# 熱放射に関する理論的研究

## —特異核を有する非線型積分方程式の高精度数値解法について—

村川　勝弥*・宮本　政英*・栗間　諄二*・日高　正夫**

# Theoretical Research on Thermal Radiation

## —On Numerical Solution with High Accuracy of Nonlinear Integral Equation with Singular Kernel—

Katsuhisa MURAKAWA, Masahide MIYAMOTO, Junji KURIMA and Masao HITAKA

**Abstract**

In thermal radiation heat transfer, numerical solution with high accuracy of nonlinear integral equation with singular kernel is proposed by the authors, and it is stated that this method is enlarged to the case of multiple dimensions.

### 1. 緒　　言

最近になって，宇宙工学における人間衛星の地球への再突入時における空気力学的加熱，乱流プラズマにおける熱放射，MHD 発電，熱核融合反応による熱からの直接発熱，炉内温度の上昇で発生する放射熱によって大部分の蒸気の発生をおこなう超臨界圧力発電や，原子力発電などにおいて，熱伝導，熱伝達と熱放射とが同時に共存し，温度も1万度以上の伝熱が多くなって来ている状況にある．

したがって最近の伝熱工学においては，熱放射に関する理論的研究は極めて緊急で重要である．それにもかかわらず，現在，まだ研究は極めて少数であり，今後の新しい一つの研究分野となりつつある．この研究分野では，天体物理学の理論を工学へ導入しつつある現状であって，アメリカ，ソ連や日本で，極く少数行なわれている状態である．ところで熱放射においては非線型の積分微分方程式（Nonlinear Integrodifferential Equation）が現われ，数学的にも困難な問題を多く含んでいるが，まだ，数学の分野でも，そうして工学においてはなおさら，研究されていない様子である．

以上の少数であるが，これまで行なわれている諸研究は殆ど一次元の変数を有するものが多いけれども，工業上の問題は二次元や三次元の方が応用が多く広いため，この方面の研究は更に必要性を増して来ることになる．

著者らは二次元の場合についての研究にあたって，非線型積分方程式の核が取扱いの困難な特異核の場合を扱わねばならない問題に遭遇したので，先づ，この問題から片付けることにした．

ここでは簡単のため，他の諸研究の例のように一次元の場合について，大略の方針と方法とを述べることにする．多次元の場合も同様に扱えばよいが，多少手数がかかるだけで原理としては同じである．本研究は高精度で解くべき多元高次連立方程式の数を少くして，著者らの研究室に備えられた卓上小型計算機（Olivetti 型；時価160万円）で扱えることを目的とし，従来の超大型電子計算機の使用をさけるように考案した．

### 2. 非線型積分方程式

熱放射においては絶対温度の4乗に比例する形が使われるので，積分方程式の中には温度の4乗の項が入って来て，非線型となり取扱いが複雑で，困難となってくる．

これから取扱う熱放射伝熱に現われる非線型積分方程式はつぎの形で示される．

$$\theta(x)=f(x)+\int_0^1 G(x,\xi)\cdot\theta^4(\xi)\cdot d\xi \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

この式において，$\theta(x)$は無次元化された温度，$f(x)$は

*　機械工学教室

**　宇部工業高等専門学校

あたえられ，形の分っている関数，$G(x,\xi)$ は積分方程式の核で，温度をあたえるエネルギ式の，微分方程式を積分方程式化するときのGreen関数が用いられるが，微分方程式の形によっては，必らずしも Green 関数だけといえないで，あたえられた関数である．無次元変数 $x,\xi$ の変域は　$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq\xi\leqq 1$ である．一般的には $x,\xi$ は〔a, b〕の両端の間の変域であるが，変換によって〔0，1〕の変換にかえることができるので，数値計算に便利な形として，上の(1)式の形に変形しておくのが便利である．つぎに，熱放射伝熱に表われる核 $G(x,\xi)$ はしばしば，特異核といって

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(x,\xi),\ [x<\xi<1]\\ G_2(x,\xi),\ [0<\xi<x]\end{cases}\quad\cdots\cdots(2)$$

一般に　$G_1\fallingdotseq G_2$　……(3)

ただし，$\xi=x$ では　$G_1=G_2$　……(4)

$$\left(\frac{\partial G_1}{\partial x}\right)_{x=\xi}-\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}\right)_{x=\xi}=1\quad\cdots\cdots(5)$$

のように核の導関数が $x=\xi$ で不連続な場合が多い．

例えば Green 関数

$$\left.\begin{aligned}G(x,\xi)&=\xi(1-x),\ 0\leqq\xi\leqq x\\ &=x(1-\xi),\ x\leqq\xi\leqq 1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(6)$$

において，その導関数は

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\xi}\right|_{\xi=x-0}-\left.\frac{\partial G}{\partial\xi}\right|_{\xi=x+0}=1\quad\cdots\cdots(7)$$

のように，$\xi=x$ で不連続である．核が $\xi<x$ または $\xi>x$ にしたがって，別個の関数で表わされているものを特異核とよぶことにする．

線型の第2種 Fredholm 積分方程式については，先づ Nyström の方法があるが $n+p$ 個の点の内，$p$ 個については工夫によって精度を上げねばならないが，境界条件は積分方程式中に含まれているので，積分方程式だけがあたえられた場合および Green 関数の具体的な形があたえてない一般的な場合は，必ずしも工夫ができるとは限らず，むしろできかねるときの方が多いので，精度の向上は期待できないことが多いし，次に日高孝次氏の方法は線型の場合について Simpson 則を使って，11個以上の多数の連立方程式を解かねばならないので手数がかかり不便であり，いずれも上の(1)式の非線型積分方程式には直接利用しがたくなる．

また，最近は高温度となり，10,000°C 以上の場合の研究の必要性が多くなり，精度も$10^{-5}$～$10^{-6}$程度が要求されるので，精度の向上と，非線型の場合はできるだけ解くべき方程式の数を減ずる努力が必要となる。

さて，(1)式はつぎのように $\xi<x$，$\xi>x$ に分けて書き直せば

$$\theta(x)=f(x)+\int_0^x G_2(x,\xi)\cdot\theta^4(\xi)\cdot d\xi+\int_x^1 G_1(x,\xi)\cdot\theta^4(\xi)\cdot d\xi\quad\cdots\cdots(8)$$

となり，右辺の2つの積分記号内には特異点がなくなるので，先づ精度の向上をはかるためには Gauss の方式か Gauss-Lobatto の方式を使用して，数値積分の精度の向上を行うために，不等間隔の内挿式である Lagrange の内挿式を用いれば求める $n$ 個の関数値と全く一致する数値解がえられることになる．

精度の問題は Gauss の方式か Gauss-Lobatto 方式における精度と一致することになるので，要求される精度に応じて，計算すべき関数値の数を多少多く取ればよいことになり，$10^{-5}$～$10^{-6}$以上の精度の向上が期待でき，しかも，解くべき連立方程式の数も5～6，7個程度で充分となる．

そこで，著者らは(8)式右辺の $\theta^4(\xi)$ に Lagrange の方法を適用することを考えた．

$$\theta^4(\xi)=[\theta^4(a_1)\cdot L_1(\xi)+\theta^4(a_2)\cdot L_2(\xi)+\cdots\cdots+\theta^4(a^n)\cdot L_n(\xi)]\quad\cdots\cdots(9)$$

$$\left.\begin{aligned}L_1(\xi)&=\frac{(\xi-a_2)(\xi-a_3)\cdots(\xi-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)},\ \cdots,\\ L_n(\xi)&=\frac{(\xi-a_1)(\xi-a_2)\cdots(\xi-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})}\\ L_i(a_j)&=\delta_{ij}=1,\ (i=j)\\ &=0,\ (i\neq j)\\ &(i,j=1,2,\cdots\cdots,n)\end{aligned}\right\}\cdots(10)$$

(9)式において，$\theta^4(a_1)$，$\theta^4(a_2)$，…，$\theta^4(a_n)$ は，それぞれ $\xi=a_1$，$a_2$，……，$a_n$ において $\theta^4(\xi)$ の値と全く一致し，正しい数値をあたえることになるので，下記の連立 $n$ 元4次代数方程式中の未知数として $\theta^4(a_1)$，……，$\theta^4(a_n)$ の $n$ 個の数値は求めるべき正しい値となる．(8)式は(9)式を使えばつぎの式となる．

$$\begin{aligned}\theta(x)=f(x)&+\int_0^x G_2(x,\xi)\Big[\theta^4(a_1)\cdot L_1(\xi)+\theta^4(a_2)\cdot L_2(\xi)+\cdots\cdots+\theta^4(a_n)\cdot L_n(\xi)\Big]\cdot d\xi\\ &+\int_x^1 G_1(x,\xi)\Big[\theta^4(a_1)\cdot L_1(\xi)+\theta^4(a_2)\cdot L_2(\xi)+\cdots+\theta^4(a_n)\cdot L_n(\xi)\Big]\cdot d\xi\end{aligned}\quad\cdots\cdots(11)$$

この式に，$x=a_n$ を代入すればつぎのような $n$ 元4次連立代数方程式に書きかえることができる．

$$\begin{aligned}\theta(a_n)=f(a_n)&+\int_0^{a_n}G_2(a_n,\xi)\Big[\theta^4(a_1)\cdot L_1(\xi)+\cdots+\theta^4(a_n)\cdot L_n(\xi)\Big]\cdot d\xi\\ &+\int_{a_n}^1 G_1(a_n,\xi)\cdot\Big[\theta^4(a_1)\cdot L_1(\xi)+\cdots+\theta^4(a_n)\cdot L_n(\xi)\Big]\cdot d\xi\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots(12)$$

$$x=a_n \quad (n=1, 2, \cdots, n)$$
$$(x \leqq 5 \sim 6 \sim 7)$$

(12)式の右辺の2つの積分は，$\xi$ にかんして，あたえられた関数の定積分となったので，Gauss の方式や Gauss-Lobatto の方式 ($n \leqq 5 \sim 6 \sim 7$) による高精度数値積分法を行えば充分である．

(12)の2つの定積分法は $G_1$, $G_2$ を代表して $K$ と書けば，つぎのようにあらわせる．

$$\int_a^b K(b, \xi) \cdot L(\xi) \cdot d\xi = \int_a^b \phi(\xi) \cdot d\xi = \int_a^b \phi(x) \cdot dx \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

(13)式の実算においては，$x=a$ から $x=a+H$ まで積分するにはつぎのようにして計算すればよい．

$$\int_a^{a+H} \phi(x) \cdot dx = H\Big[ R_1^n \cdot \phi\Big(a+\frac{1}{2}H+x_1\Big) \\ R_2^n \cdot \phi\Big(a+\frac{1}{2}H+x_2\Big)+\cdots \\ \cdots + R_n \cdot \phi\Big( a+\frac{1}{2}H+x_n\Big)\Big] \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

つぎに $\phi(x)$ を Mac Laurin 級数に展開して，精度の検討をすると

$$\phi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$
$$\Big(a_0=\phi(0),\ a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\Big) \quad \cdots\cdots\cdots(15)$$

$F$ を補正項の値とすれば，積分値の精度を知る目安とすることができる．

つぎに，本研究で使用したい高精度の数値積分法について述べると

〔I〕Gauss の方式

$n=5$, $x_1=-0.4530899229693320H$,
$R_1^5=0.1184634425280945$,
$x_2=-0.2692346550528415H$,
$R_2^5=0.2393143352496832$,
$x_3=0$,
$R_3^5=\dfrac{64}{225}$,
$x_4=0.2692346550528415H$,
$R_4^5=0.2393143352496832$,
$x_5=0.4530899229693320H$,
$R_5^5=0.1184634425280945$,

$$F=\frac{1}{698544}H^{11} \cdot a_{10}+\cdots\cdots$$

$n=6$, $x_1=-0.4662347571015760H$,
$R_1^6=0.0856622461895852$,
$x_2=-0.3306046932331323H$,
$R_2^6=0.1803807865240693$,
$x_3=-0.1193095930415985H$,
$R_3^6=0.2339569672863455$,
$x_4=0.1193095930415985H$,
$R_4^6=0.2339569672863455$,
$x_5=0.3306046932331323H$,
$R_5^6=0.1803807865240693$,
$x_6=0.4662347571015760H$,
$R_6^6=0.0856622461895852$,

$$F=\frac{1}{11099088}H^{13} \cdot a_{12}+\cdots\cdots,$$

Gauss の方式によると，$n$ にたいして $2n-1$ 次までの多項式ならば正しく積分される．Gauss の方式の長所は $n$ が小さい割に近似度が高いことである．例えば，Gauss の方式で $n=4$ の場合は，Newton-Cotes, Mac Laurin の方式では $n=8$，Tschebyscheff の方法では $n=6$ の場合と匹敵する．

Gauss の方式は精度においては断然，他の追従を許さないか，$x_i$, $R_i^n$ が大へん複雑となる欠点はある．そのため B. P. Moors は $x_i$ を小数8桁まで採り，以下は数字が0となるようなつぎの方式を提案した．

〔II〕Gauss-Moors の方式

$n=5$, $x_1=-0.45308992H$,
$R_1^5=0.118463448212$,
$x_2=-0.26923465H$,
$R_2^5=0.239314332532$,
$x_3=0$,
$R_3^5=0.284444438512$,
$x_4=0.26923465H$,
$R_4^5=0.239314332532$,
$x_5=0.45308992H$,
$R_5^5=0.118463448212$,

$$F=0.0^{11}4844H^7 \cdot a_6+0.0^{11}42H^9 \cdot a_8+ 0.000001431651H^{11} \cdot a_{10}+\cdots\cdots\cdots,$$

$n=6$, $x_1=-0.46623476H$,
$R_1^6=0.085662243842$,
$x_2=-0.33060469H$,

$R_2^6=0.180380794947,$

$x_3=-0.11930959H,$

$R_3^6=0.233956961211,$

$x_4=-0.11930959H,$

$R_4^6=0.233956961211,$

$x_5=0.33060469H,$

$R_5^6=0.180380794947,$

$x_6=0.46623476H,$

$R_6^6=0.085662243842,$

$F=-0.0^{10}115297H^7\cdot a_6-0.0^{11}69432H^9\cdot a_8-0.0^{10}126094H^{11}\cdot a_{10}-0.000000090095H^{13}\cdot a_{12}-\cdots\cdots,$

$F$ の式は $a_{2n}$ から始まらず，$a_{2n-2}$，$a_{2n-4}$，……を含むが主要項は $a_{2n}$ の項であって，他は小さいので，$x_i$ の桁数を，これだけに止めるに限り Gauss の方式よりも精度は高くなる。

〔III〕Gauss-Lobatto の方式（変域の両端と中央値を必ず採用するので，$n$ は奇数となる．近似度は Gauss の方式より劣る．）

$n=5$，$x_1=-0.5H,$

$R_1^5=0.049999911974,$

$x_2=-0.327327H,$

$R_2^5=0.272222153758,$

$x_3=0,$

$R_3^5=0.355555868534,$

$x_4=0.327327H,$

$R_4^5=0.272222153758,$

$x_5=0.5H,$

$R_5^5=0.049999911974,$

$F=\cdots\cdots+0.0^9698H^7\cdot a_6-0.00002834H^9\cdot a_8-\cdots,$

$n=7$，$x_1=-0.5H$

$R_1^7=0.02380950978728853786$

$x_2=-0.415112H,$

$R_2^7=0.13841294372635496826,$

$x_3=-0.2344245H,$

$R_3^7=0.21587270647330665363,$

$x_4=0,$

$R_4^7=0.24330968002609968052,$

$x_5=0.2344245H,$

$R_5^7=0.21587270647330665363,$

$x_6=0.415112H,$

$R_6^7=0.13841294372635496826,$

$x_7=0.5H,$

$R_7^7=0.02380950978728853786,$

$F=\cdots\cdots-0.0^{11}757064301H^9\cdot a_8-0.0^{11}183167221H^{11}\cdot a_{10}-0.0^{6}10511363724413H^{13}\cdot a_{12}-\cdots\cdots$

以上の諸公式の中で，$x_i$，$R_i^n$ は複雑であるが，正確な結果を要求するときは Gauss の方式が $n$ の数が少なく，したがって連立方程式の数が少なくなって便利である．また，$x_i$ の桁数を限定した Gauss-Moors の方式も実算には精度も良く便利である．次に両端値と中央値を必ず含む場合は Gauss-Lobatto の方式が便利なことがある．

さて(1)式は，(14)，(13)，(12)式から，$n$ 元4次連立代数方程式(12)式（Gauss と Gauss-Moors の方式では $n\leqq5\sim6$；Gauss-Lobatto の方式では $n\leqq7$）で，書きかえることができる．

連立方程式の数も Gaussや Gauss-Moors の方式を用いれば5個（$n=5$）で充分で，解くべき方程式の数を大いに減少させることができて，しかも極めて高い精度で数値計算が可能である．そして，著者らの研究室に備えてある Olivetti 型，卓上小型計算機で数値の処理が可能である．

次に，(12)の連立方程式において，定積分を数値積分法によって行い

$\theta(a_n)=y_n$，$f(a_n)=f_n$ とおけば，(12)式の $n$ 元4次連立方程式の形は

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}\cdot y_1^4-y_1+f_1+c_{12}\cdot y_2^4+c_{13}\cdot y_3^4+\cdots \\ \qquad\cdots+c_{1n}\cdot y_n^4=0, \\ c_{21}\cdot y_2^4-y_2+f_2+c_{22}\cdot y_1^4+c_{23}\cdot y_3^4+\cdots \\ \qquad\cdots+c_{2n}\cdot y_n^4=0, \\ \cdots\qquad, \\ \cdots\qquad, \\ c_{n1}\cdot y_n^4-y_n+f_n+c_{n2}\cdot y_1^4+c_{n3}\cdot y_2^4+\cdots \\ \qquad\cdots+c_{n-1,n-1}\cdot y_{n-1}^4=0 \end{array}\right\}\cdots(16)$$

$(n=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\quad(n\leqq5\sim6\sim7)$

となるので，先づ $c_{n1}\cdot y_n^4-y_n+f_n\doteqdot0$ ………(17)

の四次代数方程式を数値解法によって（Olivetti 計算

機では$c_{n1}$と$f_n$の数値をあたえれば２分間で求まる）解いて第０次近似値 $y_{n0}$ を求め Newton-Raphson-Kantorovich 法を適用し，更に収束速度を速めるために Wall の方法を使えば労力が少なくてすむ．

$f(y)=0$ の根 $y_n$ において

$$y_{n+1}=y_n-\frac{f(y_n)}{f'(y_n)-f(y_n)f''(y_n)/2f'(y_n)} \quad \cdots\cdots\cdots(18)$$

(Wall の方法)

以上の方法によって，(17)式の$f_n$を修正しつつ結局(1)式は(17)，(18)の４次代数方程式の解法に帰着され，これは Newton-Raphson-Kantorovich，Wall の方法を使用して速やかに高精度の数値解としての$x=a_n$における各点の温度分布 $\theta(a_n)$ の数値を決定することができるので，引きつづいて熱伝達率 $\alpha$ や Stanton 数 St の伝熱計算に入ることができる．

なお，$x$ の任意の点 $x=\beta$ における温度を知りたいときは(11)式において $\theta^4(a_1)$，…，$\theta^4(a_n)$ が分っているので，その値を用いて，(11)式に $x=\beta$ を代入して，(12)，(13)，(14)，(16)，(17)，(18)によって正確に求めることができる．

次に，(1)式が更に複雑になって

$$\theta(x)=f(x)+\int_0^1 G(x,\xi)\cdot\theta^m(\xi)\cdot d\xi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$(m\geqq 5)$$

のときは，同様な方法によればよいが，(17)式は $m$ 次（$m\geqq 5$）の高次代数方程式となって来るので，始めて電子計算機を使用することになる．

特に，$m=5$ のときは(17)式は次の形となる．

$$z^5+a_1\cdot z^4+a_2\cdot z^3+a_3\cdot z^2+a_4\cdot z+a_5=0 \quad \cdots\cdots(20)$$

この場合は，代数学的には非常に困難な Tschirnhausen transformation によって

$$x^5-x-a=0 \cdots\cdots\cdots(21)$$

に誘導できるので Hermite は modular functions を用いて解いている．

$$\phi(\tau)=\sqrt[4]{k}=\sqrt[8]{f(\tau)},\quad \psi(\tau)=\sqrt[4]{k'}=\sqrt[8]{g(\tau)}\cdots(22)$$

$$q=e^{\pi i\tau},\quad \tau=r+s\cdot i \text{ (complexnumber)},\quad s>o\cdots\cdots(23)$$

$$f(\tau)=16q\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\right]^8 \cdots\cdots(24)$$

$$q(\tau)=\left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)(1-q^7)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)(1+q^7)\cdots}\right]^8 \cdots(25)$$

$$\Phi(\tau)=\left[\phi(5\tau)+\phi\left(\frac{\tau}{5}\right)\right]\cdot\left[\phi\left(\frac{\tau+16}{5}\right)-\phi\left(\frac{\tau+4\ 16}{5}\right)\right]\cdot\left[\phi\left(\frac{\tau+2.16}{5}\right)-\phi\left(\frac{\tau+3.16}{5}\right)\right] \quad (26)$$

したがって，

$\Phi(\tau)$，$\Phi(\tau+16)$，$\Phi(\tau+2.16)$，$\Phi(\tau+3.16)$，$\Phi(\tau+4.16)$ は次の５次式の根であることを Hermite が示した．

$$\Phi^5-2^4\cdot 5^3\cdot\phi^4(\tau)\psi^{16}(\tau)\Phi-2^6\cdot\sqrt{5^5}\cdot\phi^3(\tau)\psi^{16}(\tau)\cdot[1+\phi^8(\tau)]=0 \cdots\cdots\cdots(27)$$

$$\Phi=2\sqrt[4]{5^5}\cdot\phi(\tau)\cdot\psi^4(\tau)\cdot x \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$a=\frac{2}{\sqrt[4]{5^5}}\cdot\frac{1+\phi^8(\tau)}{\phi^2(\tau)\psi^4(\tau)}=\frac{2(1+k^2)}{\sqrt[4]{5^5}\ k^{1/2}\ k'} \quad \cdots\cdots(29)$$

(28)，(29)は(21)式となる．ゆえに(21)の根は

$$B\Phi(\tau),\ B\Phi(\tau+16),\ B\Phi(\tau+2.16),\ B\Phi(\tau+3.16),\ B\Phi(\tau+4.16)\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

となる．

ただし，

$$B=\frac{1}{2\cdot\sqrt[4]{5^3}\cdot\phi(\tau)\cdot\psi^4(\tau)}=\frac{1}{2\sqrt[4]{5^3}\ k\ k'} \quad (31)$$

以上は簡単に書いたが，だ円積分，だ円関数，Theta 関数の知識を必要とし，しかも，つぎの場合以外は，数値計算への応用は極めて困難である．

$$\Phi(\tau)=\sqrt{2^3\cdot 5}\ \sqrt[8]{Q^3}(1+Q-Q^2+Q^3-8Q^5-9Q^6+8Q^7-9Q^8+\cdots)\cdots\cdots(32)$$

$$Q=\sqrt[5]{q}\cdots\cdots\cdots(33)$$

たとえば，

$x^5-x-2=0$ ………(34)を解けば，のつぎようになる．（６桁まで正しい．）

$x_1=B\Phi(\tau)=1.267168280$,

$x_2=-0.894548013-0.534148530\,i$,

($x_3$=conjugate)

$x_4=0.260964058+1.17722613\,i$,

($x_5$=conjugate)

ついでに，(1)式において積分方程式の核 $K(x,\xi)$，が核自身と，その導関数が $x$ および $\xi$ について連続である正則核の場合は操作が更にかんたんになって

$$\theta(x)=f(x)+\int_0^1 K(x,\xi)\cdot\theta^4(\xi)\cdot d\xi\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

において，右辺の定積分に(14)式を直ちに用いれば，(16)，(17)，(18)となって$n$元４次連立方程式，したがって４次代数方程式の解法に帰着できるので，上述の方法で数値解がえられる．

## 3. 結　　言

放射伝熱には非線型積分方程式が必ず現われ，しかも取扱いの困難な特異核をもつ場合が非常に多いので著者らは，高精度で，しかも解くべき連立方程式を少なくする方法について考究し，正確な数値解のえられる方法を提案した．すなわち，(1)，(8)式について，(9)，(10)式を用いて，(16)，(17)，(18)式に誘導して，４次代数方程式の解法に帰着することができた．しかも，卓上計算機によっても簡単に計算ができるので極めて便利

である．

また，(19)式（$m \geqq 5$）のような高次の場合にも拡張できることも述べ，更に(35)の正則核の場合はもっと簡単に取扱えることも付記した．

著者らの考案した方法は今後，他の方面にも広く拡張して応用され利用できる方法である．ここでは大略の方法を述べるために，他の例のように一次元の場合について記したが，工業上，必要で応用性の多い多次元の場合も変数の数が増すだけであって，原理とか取扱い方は全く同じである．

## Nomenclature

$a$ ： 定数
$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ ：係数
$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n$ ：$x$, $\xi$ の値
$b$ ： 定数
$B$ ： (31)式
$C_{11}, \cdots\cdots, C_{n1}$ ：連立方程式の係数
$F$ ：誤差の項
$f(x)$ ： $x$ の関数
$f_n$ ： $f(a_n)$
$f'$ ： $f$ の1階微分
$f''$ ： $f$ の2階微分
$G(x, \xi)$ ： 積分方程式の核
$H$ ： 変域
$i$ ：虚数単位$\sqrt{-1}$，または（1，2，3，…，$m$）
$k$ ： (22)式
$k'$ ： (22)式
$K(x, \xi)$ ： 核
$L_n(\xi)$ ： Lagrange の内挿式
$m$ ： 自然数（$m \geqq 5$）
$n$ ： 自然数（1，2，3…）
$p$ ： 自然数（1，2，3，…）
$Q$ ： (33)式
$q$ ： $e^{\pi i \tau}$
$R_i^n$ ： 係数
$r$ ： 実数部
$s$ ： 虚数部
$St$ ： Stanton 数
$x$ ： 変数
$y_n$ ： $\theta(a_n)$
$y$ ： 変数
$z$ ： 変数

### Greek letters

$\alpha$ ： 熱伝達率
$\beta$ ： $x$の任意の値
$\delta_{ij}$ ： (10)式
$\theta$ ： 無次元温度
$\Phi$ ： (26)式
$\phi$ ： (13)式，(22)式
$\psi$ ： (22)式
$\tau$ ： (23)式
$\xi$ ： 変数

（昭和44年8月7日受理）