一般の平均と確率密度

眞　野　孝　義

$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ の平均 Arithmetic mean を $\bar{x}$ とすれば

$$\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n}{n}$$

即ち

(1)　$(x_1-\bar{x})+(x_2-\bar{x})+(x_3-\bar{x})+\cdots+(x_n-\bar{x})=0$

又 x_i $(i=1,2,3,\cdots\cdots\cdots,n)$ と $\bar{x}$ との関係は変換 transformation

(2)　$x'=x+t$ $(x'_i=x_i+t,\ \bar{x}'=\bar{x}+t)$

に対して不変である。

以上を拡張して

$f(z)$ を $f(o)=o$ であるような任意の function とし

(3)　$f(x_1-\bar{x})+f(x_2-\bar{x})+f(x_3-\bar{x})+\cdots\cdots+f(x_n-\bar{x})=0$ で定まる

$\bar{x}=$ function $(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n)$ を $x_1, x_2, x_3 \cdots x_n$ の変換（２）に対する一般平均 generalized mean と呼ぶこととする。

勿論 $f(z)=z$ とすれば Arithmetic Mean である。

真の値が $\bar{x}$ である量を観測して x と $x+dx$ の間の値を得る Probability を

(4)　$dp=e^{g(z)}dx$, $z=x-\bar{x}$ とすれば、これは変換 (2) に対し不変である。n 回の観測値が区間

(x_1, x_1+dx_1), (x_2, x_2+dx_2), (x_3, x_3+dx_3), $\cdots\cdots$, (x_n, x_n+dx_n) におちる Probability は

(5)　$P=e^{g(z_1)}e^{g(z_2)}e^{g(z_3)}\cdots\cdots e^{g(z_n)}$
$\times dx_1dx_2dx_3\cdots\cdots dx_n$

但し　$z_i=x_i-\bar{x}$

$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n$; $dx_1, dx_2, dx_3, \cdots\cdots, dx_n$ を固定して $\bar{x}$ を変ずるとき、P を最大にする $\bar{x}$ が (3) に定義する generalized mean $\bar{x}$ と一致するものとすれば $\log P$ を $\bar{x}$ で微分することにより

(6)　$g'(z_1)+g'(z_2)+g'(z_3)+\cdots\cdots+g'(z_n)=0$

（但 $g'=\dfrac{dg}{dz}$）を得。

これが

(3)　$f(z_1)+f(z_2)+f(z_3)+\cdots\cdots+f(z_n)=0$

と一致する条件は

$g'(z)=\alpha\cdot f(z)$　α : arbitrary constant

故に

$$g(z)=\alpha\int f(z)dz+\beta$$

故に (4) は

$$dp=e^{\alpha\int f(z)dz+\beta}dx=\gamma e^{\alpha\int f(z)dz}dx$$

となる。

$$\int f(z)dz=F(z),\quad e^{\beta}=\gamma$$

とすれば

(7)　$dp=\gamma e^{\alpha F(x-\bar{x})}dx$

となる。

勿論 $\int_{-\infty}^{+\infty}\gamma e^{\alpha F(x-\bar{x})}dx$ は有限とし、γ はこの積分が１になる様にえらぶ。

次に変換が

(8)　$x'=e^t x$

なる場合を考えると、この微小変換は

$$x'=e^{\delta t}x=(1+\delta t)x$$

$$\delta x=x'-x=x\delta t$$

となる。即

(9)　$\dfrac{\delta x}{\delta t}=x$

今

$$ds=\frac{dx}{x}$$

$$z=\int_{\bar{x}}^{x}ds=\log\frac{x}{\bar{x}}$$

とすれば ds, z は何れも変換（８）の不変式である。

(3) に対応して

(10)　$f(z_1)+f(z_2)+f(z_3)+\cdots\cdots+f(z_n)=0$

但し　$Z_i = \log \frac{x_i}{\boldsymbol{x}}$

で定まる $\bar{x}$ を変換 (8) に対する generalized mean と呼ぶ。

(4) に対応して

(11)　$dp=e^{g(z)}ds = e^{g\left(\log\frac{x}{\bar{x}}\right)}\frac{d\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}}$

とすれば、前と全く同様に

$$g(z)=\alpha\int f(z)dz+\beta=\alpha F(z)+\beta$$

を得る。

一般の変換に対してもその微小変換が

(12)　$\frac{\delta \boldsymbol{x}}{\delta t} = \xi(\boldsymbol{x})$

ならば

$$ds = \frac{d\boldsymbol{x}}{\xi(x)}$$

$$z = \int_{\bar{x}}^{x} ds$$

として、全く同様に行く。

又 (2) と (8) の関係は(2)の $\boldsymbol{x}$ を (3) の $\boldsymbol{x}$ の $\log\boldsymbol{x}$ と見れば変数変換とも見られる。(12) についても同様である。

(13)　$\boldsymbol{x} = \alpha\log\frac{(b-c)(y-a)}{(c-a)(b-y)}$　$\alpha>o, a<c<b$

とすれば $(a<y<b)$ と $(-\infty<\boldsymbol{x}<+\infty)$ の間に one to one correspondence がつき

$y=a\to \boldsymbol{x}=-\infty$, $y=c\to \boldsymbol{x}=o$, $y=b\to \boldsymbol{x}=+\infty$ である。

(13) の $\boldsymbol{x}$ は(2) の変換をうけるものとして (2) に対する $\boldsymbol{x}$ の generalized mean を y のそれに (13) によつて変換する。

不変式 $\boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}$, $d\boldsymbol{x}$ は次の如くなる。

$$x-\bar{x}=\alpha\log\left[\frac{y-a}{b-y}\Big/\frac{\bar{y}-a}{b-\bar{y}}\right]$$

$$d\boldsymbol{x}=\alpha\frac{b-a}{(b-y)(y-a)}\,dy$$

特に

$$\alpha=\frac{(b-c)(c-a)}{b-a}$$

としておけば

$a\to-\infty$, $b\to+\infty$ のとき $d\boldsymbol{x}=dy$ となる。

今

$$k= 2\alpha=\frac{2(b-c)(c-a)}{b-a}$$

とすれば、上式は

$$\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}}{k}=\frac{1}{2}\log\left[\frac{y-a}{b-y}\Big/\frac{\bar{y}-a}{b-\bar{y}}\right]$$

$$bs= d\boldsymbol{x}=\frac{k}{2}\frac{b-a}{(b-y)(y-a)}\,dy$$

$$\sinh\frac{z}{k}=\frac{\sqrt{(yy)\cdot(\bar{y}\bar{y})-(y\bar{y})^2}}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(\bar{y}\bar{y})}}$$

$$\cosh\frac{z}{k}=\frac{(y\bar{y})}{\sqrt{(yy)}\sqrt{(\bar{y}\bar{y})}}$$

となる。但し

$$(y\bar{y})=-y\bar{y}+(b+a)\frac{y+\bar{y}}{2}-ab$$

$$z = \boldsymbol{x}-\bar{\boldsymbol{x}}$$

とする。

そして変換(2)に対する一般の分布(4)は

$$dp=\frac{k}{2}e^{g(z)}\frac{(b-a)\,dy}{(b-y)(y-a)}$$

となる。但し

$$z=\frac{k}{2}\log\left(\frac{y-a}{b-y}\Big/\frac{\bar{y}-a}{b-\bar{y}}\right)$$

特に

$$y(z)=-h\left(k\sinh\frac{z}{k}\right)^2+\alpha$$

とすれば

$$dp=\frac{k}{2}\epsilon^{\alpha}\exp\left\{-h\left[k^2\frac{(yy)(\bar{y}\bar{y})-(y\bar{y})^2}{(yy)(\bar{y}\bar{y})}\right]\right\}$$

$$\times\frac{(b-a)dy}{(b-y)(y-a)}$$

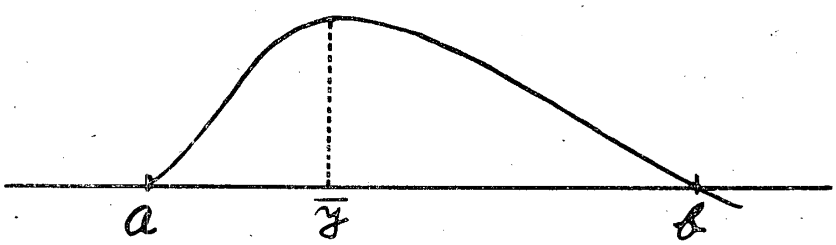
又 $\frac{h}{2}\epsilon^{\alpha}=c$

とすれば

(14)　$dp=C\exp\left[-h\left\{k^2\frac{(yy)(\bar{y}\bar{y})-(y\bar{y})^2}{(yy)(\bar{y}y)}\right\}\right]$

$$\times\frac{dy}{(yy)}(b-a)$$

$h>o$ とすれば



この分布は大略図の如し。

c は $\int_a^b dp=1$ になるようにえらぶ。

$a\to-\infty$, $b\to+\infty$ のときは

$$dp= ce^{-h(x-\bar{x})^2}dx$$

となり，Gauss 分布に一致する。

(yy) は y の二次式であるから

$y = y_0 : y_1$

とすれば (14) において

$$\frac{(y\,y)\,(\bar{y}\,\bar{y})-(y\,\bar{y})^2}{(y\,y)\,(\bar{y}\,\bar{y})}$$

は一般に

$$\frac{\sum b_{ij}\,y_i\,y_j}{\sum a_{ij}\,y_i\,y_j}$$

となる。

これを n 次元 Projective space に拡張すれば $y_0: y_1: y_2: \cdots\cdots: y_n$ を Projective homo-geneous coordinates として分布は

$$(15)\quad dp= C\exp\left(-h\left(\frac{\sum b_{ij}\,y_i\,y_j}{\sum a_{ij}\,y_i\,y_j}\right)\right)$$

$$\sqrt{\begin{vmatrix} a_{00}\cdots a_{0n}\\ \cdots\cdots \\ a_{n0}\cdots a_{nn}\end{vmatrix}}\begin{vmatrix} y_0\cdots y_n\\ dy_0\cdots dy_n\\ \cdots\cdots\\ dy_0\cdots dy_n\end{vmatrix}\frac{1}{(a_{ij}\,y_i\,y_j)^{\frac{n+1}{2}}}$$

と出来る。ここに

$$\begin{vmatrix} y_0\cdots y_n\\ dy_0\cdots dy_n\\ \cdots\cdots\cdots\\ dy_0\cdots dy_n\end{vmatrix}$$

は n 次元体積要素を表わす。

このときは b_{ij} と a_{ij} の選び方によりU字型分布或はJ字型分布にもなる。

コンクリート無限圓柱の熱應力

大　浜　文　彦

1. 序　說

コンクリート構造物では、所謂初内応力を発生し、予想外なキレツの発生をみることがしばしばある。著者は、その一主要素たる熱応力をとりあげ、コンクリート無限円柱についての解析を試みた。

今こゝに考える無限円柱は，発熱量 $H=Q_0\cdot(1-e^{-lt})$ 熱伝達率 κ，比熱 c，密度 ρ，単位一定応力による塑性変形量 $1/E\cdot B(1-e^{-\mu t})$ のコンクリートよりなるものである。断面半径は a であり、外側面は u_0 なる気温に常に保たれるものとする。

この無限円柱の内部発熱量 H による温度分布及び熱応力を、その塑性をも考慮して求めることとする。

2. 温度分布 。

今、柱の中心を座標軸の原点とし、半径 r の点の柱内部温度を u とし、打設直後 u＝0 である時刻より測つた時間を t とする。

熱伝導の基礎式は次の通りである。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)+F(t) \qquad (1)$$

$$茲に\ F(t)=\frac{1}{c\rho}\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{Q_0 l}{c\rho}e^{-lt}$$

前述の仮定により境界条件式は次の通り

$$r=0\ のとき\quad \frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (2)$$

$$t=0 \qquad u=0 \qquad (3)$$

$$r=a \qquad u=u_0 \qquad (4)$$

LAPLACE TRANSFORM を行い、

$$\bar{u}=p\int^{\infty}e^{-pt}u(r,t).\ dt \qquad (5)$$

これより、(1) 式において

$t\to\infty$ のとき $ue^{-pt}\to 0$

$t\to 0$ のとき $u\to 0$ を用うれば、

$$\ddot{\bar{u}}+\frac{1}{r}\dot{\bar{u}}-\frac{p}{\kappa}\bar{u}+\frac{f(p)}{\kappa}=0 \qquad (6)$$

$$但し\quad f(p)=p\int_0^{\infty}e^{-pt}F(t).\ dt=\frac{Q_0\ lp}{c\rho(p+l)}$$

茲で $\bar{u}=w+f(p)/p$ とおけば

$$\ddot{w}+\frac{1}{r}\dot{w}-\frac{p}{\kappa}w=0$$