{a^2-c^2}{b^2-c^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi_2'}{(1-\frac{b^2-a^2}{b^2-c^2}\sin^2\phi_2')\sqrt{1-(1-\frac{a^2}{b^2})\sin^2\phi_2'}} \right]$$

$$\therefore ikH = i\frac{Cb}{a^2} \left[K\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}\right) - \frac{a^2-c^2}{b^2-c^2} \Pi\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}, -\frac{b^2-a^2}{b^2-c^2}\right) \right] \dots\dots\dots (9)$$

次に (1) 式を $t=c$ の附近で展開すると

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{C}{2c} \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}} \left\{ \frac{1}{t-c} + \dots\dots\dots \right\}$$

そこで、上式を積分した後、両辺を互に Real, Imaginary Part を等しいとおいて

$$x+iy = -\frac{C}{2c} \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}} \left\{ \log(t-c) + \dots\dots\dots \right\}$$

即ち

$$H = -\frac{C}{2c} \sqrt{\frac{c^2-a^2}{c^2-b^2}} \cdot \pi \dots\dots\dots (10)$$

そこで、もし不連続部の深さ、幅及び帯板の幅 kH, lH, H を与えるならば、それに応じてそれぞれ a, b, c の値が (8), (9), (10) 各式によって、わかってくる。

3. 應力解析

さて、 $\widehat{xx}, \widehat{yy}$ を x, y 軸に平行な normal stress, \widehat{xy} を x, y 軸に平行な shearing stress とすると、横田博士の式によって

$$\widehat{xx} - \widehat{yy} - 2i\widehat{xy} = i y f_1'(x+iy) + f_2(x+iy) \dots\dots\dots (11)$$

$$\widehat{xx} + \widehat{yy} = R f_1(x+iy) \dots\dots\dots (12)$$

但し R : Real part

そこで、無限遠における境界条件を考慮して f_1, f_2 を次の様に仮定する。

$$f_1(x+iy) = F_1(z) = A_0 + iB_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + iB_n) z^{-n} \dots\dots\dots (13)$$

$$f_2(x+iy) = F_2(z) = C_0 + iD_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + iD_n) z^{-n} \dots\dots\dots (14)$$

但し $A_n, B_n, C_n, D_n (n=0, 1, 2, \dots)$ は次の境界条件によって定まる Real Constant

境界条件

i $C'OC$ に沿って $y=0$ (w -plane) で $\widehat{xx} = \widehat{xy} = 0$, 之は z -plane では $\theta=0 \sim \pi, r=1 \sim \infty$

従って (12) 式から (11) 式を引くと

$$2\widehat{yy} + 2i\widehat{xy} = -i y f_1'(x+iy) + R f_1(x+iy) - f_2(x+iy) \dots\dots\dots (15)$$

(15) 式に (13), (14) 式を代入すると

$\theta=0$ では

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{-n} = C_0 + iD_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + iD_n) r^{-n}$$

$\theta=\pi$ では

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^n r^{-n} = C_0 + iD_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n + iD_n) (-1)^n r^{-n}$$

故に

$$C_0 = A_0, D_0 = 0, C_n = A_n, D_n = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

ii $\widehat{xx} + \widehat{yy}$ は w -plane の y 軸に関して左右均齊であるから, $\widehat{xx} + \widehat{yy} = Rf_1(x+iy)$ は z -plane では $\theta = \frac{\pi}{2}$ に関して左右均齊でなくてはならぬ。

従って

$$A_{2n-1} = B_{2n}, \quad (n=1, 2, \dots\dots\dots) \quad \dots\dots\dots (17)$$

iii w -plane において, 無限遠では $\widehat{xx} = T$, 之は z -plane では $\theta=0, r=1$

従って (11) 式と (12) 式とを相加えると

$$2\widehat{xx} - 2i\widehat{xy} = iyf_1'(x+iy) + f_2(x+iy) + Rf_1(x+iy) = 2(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n}) = 2T$$

$$\therefore A_0 = T - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \quad \dots\dots\dots (18)$$

故に (13), (14) 式は

$$F_1(z) = T - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} + iB_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} z^{-2n} + i \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} z^{-(2n-1)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$F_2(z) = T - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} z^{-2n} \quad \dots\dots\dots (20)$$

iv $C'B'$ に沿って, $y=H$ (w -plane) で $\widehat{yy} = \widehat{xy} = 0$, 之は z -plane では $\theta = 0 \sim \cos^{-1} \frac{b}{c}$,

$r=1$

ここで

$$\begin{aligned} f_1'(x+iy) &= \frac{dF_1}{dz} \frac{dz}{dt} \frac{dt}{dw} \\ &= \frac{c}{2C} \left(z - \frac{1}{z}\right) \sqrt{\frac{(z+1/z)^2 - 4b^2/c^2}{(z+1/z)^2 - 4a^2/c^2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} z^{-2n} + i(2n-1)B_{2n-1} z^{-(2n-1)} \right\} \end{aligned}$$

従って $r=1$ では

$$f_1'(x+iy) \Big|_{r=1} = \frac{ci}{C} \sin\theta \sqrt{\frac{\cos^2\theta - b^2/c^2}{\cos^2\theta - a^2/c^2}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} e^{-i2n\theta} + i(2n-1)B_{2n-1} e^{-i(2n-1)\theta} \right\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

故に (15) 式に (19), (20), (21) を代入し, Real part, Imaginary part にわけて, それぞれ考えると

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \cdot \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} \cos 2n\theta + (2n-1)B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta \right\} \sqrt{\frac{\cos^2\theta - b^2/c^2}{\cos^2\theta - a^2/c^2}} \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \cdot \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} \sin 2n\theta - (2n-1)B_{2n-1} \cos(2n-1)\theta \right\} \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - b^2/c^2}{\cos^2 \theta - a^2/c^2}} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin 2n\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

v $B'A'$ に沿って (w -plane) は, $\widehat{xy} = 0$, 之は z -plane では $\theta = \cos^{-1} \frac{b}{c} \sim \cos^{-1} \frac{a}{c}$
 $r=1$

(11) 式と (12) 式とを加えると

$$iyf_1'(x+iy) + f_2(x+iy) \Big|_{r=1} = -Rf_1(x+iy) \Big|_{r=1} \quad \dots\dots\dots (24)$$

従って

$$\frac{c}{C} y \sin \theta \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - b^2/c^2}{a^2/c^2 - \cos^2 \theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} \sin 2n\theta - (2n-1)B_{2n-1} \cos(2n-1)\theta \right\} \\ + 2 \left\{ T - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} (1 - \cos 2n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{c}{C} y \sin \theta \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - b^2/c^2}{a^2/c^2 - \cos^2 \theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} \cos 2n\theta - (2n-1)B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta \right\} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin 2n\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで

$$\frac{c}{C} y = -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}} - \frac{cb}{a^2} \left[K(\phi_2, \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}) - \frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2} \Pi(\phi_2, \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}}) \right. \\ \left. - \frac{b^2 - a^2}{b^2 - c^2} \right]$$

vi $A'O'$ に沿って (w -plane) $y = (1-k)H$ で $\widehat{yy} = \widehat{xy} = 0$, 之は z -plane では $\theta = \cos^{-1} \frac{a}{c} \sim \frac{\pi}{2}$, $r=1$

従って

$$\frac{\pi}{2} (1-k) \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \sin \theta \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - b^2/c^2}{\cos^2 \theta - a^2/c^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} \cos 2n\theta + (2n-1)B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta \right\} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1} \sin(2n-1)\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\frac{\pi}{2} (1-k) \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{c^2 - b^2}} \sin \theta \sqrt{\frac{\cos^2 \theta - b^2/c^2}{\cos^2 \theta - a^2/c^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2nA_{2n} \sin 2n\theta - (2n-1)B_{2n-1} \cos(2n-1)\theta \right\} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \sin 2n\theta = 0 \quad \dots\dots\dots (28)$$

従って(22), (23), (25), (26), (27), (28) 各式から (19), (20) 式の係数 A_{2n} , B_0 , B_{2n-1} を決定することができ, この問題は理論的に解くことができる。

4. 結 言

以上凹形不連続箇所を有する帯板の応力について等角写像を用いて, 理論的に解いた。この

論文は、先に太田博士も指摘されている如く、数値計算が極めて難しく、これのないことは実用的価値を大いに減するものであるが、之は後日の取り残された課題として、今後の研究にかかっている。本論文作製に当っては太田博士の論文に負う所極めて多く、又先生の御指導を心から感謝するものである。なお工学部谷岡助教授、教育学部久保講師にも、いろいろと御助言を賜った。併せて心から謝意を表するものである。

参 考 文 献

- 1) 太田友彌, 半田孝男: 造船協会会報, 第83号 P53~57
- 2) J. Bruhn: T.I.N.A., (1899)
- 3) E.G. Coker: T.I.N.A., (1911)