# 汎関数展開可能な系の事後確率密度関数

堀本　孝治*・森　孝之**・沖田　豪***・田中　正吾***

# A Posteriori Probability Density of System Described by Fanctional Expansion

Kouji HORIMOTO, Takayuki MORI, Tuyosi OKITA and Shougo TANAKA

**Abstract**

In this paper, we consider a posteriori probability density function of the nonlinear system which is described by the functional expansion and is corrupted by the nongaussian noises of the input and the output.

Let us express a posteriori density of the state variables in terms of the Hermite expansion, considering the additivity of the measurement and the input noises, on the bases of Baysian theorem.

First, the formula of the rearrangement for the hermite polynominals is derived from its generating function.

Then the convolution integrals of Baysian theorem can be analytically calculated by using the orthogonality of the Hermite polynominals.

Finally, it is shown from the results of the digital simulation that the validity of this method is confirmed.

## 1．緒　言

システムにおける推定問題で，状態変数の事後確率密度関数は基本的な役割を果たしている[1),2)].

これまで，非線形系の事後確率密度関数について，いくつかの報告がなされている[3)~5)].たとえば，システムの非線形性を考慮し，事後確率密度関数をエルミート展開表現する方法が提案されているが，展開係数を任意の項まで具体的に求めていない[3)].また，非線形観測系に対し，ベイズの定理より事後確率密度関数を直交展開表現しているものもある[4)].そこでは，状態を条件とする観測値の事後確率密度が観測値の予測密度を基幹として，直交展開されている．しかし，その表現では，観測値と状態が独立なとき，二つの関数は一致し，逆に，両者が密接な関係にあるときは，多くの展開項を必要とする．さらに，非線形系について高次の条件付モーメントを用い，事後確率密度関数をエルミート展開で表わしているものもある[5)].しかし，そのモーメントを具体的に与えていない．

そこで，条件付モーメントの算出が可能な点に着目し，ここでは，汎関数展開可能な系を対象とする[6)].この系の事後確率密度関数を，観測雑音の加法性を考慮して，エルミート展開表現しよう．事後確率密度をベイズの定理より求める際，たたみ込み積分を必要とするが，エルミート関数の直交性を利用できれば，この積分を解析的に行うことが可能となる．そのため，ある重価関数をもつエルミート関数を，他の重価関数を

*三菱重工業株式会社
**大学院電子工学専攻
***電子工学科

もつエルミート関数に組み換えることを考える．これにより，事後確率密度関数の展開係数を任意の項まで系統的に導出することが可能である．

## 2．問題の記述

対象とする系は，安定かつ有限項で汎関数展開可能であり，次式で表わされる[6]．

$$x(k+1)=f(x(k),u(k))+w(k),\ x(0)=x_0 \quad (1)$$

ただし，$x(k)$，$u(k)$は，それぞれn次元状態ベクトル，$\ell$次元入力ベクトルであり，

$$f(x(k),u(k)) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} \sum_{m'=0}^{L} \sum_{m'_1+\cdots+m'_\ell=m'} \left\{ \theta_{m_1\cdots m_n m'_1\cdots m'_\ell} \left( \prod_{j=1}^{n} x_j^{m_j}(k) \right) \left( \prod_{j=1}^{\ell} u_j^{m'_j}(k) \right) \right\}$$

である．

$w(k)$は白色で，その確率密度関数はエルミート展開で与えられる[7),8)]．

$$P(w(k))=N_w(k):O,\ W) \times \left\{ 1+\sum_{m=3}^{M_w} \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} \zeta_{m_1\cdots m_n} H_{m_1\cdots m_n}(W^{-1/2}w(k)) \right\} \quad (2)$$

ただし，

$$N(w;\overline{w},W) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|W|^{n/2}} e^{-1/2(w-\overline{w})^T W^{-1}(w-\overline{w})}$$

であり，$H_{m_1\cdots m_n}(\cdot)$は，エルミート関数である．

また，r次元観測系は次式で与えられる．

$$y(k)=Hx(k)+v(k),\ k\geqq 1 \quad (3)$$

ただし，観測雑音$v(k)$は白色で，次の確率密度関数をもつ．

$$P(v(k))=N(v(k);O,\ V) \times \left\{ 1+\sum_{m=3}^{M_r} \sum_{m_1+\cdots+m_r=m} \nu_{m_1\cdots m_r} H_{m_1\cdots m_r}(V^{-1/2}v(k)) \right\} \quad (4)$$

ここで，入力雑音$w(k)$，観測雑音$v(k)$及び初期値$x_0$は，互いに独立である．

以下では，観測値系列

$$Y_k=\{u(0),\ y(1),\ \cdots,\ u(k-1),\ y(k)\}$$

を与えられたとき，状態の事後確率密度関数$P(x(k)|Y_k)$を求める．

## 3．準　備

事後確率密度関数の導出に先立って，その基礎となるベイズの定理とエルミート関数の組み換えについて述べる．

観測値系列$Y_k$が与えられたとき，状態の事後確率密度関数$P(x(k)|Y_k)$は，ベイズの公式より次のように表わされる．

$$P(x(k)|Y_k)=\frac{P(x(k)|Y_{k-1})P(y(k)|x(k),\ Y_{k-1})}{P(y(k)|Y_{k-1})} \quad (5)$$

ただし，上式の各因子は次のように与えられる．

$$P(x(k)|Y_{k-1})=\int_{-\infty}^{\infty} P(x(k-1)|Y_{k-1}) \times P_W(x(k)-f(x(k-1),\ u(k-1)))dx(k-1) \quad (6)$$

$$P(y(k)|x(k),Y_{k-1})=P_v(y(k)-Hx(k)) \quad (7)$$

$$P(y(k)|Y_{k-1})=\int_{-\infty}^{\infty} P(x(k)|Y_{k-1}) \times P(y(k)|x(k),\ Y_{k-1})dx(k) \quad (8)$$

ここでは，入力雑音及び観測雑音が加法的であり，その分布が，(2)，(4)式のようにエルミート展開で与えられているので，事後確率密度関数をエルミート展開表現しよう[3),5)]．

$$P(x(k);\hat{x}(k),\ P(k))=N(x(k);\hat{x}(k),\ P(k)) \left[1+\sum_{m=3}^{Me} \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} \mu_{m_1\cdots m_n}(k) H_{m_1\cdots m_n}\{P^{-1/2}(k)(x(k)-\hat{x}(k))\}\right] \quad (9)$$

具体的に，事後確率密度関数を得るためには，(6)，(8)式のたたみ込み積分を行う必要がある．エルート関数の直交性を利用できれば，このたたみ込み積分を解析的に行うことができる．そのため，エルミート関数の組み換えを考える．

重みを$N(x;\mu_1,\ A_1)$とするエルミート関数は，

$$H_{m_1\cdots m_n}\{A_1^{-1/2}(x-\mu_1)\} = \left. \frac{d^m}{dt_1^{m_1}\cdots dt_n^{m_n}} e^{t^T A_1^{-1/2}(x-\mu_1)-\frac{1}{2}t^T t} \right|_{t=0} \quad (10)$$

ただし，$t=[t_1,\ t_2\cdots t_n]^T$である．

同様に，$N(Hx,\ \mu_2,\ A_2)$を重みとするエミルート関数を$H_{j_1\cdots j_r}\{A_2^{-1/2}(Hx-\mu_2)\}$とする．このとき，エルミート関数$H_{m_1\cdots m_n}\{A_1^{-1/2}(x-\mu_1)\}$と$H_{j_1\cdots j_r}\{A_2^{-1/2}(Hx-\mu_2)\}$とは，重みが異なるため直交条件を満たさない．したがって，エルミート関数$H_{j_1\cdots j_r}\{A_2^{-1/2}(Hx-\mu_2)\}$を，$H_{m_1\cdots m_n}\{A_1^{-1/2}(x-\mu_1)\}$に組み換える式を導入する．（付録1）

$$H_{j_1\cdots j_r}\{A_2^{-1/2}(Hx-\mu_2)\} = \sum_{m=0}^{j} \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} {}_{j_1\cdots j_r}\sigma_{m_1\cdots m_n}(a,\ B) H_{m_1\cdots m_n}\{A_1^{-1/2}(x-\mu_1)\} \quad (11)$$

ここで，係数${}_{j_1\cdots j_r}\sigma_{m_1\cdots n}(a,\ B)$は次式で与えられる．

${}_{j_1\cdots j_r}\sigma_{m_1\cdots m_n}(a,\ B)$

$$= \sum_{\ell_1=1}^{r} \cdots \sum_{\ell_j=1}^{r} \frac{\prod_{\ell=1}^{r} {}_{j_\ell}P_{i_\ell}}{\prod_{\ell'=1}^{n} m_{\ell}' !} M_{j_1-i_1 \cdots j_r-i_r}(a,\ B)$$

$$\left[ \prod_{h=1}^{m_1} (B)_{\ell_h 1} \cdots \prod_{h=m_1+\cdots+m_{n-1}+1}^{m} (B)_{\ell_h n} \right]$$

ただし,

$$i_r = \sum_{k=1}^{i} \delta_{\ell_h r} \qquad i = \sum_{\ell=1}^{r} i_\ell$$

$$M_{k_1 \cdots k_r}(a,\ B) = \sum_{i_1=0}^{k_1} \cdots \sum_{i=0}^{k_r} \left( \prod_{\ell=1}^{r} {}_{k_\ell}C_{i_\ell} \right)$$

$$H_{k_1-i_1 \cdots k_r-i_r}(a) \times \frac{d^i}{dt_1^{i_1} \cdots dt_r^{i_r}} e^{\frac{1}{2}(B^T t)^T (B^T t)} \Bigg|_{t=0} \tag{12}$$

$$a = A_1^{-1/2}(H\mu_2 - \mu_1),\quad B = A_1^{-1/2} H A_2^{1/2}$$

である.

この組み換え公式を用いれば，あるガウス分布を重みとするエルミート関数を，他の重みをもつエルミート関数の線形結合で表わせる.

次に，予測密度関数を導出するため，システムをエルミート関数で表現することを考えよう. $N(x(k);\ O,\ I_n)$ を重みとするエルミート関数は次のように表わされる[9].

$$H_{m_1' \cdots m_n'}(x(k)) = \sum_{m_1=0}^{m_1'} \cdots \sum_{m_n=0}^{m_n'} \left\{ \prod_{j=1}^{n} {}_{m_j'}\gamma_{m_j} \right\} \times \left\{ \prod_{j=1}^{n} X_j^{m_j}(k) \right\} \tag{13}$$

ただし,

$${}_{m'}\gamma_m = \begin{cases} \dfrac{m'!}{(-2)^{\frac{m'-m}{2}} \left( \dfrac{m'-m}{2} \right)! \, m!} & m'-m : \text{even} \\ 0 & m'-m : \text{odd} \end{cases}$$

である.

上式より，(1)式のシステムは，エルミート関数の線形結合として表わされる.

$$f(x(k),\ u(k)) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} \alpha_{m_1 \cdots m_n}(k) H_{m_1 \cdots m_n}(x(k)) \tag{14}$$

ここで，係数 $\alpha_{m_1 \cdots m_n}(k)$ は次の漸化式で与えられる.

$$\alpha_{m_1 \cdots m_n}(k) = \begin{cases} \theta'_{m_1 \cdots m_n}(k) & : \sum_{j=1}^{n} m_j = N \\ \theta'_{m_1 \cdots m_n}(k) - \sum_{m'=m_1+\cdots+m_n+1}^{N} \sum_{m_1'+\cdots+m_n'=m'} \left[ \alpha_{m_1' \cdots m_n'}(k) \left\{ \prod_{j=1}^{n} {}_{m_j'}\gamma_{m_j} \right\} \right] & : \sum_{j=1}^{n} m_j < N \end{cases}$$

ただし，入力 $u(k)$ が既知なので，$\theta'_{m_1 \cdots m_n}(k)$ は次のように与えられる.

$$\theta'_{m_1 \cdots m_n}(k) = \sum_{m'=0}^{L} \sum_{m_1'+\cdots+m_\ell'=m'} \theta_{m_1 \cdots m_n m_1' \cdots m_\ell'} \left\{ \prod_{j=1}^{\ell} u_j^{m_j'}(k) \right\}$$

## 4．予測密度関数

まず，(6)式の予測密度関数 $P(x(k+1) \mid Y_k)$ を具体的に求めよう. システムが線形で，雑音 $w(k)$ がガウス分布に従うとき，(6)式のたたみ込み積分は解析的に実行可能である. しかし，システムが非線形，あるいはシステム雑音が非ガウス分布に従う場合，このたたみ込み積分を厳密に実行することは困難である.

そこで，状態及び雑音の分布が，(9)，(2)式のようにエルミート展開で与えられることを考慮して，予測密度関数をエミート展開表現しよう.

$f(x(k),\ u(k))$ は，(14)式より $H_{m_1 \cdots m_n}(x(k))$ の線形結合で表わされ，さらに $H_{m_1 \cdots m_n}(x(k))$ は，(11)式の組み換え公式より $H_{m_1 \cdots m_n}\{P^{-1/2}(k)(x(k) - \hat{x}(k))\}$ で表わされる.

$$f(x(k),\ u(k)) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{m_1 \cdots m_n = m} \rho_{m_1 \cdots m_n}(k+1) \times H_{m_1 \cdots m_n} \{P^{-1/2}(k)(x(k) - \hat{x}(k))\} \tag{15}$$

ただし,

$$\rho_{m_1 \cdots m_n}(k+1) = \sum_{h=1}^{N} \sum_{h_1+\cdots+h_n=h} \alpha_{h_1 \cdots h_n}(k) \; {}_{h_1 \cdots h_n}\sigma_{m_1 \cdots m_n}(\hat{x}(k),\ P^{1/2}(k)),\quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

である.

したがって，(9)式の密度関数を考慮し，エルミート関数の直交性を利用すれば，予測値 $\bar{Z}(k+1)$ は次式で与えられる.

$$\bar{Z}(k+1) = \rho_{0 \cdots 0}(k+1) + \sum_{m=3}^{\mathrm{MIN}[N,\ Me]} \sum_{m_1+\cdots+m=m} \left\{ \left( \prod_{m_j=1}^{n} m_j! \right) \times \rho_{m_1 \cdots m_n}(k+1) \mu_{m_1 \cdots m_n}(k) \right\} \tag{16}$$

次に予測誤差分散を考えよう.

$$G(k+1) = \underset{x(k)}{\mathrm{Cov}}[f(x(k),\ u(k))] + W \tag{17}$$

上式第一項は，(15)及び(9)式を考慮すると，エルミート関数の3重積で表わされる. 3重積の直交条件より次式を得る[9].

$$\operatorname*{Cov}_{x(k)}[f(x(k),\ u(k))]=\sum_{m=0}^{Me}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\sum_{m'=0}^{N}\sum_{m'_1+\cdots+m'_n=m'}\sum_{m''=0}^{N}\sum_{m''_1+\cdots+m''_n=m''}\{\mu_{m_1\cdots m_n}(k)\rho_{m'_1\cdots m'_n}(k+1)\rho^T_{m''_1\cdots m''_n}(k+1)\}\times\frac{m!\,m'!\,m''!}{\left(\frac{m+m'-m''}{2}\right)!\left(\frac{m'+m''-m}{2}\right)!\left(\frac{m''+m-m'}{2}\right)!}-\bar{z}(k+1)\bar{z}(k+1)^T \quad (18)$$

ただし，$|m_1-m'_1|\leqq m''_1\leqq m_1+m'_1$である．

さらに，展開係数$C_{m_1\cdots m_n}(k+1)$は，次式で表わされる．

$$C_{m_1\cdots m_n}(k+1)=\frac{1}{\prod_{h=1}^{n}m_h!}\operatorname*{E}_{\substack{x(k)\\w(k)}}[H_{m_1\cdots m_n}\{G^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\bar{z}(k+1))\}\,|\,Y_k] \quad (19)$$

$H_{m_1\cdots m_n}\{G^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\bar{z}(k+1))\}$を$H_{j'_1\cdots j'_n}\{P^{-1/2}(k)(x(k)-\hat{x}(k))\}$で表わし，上式の条件付期待値を得よう．まず，(11)式の組み換え公式より$H_{m_1\cdots m_n}\{G^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\bar{z}(k+1))\}$を$H_{j_1\cdots j_n}\{f(x(k),u(k))\}$で表わし，期待値を求める．

$$\operatorname*{E}_{\substack{x(k)\\w(k)}}[H_{m_1\cdots m_n}\{G^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\bar{z}(k+1))\}\,|\,Y_k]=\sum_{j=0}^{m}\sum_{j_1+\cdots+j_n=j}\{\operatorname*{E}_{w(k)}[{}_{m_1\cdots m_n}\sigma_{j_1\cdots j_n}(G^{-1/2}(k+1)(w(k)-\bar{z}(k+1)),\ G^{-1/2}(k+1))]\times\operatorname*{E}_{x(k)}[H_{j_1\cdots j_n}\{f(x(k),\ u(k))\}\,|\,Y_k]\} \quad (20)$$

${}_{m_1\cdots m_n}\sigma_{j_1\cdots j_n}(\cdot)$で，(12)式より$w(k)$は，$H_{m''_1\cdots m''_n}\{G^{-1/2}(k+1)(w(k+1)-\bar{z}(k+1))\}$のみに含まれている．その期待値は，$w(k)$の密度関数(2)式を考慮して次のように得られる．

$$\operatorname*{E}_{w(k)}[H_{m''_1\cdots m''_n}\{G^{-1/2}(k+1)\ (w(k)-\bar{z}(k+1))\}]={}_{m''_1\cdots m''_n}\sigma_{0\cdots0}(-G^{-1/2}(k+1)\bar{z}(k+1),\ G^{-1/2}(k+1)W^{1/2})+\sum_{m'=3}^{\mathrm{MIN}[M_w,\ m'']}\sum_{m'_1+\cdots+m'_n=m'}\{{}_{m''_1\cdots m''_n}\sigma_{m'_1\cdots m'_n}(-G^{-1/2}(k+1)\bar{z}(k+1),\ G^{-1/2}(k+1)W^{1/2})\times\xi_{m'_1\cdots m'_n}(\prod_{h=1}^{n}m_h!)\} \quad (21)$$

ここで，(13)式のエルミート多項式，(1)式のシステム方程式および(14)式を用いれば，$H_{m_1\cdots m_n}\{f(x(k),u(k))\}$は，$H_{\ell_1\cdots\ell_n}(x(k))$で表わされる．（付録２）

$$H_{m_1\cdots m_n}\{f(x(k),\ u(k))\}=\sum_{\ell=0}^{(\sum_{i=1}^{n}m_iN)}\sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=\ell}\{{}_{m_1\cdots m_n}\eta_{\ell_1\cdots\ell_n}(k)H_{\ell_1\cdots\ell_n}(x(k))\} \quad (22)$$

この$H_{\ell_1\cdots\ell_n}(x(k))$は，(11)式の組み換え公式により$H_{j'_1\cdots j'_n}\{P^{-1/2}(k)(x(k)-\hat{x}(k))\}$で表わされる．

$$H_{\ell_1\cdots\ell_n}(x(k))=\sum_{j'=0}^{\ell}\sum_{j'_1+\cdots+j'_n=j'}{}_{\ell_1\cdots\ell_n}\sigma_{j'_1\cdots j'_n}(\hat{x}(k),\ P^{1/2}(k))\times H_{j'_1\cdots j'_n}\{P^{-1/2}(k)(x(k)-(\hat{x}(k))\}$$

よって，$H_{j'_1\cdots j'_n}\{P^{-1/2}(k)(x(k)-\hat{x}(k)))\}$の直交性を利用すれば，次の期待値を得る．

$$\operatorname*{E}_{x(k)}[H_{j_1\cdots j_n}\{f(x(k),\ u(k))\}\,|\,Y_k]=\sum_{\ell=0}^{(\sum_{i=1}^{n}j_iN)}\sum_{\ell_1+\cdots+\ell_n=\ell}\left[{}_{j_1\cdots j_n}\eta_{\ell_1\cdots\ell_n}(k)\sum_{j'=0}^{\ell}\sum_{j'_1+\cdots+j'_n=j'}\left\{{}_{\ell_1\cdots\ell_n}\sigma_{j'_1\cdots j'_n}(\hat{x}(k),\ P^{1/2}(k))\mu_{j'_1\cdots j'_n}(k)\left(\prod_{i=1}^{n}j'_i!\right)\right\}\right] \quad (23)$$

これら，(21)，(23)式を(20)式に代入すれば，展開係数$C_{m_1\cdots m_n}(k+1)$が算出さる．

したがって，予測値$\bar{z}(k+1)$，予測誤差分散$G(k+1)$及び展開係数$C_{m_1\cdots m_n}(k+1)$を用いて，予測密度関数$P(x(k+1)|Y_k)$は，次のようにエルミート展開表現される．

$$P(x(k+1)\,|\,Y_k)=N(x(k+1)\,;\,\bar{z}(k+1),G(k+1))\times[1+\sum_{m=3}^{M_P}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}C_{m_1\cdots m_n}(k+1)H_{m_1\cdots m_n}\{G^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\bar{z}(k+1))\}] \quad (24)$$

ここで，展開項数$M_P$は，論理的には無限大であるが実際には有限項で打ち切らざるおえない[8]．その判定基準として，KullbuckのDivergenceが考えられる．いま，(24)式で$M_1$及び$M_2$項で$(M_1<M_2)$表示した密度関数をそれぞれ$P_1(x(k+1)|Y_k)$及び$P_2(x(k+1)|Y_k)$とすれば，そのDivergenceは，次のように近似される[10]．

$$D_{12}\fallingdotseq\sum_{m=M_1}^{M_2}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\left(\prod_{h=1}^{n}m_h!\right)(C_{m_1\cdots m_n}(k+1))^2$$

但し，展開項数は密度関数が非負となるように選ぶ．

## 5．事後確率密度関数

前述の予測密度関数$P(x(k+1)|Y_k)$を用いて，ベイズの定理より事後確率密度関数$P(x(k+1)|Y_{k+1})$を求めよう．

まず，(5)式右辺の分子は，(7)及び(24)式より，次のように得られる．

$$
\begin{aligned}
&P(x(k+1)\mid Y_k)P(y(k+1)\mid x(k+1),\ Y_k)\\
&=N(y(k+1)\,;\,H\bar{Z}(k+1),\ \Lambda(k+1)\\
&\quad N(x(k+1)\,;\,\beta(k+1),\ \Gamma(k+1))\\
&\quad\times\Big[1+\sum_{j=3}^{M_P}\sum_{j_1+\cdots+j_n=j}C_{j_1\cdots j_n}(k+1)H_{j_1\cdots j_n}\\
&\quad\{G^{-1/2}(k+1)(x(k+1)+\hat{x}(k+1))\}\Big]\\
&\quad\times\Big[1+\sum_{m=3}^{M_v}\sum_{m_1+\cdots+m_n}\nu_{m_1\cdots m_r}H_{m_1\cdots m_r}\\
&\quad\{V^{-1/2}(y(k+1)-Hx(k+1))\}\Big]
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&\Lambda(k+1)=V+HG(k+1)H^T\\
&\Gamma(k+1)=\{G^{-1}(k+1)+H^TV^{-1}H\}^{-1}\\
&\beta(k+1)=\bar{Z}(k+1)+\Gamma(k+1)H^TV^{-1}(y(k+1)\\
&\qquad -H\bar{Z}(k+1))
\end{aligned}
$$

である．

上式と(8)式より，$P(y(k+1)\mid Y_k)$はエルミート関数$H_{m_1\cdots m_n}\{G^{-1}(k+1)(x(k+1)-\bar{Z}(k+1))\}$と$H_{m_1\cdots m_r}\{V^{-1/2}(y(k+1)-Hx(k+1))\}$を$H_{j_1\cdots j_n}\{\Gamma^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\beta(k+1))\}$に組み換え，エルミート関数の直交性を利用することにより求められる．

$$
\begin{aligned}
&P(y(k+1)\mid Y_k)=N(y(k+1)\\
&\qquad\qquad ;\,H\bar{Z}(k+1),\ \Lambda(k+1))\times\kappa
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&\kappa=\sum_{m=0}^{\mathrm{MIN}[M_PM_v]}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\nu'_{m_1\cdots m_n}(k+1)\lambda_{m_1\cdots m_n}\\
&\quad(k+1)\left(\prod_{i=1}^{n}m_i\,!\right)\\
&\lambda_{m_1\cdots m_n}(k+1)=\sum_{m'=m}^{M_P}\sum_{m'_1+\cdots+m'_n=m}C_{m'_1\cdots m'_n}\\
&\quad(k+1)\times{}_{m'_1\cdots m'_n}\sigma_{m_1\cdots m_n}\{G^{-1/2}(k+1)(\beta(k+1)-\bar{Z}\\
&\quad(k+1)),\ G^{-1/2}(k+1)\Gamma^{1/2}(k+1)\}\\
&\nu'_{m_1\cdots m_n}(k+1)=\sum_{m'=m}^{M_v}\sum_{m'_1+\cdots+m'_r=m'}\nu_{m'_1\cdots m'_r}\times\\
&{}_{m'_1\cdots m'_r}\sigma_{m_1\cdots m_n}\{-V^{-1/2}(H\beta(k+1)-y(k+1)),\\
&\quad -V^{-1/2}H\Gamma^{1/2}\}
\end{aligned}
$$

である．

したがって，事後確率密度関数$P(x(k+1)\mid Y_{k+1})$は，次のように求められる．

$$
\begin{aligned}
&P(x(k)\mid Y_{k+1})=N(x(k+1)\,;\,\beta(k+1),\\
&\quad\Gamma(k+1))\Big[1+\sum_{m=1}^{M_g}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\xi_{m_1\cdots m_n}(k+1)\\
&\quad H_{m_1\cdots m_n}\{\Gamma^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\beta(k+1))\}\Big]
\end{aligned}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
&\xi_{m_1\cdots m_n}(k+1)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}m_i\,!}\cdot\frac{1}{\kappa}\cdot\\
&\left\{\sum_{m'=0}^{M_P}\sum_{m'_1+\cdots+m'_n=m'}\sum_{m''=0}^{M_v}\sum_{m''_1+\cdots+m''_n=m''}\right.\\
&\lambda_{m'_1\cdots m'_n}(k+1)\,\nu'_{m''_1\cdots m''_n}(k+1)\cdot\\
&\left.\frac{m\,!\,m'\,!\,m''\,!}{\left(\frac{m+m'-m''}{2}\right)!\left(\frac{m'+m''-m}{2}\right)!\left(\frac{m''+m-m'}{2}\right)!}\right\}\\
&|m_i-m'_i|\leqq m''_i\leqq m_i+m'_i,\ M_g=M_P+M_v
\end{aligned}
$$

である．

この密度関数について，条件付期待値及び共分散行列は，エルミート関数の直交性より得られる．

$$
\hat{x}(k+1)=\beta(k+1)+\Gamma^{1/2}(k+1)\begin{pmatrix}\xi_{10\cdots0}(k+1)\\ \xi_{01\cdots0}(k+1)\\ \vdots\\ \xi_{00\cdots1}(k+1)\end{pmatrix}\tag{25}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(k+1)=\Gamma(k+1)-(\hat{x}(k+1)-\beta(k+1))\\
&\quad(\hat{x}(k+1)-\beta(k+1))^T+\Gamma^{1/2}(k+1)\Omega(k+1)\\
&\quad\Gamma^{1/2T}(k+1)
\end{aligned}\tag{26}
$$

ただし，

$$
\Omega(k+1)=\begin{pmatrix}2\xi_{20\cdots0}(k+1) & \xi_{11\cdots0}(k+1)\cdots & \xi_{10\cdots1}(k+1)\\ \xi_{11\cdots0}(k+1) & 2\xi_{02\cdots0}(k+1)\cdots & \xi_{01\cdots1}(k+1)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \xi_{10\cdots1}(k+1) & \xi_{01\cdots1}(k+1)\cdots & 2\xi_{00\cdots2}(k+1)\end{pmatrix}
$$

である．

このように，システムの非線形性により，期待値$\hat{x}(k+1)$及び共分散$P(k+1)$は，基幹項の$\beta(k+1)$，及び$\Gamma(k+1)$とは異なる．そこで，$N(x(k+1)\,;\,x(k+1),\ P(k+1))$を基幹として書き直せば，$P(x(k+1)\mid Y_{k+1})$は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&P(x(k+1)\mid Y_{K+1})=N(x(k+1)\,;\,\hat{x}(k+1),\\
&\quad P(k+1))\Big[1+\sum_{m=3}^{M_P}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\mu_{m_1\cdots m_n}(k+1)\\
&\quad H_{m_1\cdots m_n}\{P^{-1/2}(k+1)(x(k+1)-\hat{x}(k+1))\}\Big]
\end{aligned}\tag{27}
$$

ただし，

$$
\mu_{m_1\cdots m_n}(k+1)=\begin{cases}\dfrac{1}{\prod_{h=1}^{n}m_h\,!}\Big[{}_{m_1\cdots m_n}\sigma_{0\cdots0}(a,\ B)+\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{j_1+\cdots+j_n=j}\Big\{\Big(\prod_{h=1}^{n}j_h\,!\Big)\\ \qquad\times{}_{m_1\cdots m_n}\sigma_{j_1\cdots j_n}(a,\ B)\,\xi_{j_1\cdots j_n}(k+1)\Big\}\Big] & :\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_j\geqq3\\ 0 & :\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}m_j=1,2\end{cases}
$$

$a=P^{-1/2}(k+1)(\beta(k+1)-\hat{x}(k+1))$，$B=P^{-1/2}(k+1)\Gamma^{1/2}(k+1)$である．

ここで，展開項数$M_e$は理論上$M_P+M_V$であるが，前述のように，密度関数の非負性及びDivergenceを考慮

して決定する．

したがって，適当な初期分布$P(x(0))$を与えれば，観測値を得るごとに事後確率密度関数は，(27)式より逐次求められる．

(25)式の状態推定値$\hat{x}(k+1)$は，事後確率密度関数をガウス分布と仮定すれば，第１項$\beta(k+1)$のみとなる．しかし，システムの非線形性が強い場合，第２項を無視できない．同様に，推定誤差分散$P(k+1)$も(26)式第２，３項を無視できない．したがって，システムの非線形性が強い場合，状態推定値も非ガウス性を考慮するべきであろう．

次に，分布関数$P[x(k) \leqq x_\gamma]$は，(27)式を積分することにより得られる[11]．

$$P[x(k) \leqq x_\gamma] = \mathrm{erf}(x_\gamma) + (-1)^n \sum_{m=\mathrm{Max}[0,3-n]}^{M_e-n} \sum_{m_1+\cdots+m_n=m} [N(x(k)\,;\hat{x}(k),\ P(k)) \,|\, x(k)=x_\gamma \; \mu_{m_1+1\cdots m_n+1}(k) \times H_{m_1\cdots m_n}\{P^{-1/2}(k)(x_\gamma - \hat{x}(k))\}] \qquad (28)$$

さらに，上式より下側確率$\gamma_1$パーセント点$X_{\gamma_1}$及び上側パーセント点$X_{\gamma_2}$を求めることができる．

## 6．シミュレーション

この節では，シミュレーションにより予測及び事後確率密度関数を得，検討を加える．さらに，工学的応

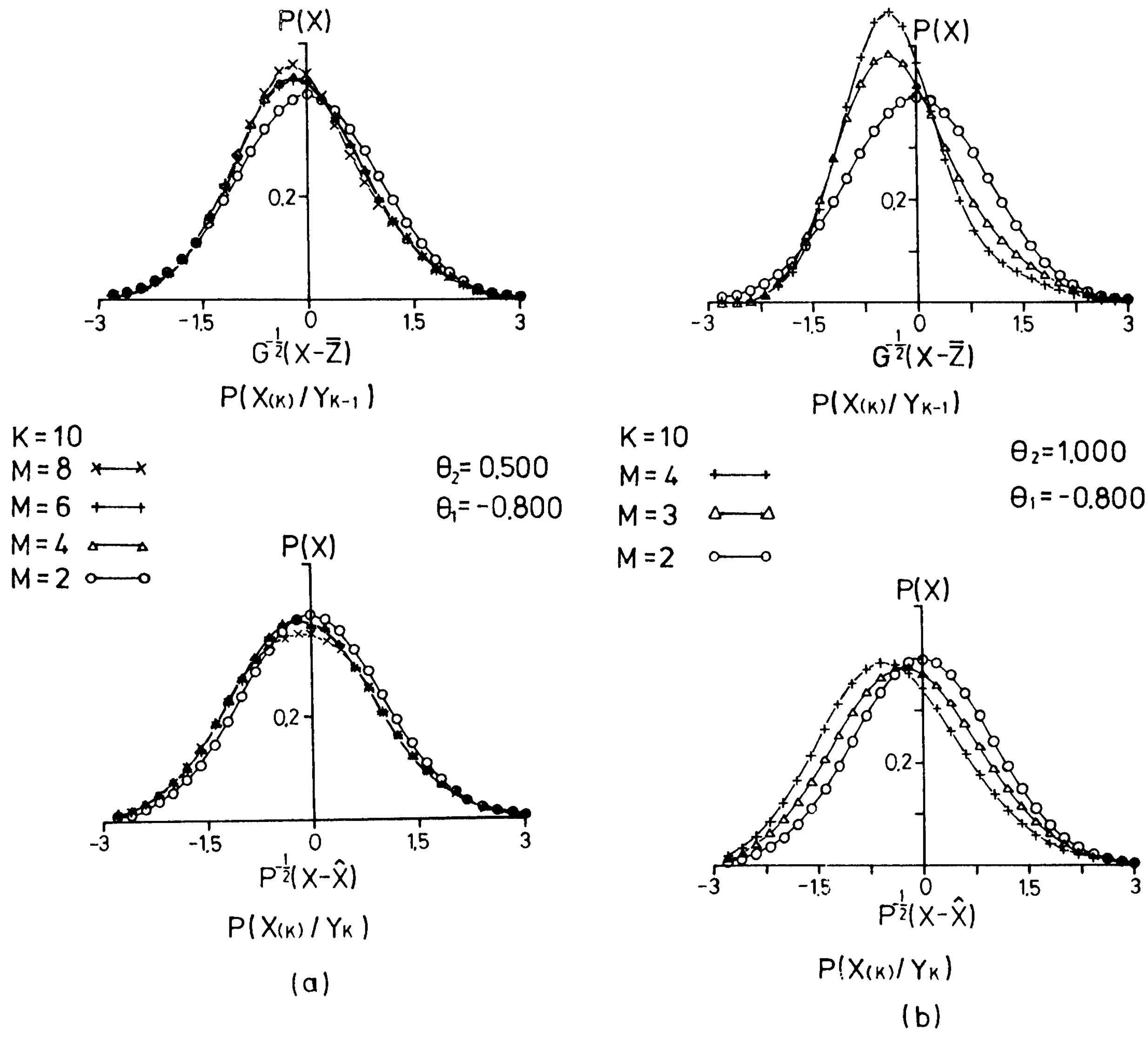


Fig. 1　Predictive and a posteriori density for number of expansion term in system 1.

用例として，状態予測値及び推定値を求める．対象とするシステムは，次の3つである．

システム1

$x(k+1)=\theta_1 x(k)+\theta_2 x^2(k)+w(k)$，$w(k) \sim N(0,\ \sigma_w{}^2)$

$y(k)=x(k)+v(k)$，$v_{(k)} \sim N(0,\ \sigma_v{}^2)$

システム2

$$x(k+1)=\begin{pmatrix}\theta_1 x_1(k)+\theta_2 x_1{}^2(k)+\theta_3 x_2(k)\\ \theta_4 x_1(k)\end{pmatrix}+w(k)$$

$y(k)=x_1(k)+v(k)$，$w(k) \sim N(0,\ W)$，$v(k) \sim N(0,\ \sigma_v{}^2)$

システム3

$$x(k+1)=\begin{pmatrix}\theta_1 x_1(k)+\theta_2 x_1{}^2(k)+\theta_3 x_2(k)\\ \theta_4 x_1(k)+\theta_5 x_2(k)+\theta_6 x_2{}^2(k)\end{pmatrix}+w(k)$$

$y(k)=x(k)+v(k)$，$w(k) \sim N(0,\ W)$，$v(k)=N(0,\ V)$

システム4

$x(k+1)=\theta_1 x(k)+\theta_2 x^2(k)+w(k)$

$y(k)=x(k)+v(k)$

$$w(k) \sim N(0,\ \sigma_w{}^2)\left[1+\sum_{m=3}^{5}\xi_m H_m\{\sigma_w{}^{-1}w(k)\}\right]$$

$$v(k) \sim N(0,\ \sigma_v{}^2)\left[1+\sum_{m=3}^{5}\nu_m H_m\{\sigma_v{}^{-1}v(k)\}\right]$$

システム1で，$\theta_1=-0.8$，$\theta_2=0.5$，$\sigma_w^2=0.35$，$\sigma_v{}^2=0.3$について初期分布を$N(0,\ 0.35)$として，$k=1\sim15$の事後確率密度関数を求めた．基幹項 $(M=2)$ 及び展開項数$M=4$，6，8とした場合，$k=10$の密度関数を図1－aに示す．ただし，図では，平均・分散で規格化している．この場合，各時刻を通じて展開項数$M=4$，6，8ではあまり差異がなく，計算量を考えれば

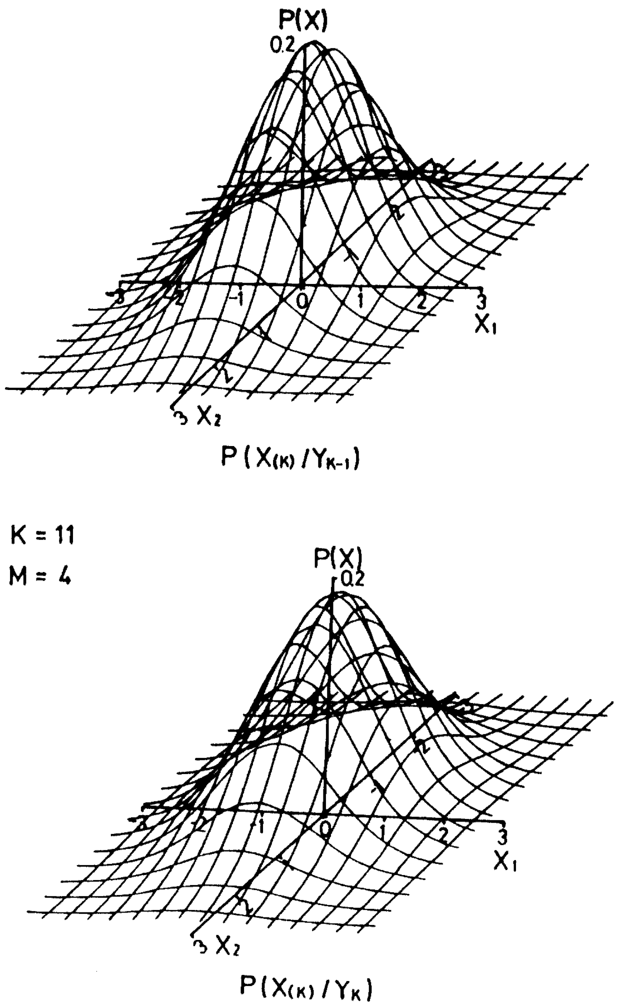


Fig. 2 Predictive and a posteriori density for number of expansion term in system 2.

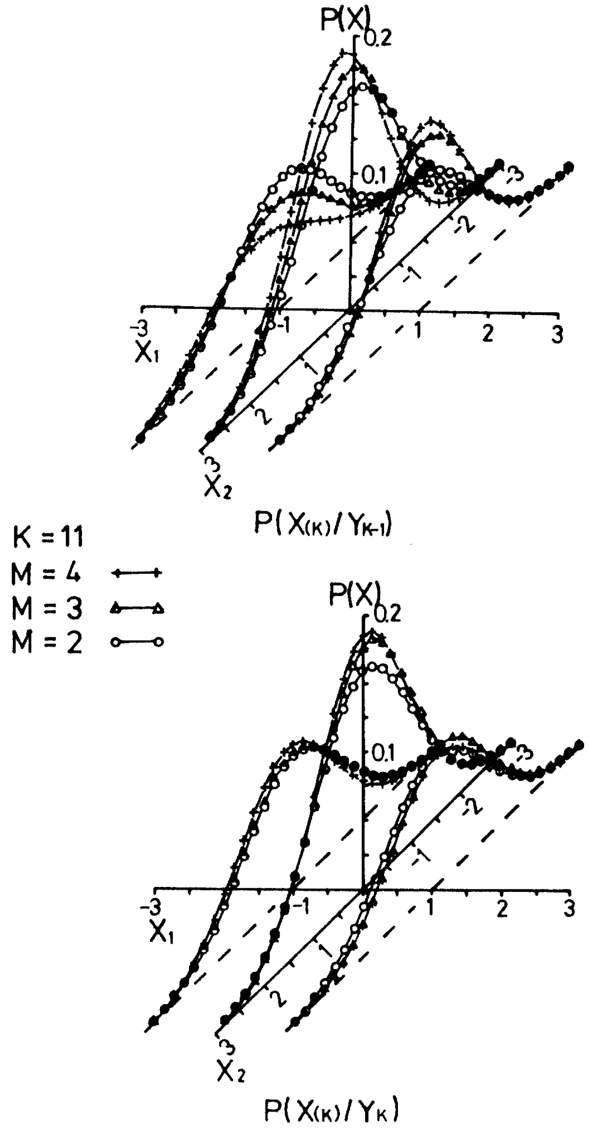


Fig. 3 Predictive and a posteriori density for number of expansion term in system 3.

4項で適当と思われる．さらに，非線形性を強く$\theta_2=1.0$とした時の密度関数を図1－bに示す．展開係数が大きくなり，基幹項との差異が大きくなっていることがわかる．

システム2で，$\theta_1=-0.5$，$\theta_2=0.8$，$\theta_3=-0.2$，$\theta_4=0.9$, $W=0.36\,I$, $\sigma_v{}^2=0.36$について初期分布をN(0，0.35 I)とし，k＝1～15の事後確率密度関数を求めた．展開項数M＝4，k＝11について規格化した各密度関数を図2に示す．この場合も各時刻を通じて，非ガウス性を示している．

システム3で，$\theta_1=-0.5$，$\theta_2=0.8$，$\theta_3=\theta_4=0.0$，$\theta_5=-0.5$, $\theta_6=0.8$, $W=V=0.36\,I$について初期分布をN(0，0.36 I)とし，k＝1～15の事後確率密度関数を求めた．基幹項と展開項数M＝3,4，k＝11について規格化した各密度関数を図3に示す．この場合もシステムの非線形性により，各時刻とも基幹項との差が見られる．

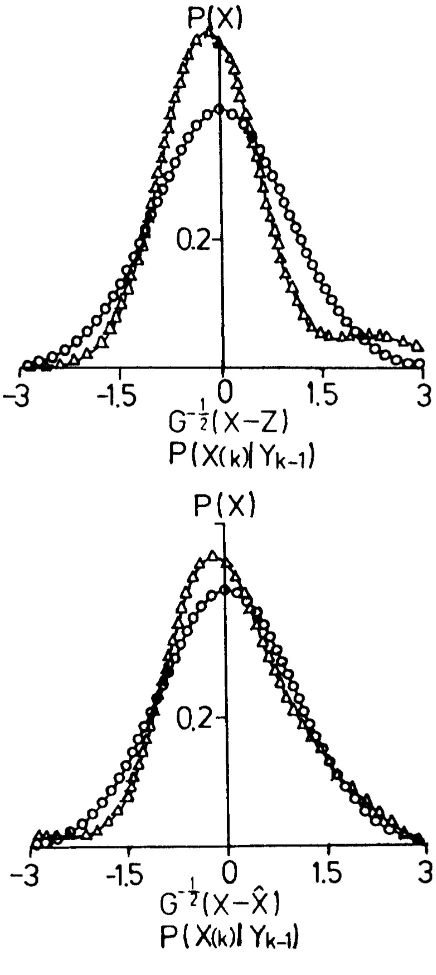


Fig. 4 Predictive and a posteriori density for number of expansion term in system 4.

システム4で，$\theta_1=-0.8$，$\theta_2=1.1$，$\sigma_W{}^2=0.35$，$\sigma_V{}^2=0.30$，$\xi_3=6.10\times10^{-2}$，$\xi_4=1.17\times10^{-2}$，$\xi_5=3.11\times10^{-3}$ $\nu_3=6.10\times10^{-2}$，$\nu_4=1.17\times10^{-2}$，$\nu_5=3.11\times10^{-3}$について，初期分布N(0，0.35)とし，事後確率密度関数を求めた．k＝11での基幹項と，Divergenceにより適切な展開項数を選んだ場合について，規格化した各密度関数を図4に示す．この場合もシステムの非線形性，雑音の非ガウス性により，基幹項との差が見られる．

次に，システムの状態推定値及び誤差共分散について考察する．推定の良さの目安として，実際の推定誤差の2乗和，及び誤差分散の理論値を評価しよう．

$$J=\sum_{k=1}^{k}\|x(k)-\hat{x}(k)\|$$

$$I=\sum_{k=1}^{k}t_r(P(k))$$

システム1について，J及びIをそれぞれ表1，2に示す．

Table 1 Criterion J for number of expansion term in system 1.

| M／θ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4.587 | 4.808 | 4.901 | 4.900 | 4.950 | 4.633 |
| 3 | 4.400 | 4.603 | 4.572 | 4.388 | 4.074 | 4.083 |
| 4 | 4.272 | 4.409 | 4.321 | 4.039 | 3.641 | 3.725 |

Table 2 Criterion I for number of expansion term in system 1.

| M／θ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3.082 | 3.153 | 3.224 | 3.288 | 3.260 | 3.298 |
| 3 | 2.865 | 2.909 | 2.932 | 2.932 | 2.918 | 2.925 |
| 4 | 2.899 | 2.914 | 2.923 | 2.887 | 2.816 | 2.846 |

表1より，展開項数を増すにつれて推定誤差の2乗和Jは小さくなり，推定精度が向上していることがほかる．その改善の度合いは，システムの非線形性が強いほど著しい．表2より，誤差分散の理論値Iも同様な傾向が見られる．

システム2，3について，種々の雑音系列に対し，J, Iをそれぞれ表3～6に示す．これらの場合も，システム1と同様な傾向がみられる．

システム4についても，種々の雑音系列に対し，ガウス近似した場合と，Divergenceにより適切な項数を

Table 3 Criterion J for number of expansion term in system 2.

| Sample／M | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.790 | 4.596 | 4.418 |
| 2 | 4.457 | 4.388 | 4.290 |
| 3 | 10.07 | 9.680 | 9.591 |
| 4 | 3.451 | 3.425 | 3.390 |
| 5 | 5.754 | 5.329 | 5.161 |
| 6 | 13.46 | 13.20 | 12.98 |
| 7 | 14.48 | 14.19 | 13.77 |
| 8 | 10.08 | 9.969 | 9.475 |
| 9 | 6.721 | 6.594 | 6.012 |
| 10 | 5.338 | 4.763 | 4.853 |

Table 4 Criterion I for number of expansion term in system 2.

| Sample／M | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 7.346 | 6.919 | 6.788 |
| 2 | 7.354 | 6.917 | 6.782 |
| 3 | 7.385 | 6.811 | 6.683 |
| 4 | 7.265 | 7.262 | 7.045 |
| 5 | 7.296 | 7.485 | 7.330 |
| 6 | 7.297 | 7.090 | 6.870 |
| 7 | 7.325 | 7.408 | 7.188 |
| 8 | 7.360 | 7.160 | 7.065 |
| 9 | 7.216 | 7.117 | 7.080 |
| 10 | 7.455 | 6.945 | 7.025 |

Table 5 Criterion J for number of expansion term in system 3.

| Sample／M | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.419 | 4.189 | 3.996 |
| 2 | 2.157 | 2.153 | 2.055 |
| 3 | 3.402 | 3.393 | 3.349 |
| 4 | 3.252 | 3.116 | 3.062 |
| 5 | 4.843 | 4.747 | 4.722 |
| 6 | 1.167 | 1.063 | 1.011 |
| 7 | 2.672 | 2.480 | 2.474 |
| 8 | 3.419 | 3.238 | 2.969 |
| 9 | 3.921 | 3.712 | 3.400 |
| 10 | 4.101 | 3.641 | 3.267 |

Table 6 Criterion I for number of expansion term in system 3.

| Sample／M | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1 | 4.444 | 4.279 | 4.052 |
| 2 | 4.285 | 4.159 | 4.003 |
| 3 | 4.184 | 4.065 | 3.902 |
| 4 | 4.285 | 4.144 | 4.092 |
| 5 | 4.446 | 4.267 | 4.104 |
| 6 | 4.242 | 4.136 | 3.955 |
| 7 | 4.568 | 4.296 | 4.349 |
| 8 | 4.393 | 4.198 | 4.060 |
| 9 | 4.601 | 4.326 | 4.111 |
| 10 | 4.713 | 4.382 | 4.162 |

Table 7 Criterion J for number of expansion term in system 4.

| Sample／M | 2 | M |
|---|---|---|
| 1 | 4.881 | 4.455 |
| 2 | 3.175 | 3.122 |
| 3 | 4.837 | 4.333 |
| 4 | 3.401 | 2.824 |
| 5 | 6.143 | 6.077 |
| 6 | 7.518 | 7.108 |

M：Divergenceによって決まる項数

Table 8 Criterion I for number of expansion term in system 4.

| Sample／M | 2 | M |
|---|---|---|
| 1 | 6.692 | 6.387 |
| 2 | 3.586 | 3.467 |
| 3 | 6.968 | 6.376 |
| 4 | 3.669 | 3.564 |
| 5 | 8.919 | 8.721 |
| 6 | 8.496 | 8.110 |

M：Divergenceによって決まる項数

選んだ場合のJ, Iを表7，8に示す．J, Iとも適切な展開項数を選んだ場合の方が小さくなり，推定精度が向上している．

以上の結果から，非ガウス性を考慮し，適切な展開項数で，事後確率密度関数をより正確に表すことが可能である．

## 6．結　言

汎関数展開可能な系を対象とし，その事後確率密度関数を系統的にエルミート展開表現として与えた．事後確率密度関数をベイズの定理より求める際，複数のたたみ込み積分を必要とする．そのため，エルミート関数の組み換え公式を導出し，エルミート関数の直交性を利用してたたみ込み積分を解析的に行なった．さらに，シミュレーションにより事後確率密度関数を算出し，状態推定を行なった結果，本方法の理論的正当性の一端が示された．

今後の課題としては，適切な展開項数についての検討，及び状態値の条件付頻度分布を求め，導出した密度関数と比較検証することが考えられる．

## 参　考　文　献


1）砂原善文，確率システム理論II，朝倉書店，昭57

2）坂和愛幸，最適システム理論，コロナ社，昭47

3）辻　他，確率補正を伴う離散形の高次モーメント非線形フィルタ，計測自動制御学会論文集Vol. 9－3，1973

4）太田　他，パワー観測機構をもつ確率システムの推定，電気学会論文誌　Vol. 97C－7，1977

5）M. L. Dashevskii："Design of Conditionally Optimal Filters Based on Optimal Nonlinear Filtering Equation", Automation and Remote Control Vol.44－10　1984

6）E. G. Gilbert："Functional Expansions for the Response of Nonlinear Differential Systems," IEEE Trans. on AC Vol.22　AC－6，1977

7）P. I. Kuznetsov, R. L. Stratonovich & V. I. Tikhonov: "Theory of Probability and its Applications 5",80，1970

8）竹内　啓，確率分布の近似，教育出版，昭50

9）小松勇作，特殊関数，朝倉書店，昭54

10）沖田　他，構造未知な非線形システムの一同定法，電気学会論文誌，Vol. 99 C－9，1979

11）太田　他，非線形帰還形確率システムの多変量出力分布に関する一非定常応答解析，計測自動制御学会論文集　Vol. 12－4　1976


（昭和63年4月15日受理）

## 付　録

1．エルミート関数の組み換え

$$H_{m_1\cdots m_r}\{A_1^{-1/2}(Hx-u_1)$$

$$=\frac{d^m}{dt_1^{m_1}\cdots dt_r^{m_r}}e^{t^TA_1^{-1/2}(Hx-u_1)-1/2t^Tt}\Big|_{t=0}$$

上式を変形して微分を実行すれば、次のように表わされる。

$$H_{m_1\cdots m_r}\{A_1^{-1/2}(Hx-u_1)\}$$

$$=\sum_{i_1+k_1=m_1}\cdots\sum_{i_r+k_r=m_r}\{\prod_{\ell=1}^{r}(m_\ell C_{i_\ell})$$

$$\times\frac{d^i}{dt_1^{i_1}\cdots dt_r^{i_r}}e^{(B^Tt)^TA_2^{-1/2}(x-u_2)-1/2(B^Tt)^T(B^Tt)}\Big|_{t=0}$$

$$\times\frac{d^k}{dt_1^{k_1}\cdots dt_r^{k_r}}e^{t^Ta-1/2t^Tt+1/2(B^Tt)^T(B^Tt)}\Big|_{t=0} \qquad \text{(A-1)}$$

$$a=A_1^{-1/2}(Hu_2-u_1),\quad B=A_1^{-1/2}HA_2^{1/2}$$

ここで，$\tau=B^Tt$とおけば次式を得る。

$$\frac{d^i}{dt_1^{i_1}\cdots dt_r^{i_r}}e^{(B^Tt)^TA-\frac{1}{2}(x-u_2)-1/2(B^Tt)^T(B^Tt)}\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_{\ell_1=1}^{n}\cdots\sum_{\ell_1=1}^{n}\left(\prod_{h=1}^{i_1}(B)_{1\ell_h}\prod_{h=i_1+\cdots ti_{r-1}+1}^{i_1}(B)_{r\ell_h}\right)$$

$$\times\frac{d^l}{d\tau_{l_1}\cdots d\tau_{l_l}}e^{\tau^TA_2^{-1/2}(x-u_2)-1/2\tau^T\tau}\Big|_{\tau=0}$$

上式及びエルミート関数の定義を用い，$i_r$についての和を$\ell'_r$についての和に書きなおせば次式を得る。

$$H_{m_1\cdots m_r}\{A_1^{-1/2}(Hx-u_1)\}$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{i_1+\cdots+i_r=i}(\prod_{\ell=1}^{r}m_\ell C_{i_\ell})M_{m_1-i_1\cdots m_r-i_r}(a,\ B)$$

$$\times\sum_{\ell_1=1}^{n}\cdots\sum_{\ell_1=1}^{n}\left(\prod_{h=1}^{i_1}(B)_{1\ell_h}\cdots\prod_{h=i_1+\cdots+i_{r-1}+1}^{i}(B)_{r\ell_h}\right)$$

$$\times H_{j_1\cdots j_n}\{A_2^{-1/2}(Hx-u_2)\}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{\ell'_1=1}^{r}\cdots$$

$$\sum_{\ell'_1=1}^{r}(\prod_{\ell=1}^{r}m_\ell C_{i_\ell})M_{m_1-i_1\cdots m_r-i_r}(a,\ B)\times\frac{i_1!\cdots i_r!}{i!}$$

$$\times\sum_{\ell_1=1}^{n}\cdots\sum_{\ell_1=1}^{n}\left(\prod_{h=1}^{i}(B)_{\ell'_h\ell_h}\right)H_{j_1\cdots j_n}\{A_2^{-1/2}(x-u_2)\}$$

$$\text{(A-2)}$$

ただし，

$$j_r=\sum_{h=1}^{i}\delta_{\ell_h r},\quad i=j \qquad \text{(A-3)}$$

である。

さらに，(A-2)式に(A-3)式及び(12)式を考慮すれば，(11)式の組み換え公式を得る。

2．(22)式の導出

(13)式より，エルミート関数$H_{m_1\cdots m_n}\{f(x_{(k)},\ u_{(k)})\}$は，

次のように表わされる。

$$H_{m_1\cdots m_n}\{f(x_{(k)},\ u_{(k)})\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left\{\sum_{j=0}^{[\frac{m_i}{2}]}\frac{(-1)^j m!}{2^j j!(m_i-2j)!}\sum_{\ell=0}^{(m_i-2j)N}\right.$$

$$\sum_{h_1+\cdots+h_n=\ell}\{{}_{m_1\cdots m_n}\phi_{ih_1\cdots h_n}(k)\times\prod_{r=1}^{n}x_r^{h_r}(k)\}$$

ただし,

$${}_{m_1\cdots m_n}\phi_{ih_1\cdots h_n}(k)=\sum_{\sum_{r=1}^{m_i-2j}h_{1r}=h_1}\cdots\sum_{\sum_{r=1}^{m_i-2j}h_{nr}=h_n}$$

$$\left(\prod_{r=1}^{m_i-2j}\theta_{ih_{1r}\cdots h_{nr}}(k)\right)$$

である。

また，上式でjについての和と$\ell$についての和を交換すれば次式を得る.

$$H_{m_1\cdots m_n}\{f(x(k),\ u(k))\}=\prod_{i=1}^{n}\{\sum_{\ell_i=0}^{m_iN}\sum_{h_1^i+\cdots+h_n^i=\ell_i}$$

$${}_{m_1\cdots m_n}\phi'_{ih_1\cdots h_n}(k)(\prod_{r=1}^{n}x_r^{h^i_r}(k))\}$$

ただし,

$${}_{m_1\cdots m_n}\phi'_{ih_1\cdots h_n}(k)=\sum_{j=0}^{[\frac{-\ell_i}{2N_i}+\frac{m_i}{2}]}\frac{(-1)^j m!}{2^j j!(m_i-2j)!}\cdot$$

$${}_{m_1\cdots m_n}\phi_{ih_1\cdots h_n}(k)$$

である。

さらに，上式を$x_r(k)$のべき乗について整理すると，次式を得る。

$$H_{m_1\cdots m_r}\{f(x(k),\ u(k))\}=(\sum_{\ell_1=0}^{m_1N}\sum_{h'_1+\cdots+h'_n=\ell_1})\cdots$$

$$(\sum_{\ell_n=0}^{m_nN}\sum_{h_1^n+\cdots+h_n^n=\ell_n})\left\{{}_{m_1\cdots m_n}\phi''_{h'_1\cdots h'_n\cdots h_1^n\cdots h_n^n}(k)\right.$$

$$\left.\left(\prod_{r=1}^{n}x_r^{h_r}(k)\right)\right\}$$

ただし,

$${}_{m_1\cdots m_n}\phi''_{h'_1\cdots h'_n\cdots h_1^n\cdots h_n^n}(k)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}{}_{m_1\cdots m_n}\phi'_{ih_1^i\cdots h_n^i}(k),$$

$$h_r=\sum_{i=1}^{n}h_r^i$$

である。

上式では，変数$\ell_i$のそれぞれの和を実行する必要がある。そこで，新しい変数$\ell$ ($\ell=\sum_{i=1}^{n}\ell_i$)を導入して，整理すれば次のようになる。

$$H_{m_1\cdots m_n}\{f(x(k),\ u(k)\}=\left(\sum_{\ell=0}^{\sum_{i=1}^{n}m_iN}\sum_{h_1+\cdots+h_n=\ell}\right)$$

$$\left(\sum_{\ell_1=\mathrm{Max}[0,\ \ell-\sum_{i=2}^{n}m_iN]}^{\mathrm{MIN}[m_1N,\ell]}\sum_{\sum_{r=1}^{n}h'_r=\ell_1}\right)\cdots$$

$$\left(\sum_{\ell_{n-1}=\mathrm{Max}[0,\ \ell-m_nN-\sum_{i=1}^{n-2}\ell_i]}^{\mathrm{MIN}[m_{n-1}N,\ \ell-\sum_{i=1}^{n-2}\ell_i]}\sum_{\sum_{r=1}^{n}h_r^{n-1}=\ell_{n-1}}\right)$$

$$\left\{{}_{m_1\cdots m_n}\phi''_{h'_1\cdots h'_n\cdots h_1^n\cdots h_n^n}(k)\left(\prod_{r=1}^{n}x_r^{h_r}(k)\right)\right\}$$

$$=\sum_{\ell=0}^{\sum_{i=1}^{n}m_iN}\sum_{\sum_{r=1}^{n}h_r=\ell}\left\{{}_{m_1\cdots m_n}\phi'''_{h_1\cdots h_n}(k)\prod_{r=1}^{n}x_r^{h_r}(k)\right\}$$

ここで，上式に対して(14)式を用い，${}_{m_1\cdots m_n}\phi'''_{h_1\cdots h_n}(k)$及び，${}_{m_1\cdots m_n}\eta_{\ell_1\cdots\ell_n}(k)$を$\theta'_{im_1\cdots m_n}(k)$及び$\alpha_{im_1\cdots m_n}(k)$に対応させれば(22)式が，導出される。