

## 二次元粗度の流体抵抗について

椿 東 一 郎

Synopsis. As the fundamental cases of two dimensional roughness, we have discussed the flow characteristics of stream over the rectangular roughness and of the cylindrical roughness placed transversely to the direction of flow. Taking into account the properties of wake created by the roughness, the flow pattern within the roughness layer and the hydrodynamical forces acting on the battens themselves are estimated. As the results, it is pointed out that the occurrence of the maximum of the equivalent roughness at the spacing-height ratio of 9~18, which has been well known experimentally with no satisfactory theory, is attributed to the fact that the shape resistance per one roughness increases with increase of spacing-height ratio, while the number of roughness per unit length decreases conversely.

The theoretical results are verified with the experimental results summarised by J. W. Johnson for rectangular roughness and with those by Hosoi for cylindrical roughness.

### 1. 緒 言

円管および開水路流れの流速分布は対数分布法則に従うから、流速の大きさを求めるには相当粗度  $k_s$  の値を知ればよい。 $k_s$  は壁面の粗さの大きさを表わすものであるが、C. F. Colebrook と C. M. White<sup>1)</sup>, H. Schlichting<sup>2)</sup> や後述の水理学者等の研究により、 $k_s$  の値は粗度の大きさ、配列及びその形状によってさまることが実験的に明らかにされた。一方、H. M. Mories<sup>3)</sup> は粗度の形状抵抗及び粗度間の間隔が流れの抵抗係数に及ぼす意義を強調して、粗面上の流れを wake interference flow, isolated roughness flow 及び quasi-smooth flow の三種に分類し、また栗原教授<sup>4)</sup> は粗面附近の乱れの場合を考察して、粗面を vortex type と wake type とに分類し、粗滑遷移領域における抵抗法則を求めるなど、最近、粗度の水理学的な機構についての研究が盛んに行なわれるようになってきた。

さて、粗度の重要な一つの型として、底面に棧を流れ方向に直角に一定の間隔で敷き並べた人工粗度や、流砂河川の河床に形成される砂漣のような2次元粗度があげられる。後者については、砂漣が流砂河川の抵抗係数や流砂量に対して大きな役割をもつことから、著者ら<sup>5)6)</sup> は既に若干の考察を行なってきた。前者については、河川の模型実験に際して模型に与える粗度として重要であるため、水理学の研究者によって多くの実験が行なわれ、興味深い特性が見出されているけれども、未だに理論的な裏づけを欠いているように思われる。

2次元粗度では底面の粗さの上に、スケールの大きい凹凸が共存するから、H. A. Einstein<sup>7)</sup> や Mories<sup>3)</sup> が指摘しているように、河床の全抵抗は凹凸の圧力抵抗と底面の摩擦抵抗とを合成したものである。然しながら、J. W. Johnson<sup>8)</sup> が矩形粗度に関する実験資料を整理した結果によると、棧の高さを  $k$ 、ピッチを  $s$ 、巾を  $t$  として、相当粗度の無次元表示  $k_s/k$  はピッチ高さ比  $s/k$  および巾高さ比  $t/k$  の関数となり、 $s/k=9\sim 18$  において極大値をもっている。このことは粗度のもつ注目すべき特性であって、抵抗要素の合成機構が粗度相互の干渉のため

に甚だ複雑であることを示しており、それらを見放した両者の理論には、検討の余地が多いように思われる。従って、合成抵抗の問題においては、各抵抗要素が粗度の配列によって如何に変化するかを求めることが基本的な問題となる。また、そのためには、粗度附近の流れを解析し、粗度により作り出される後流 (wake) の velocity defect の作用や乱流交換の増加などを考慮することが必要である。

本文は2次元粗度の基本的なものとして矩形粗度を主として取扱い、上述の観点から抵抗の合成機構を推定し、2次元粗度の解析の方針を示すとともに、その特性について考察したものである。

## 2. 流速分布と抵抗要素の平衡条件

円管や開水路乱流の流れは、壁面に近接した狭い領域を除くと、速度勾配のために発生し与えられた空間に対応する混合距離をもつ乱れに支配され、壁面の性質の如何にかかわらず同じ法則に従う。従って、流れを二つの部分に分け、壁面附近の狭い領域において、粗度によって作り出される流れの模様を知れば、抵抗法則あるいは相当粗度を求めることができる。

まず、上層部の流れについては、混合距離  $l$  に Prandtl の仮定を用い、壁面からの距離を  $y$  とすると

$$l = \kappa y$$

とかける。 $\kappa$  は Kármán の常数で、 $\kappa = 0.4$  である。したがって、流速分布は摩擦速度を  $u_*$  とし、対数分布法則

$$\frac{u}{u_*} = A + \frac{1}{\kappa} \log \frac{u_* y}{\nu}$$

に従う。ここに、 $\nu$ ,  $A$  は動粘性係数及び積分常数である。

両層の境界の高さは次元的に  $\alpha k$  であるから、その高さにおける流速を  $u_0$  とすれば、上式は

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_0}{u_*} + \frac{1}{\kappa} \log \frac{y}{\alpha k} \quad (1)$$

となる。ここで  $u_0$  は粗度の直接の影響が支配的な領域、すなわち  $y \leq \alpha k$  の流れを規定する代表流速である。

相当粗度  $k_s$  は一様粒径の砂を密にしきつめた Nikuradse の実験式

$$\frac{u}{u_*} = 8.5 + 5.75 \log_{10} \frac{y}{k_s} \quad (2)$$

あるいは、上式を積分して得られるものとはほぼ同一の抵抗法則

$$\sqrt{\frac{\rho u^2}{2}} = 3.48 + 4 \log_{10} \frac{2R}{k_s} \quad (3)$$

を標準にしてきめられる。ここに、 $\tau_0$  は壁面における剪断応力、 $\bar{u}$ ,  $R$  はそれぞれ平均流速、径深である。従って、(1), (2)式より相当粗度の無次元表示は直ちに得られる。すなわち、

$$\log_{10} \frac{k_s}{k} = \frac{1}{5.75} \left( 8.5 - \frac{u_0}{u_*} \right) + \log_{10} \alpha \quad (4)$$

図-1のような2次元矩形粗度では、流れ全体の平衡条件からきめられる壁面の剪断応力  $\tau_0$  は、図の1ピッチについて次の3種の抵抗から合成される。すなわち、棧の圧力抵抗、棧の中  $t$  における摩擦抵抗及び底面  $s-t$  の長さにそう摩擦抵抗である。棧の圧力抵抗は棧直前の流

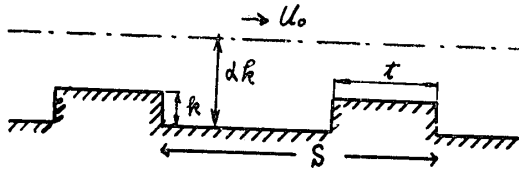


図 - 1

れの代表流速を  $u_e$ , その抵抗係数を  $c_{x1}$  として  $\frac{1}{2}\rho c_{x1} u_e^2 k$  で表わされる。上述の2つの摩擦抵抗は、ともに境界層の発達に基因するものであって、境界層外側の速度をそれぞれ  $u_0, u_b$  とする。 $u_e$  は棧によって作られる後流の底面に対

する代表的な流速である。また、有効長はそれぞれ  $t, s-t$  であるから、抵抗係数を  $c_{x2}, c_{x3}$  とすると、摩擦抵抗は  $\frac{1}{2}\rho c_{x2} u_0^2 t, \frac{1}{2}\rho c_{x3} u_b^2 (s-t)$  となる。結局、壁面における応力の平衡条件は次のようになる。

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{1}{2} c_{x1} u_e^2 \frac{k}{s} + \frac{1}{2} c_{x2} u_0^2 \frac{t}{s} + \frac{1}{2} c_{x3} u_b^2 \frac{s-t}{s}$$

ここに、 $\tau_0/\rho$  は径深を  $R$ , 勾配を  $I$  として、 $\tau_0/\rho = u_*^2 = gRI$  である。上式を書きなおすと、 $u_0/u_*$  について次式が得られる。

$$\frac{u_0}{u_*} = \sqrt{1 / \left[ \frac{1}{2} c_{x1} \left( \frac{u_e}{u_0} \right)^2 \frac{k}{s} + \frac{1}{2} c_{x2} \frac{t}{s} + \frac{1}{2} c_{x3} \left( \frac{u_b}{u_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{t}{s} \right) \right]} \quad (5)$$

両層の境界の高さを表わす  $\alpha$  はピッチ高さ比  $s/k$  の関数と思われるが、今のところ理論的には求め難いので、後に実験との比較からきめる。このようにして、粗度相互間の干渉が著しい場合における、2次元粗度の流体抵抗を明らかにするには、 $u_e/u_0, u_b/u_0$  や抵抗係数が粗度のスケールによって、どのように変化するかを求めればよい。

### 3. 2次元後流の性質

矩形粗度の有効間隔  $s-t$  が小さいときには、棧の背後に形成される後流は隣りの棧にさまたげられて、充分に発達することができず、ただ渦が後方に剝離される。 $s-t$  が大きくなるに従って後流は発達してゆき、粗度附近の流れにはその性質が顕著にあらわれてくるであろう。この粗度による後流の性質は粗度相互の干渉、上層部の流れとの干渉などのために、非常に複雑なものと思われるが、今の目的に対しては大まかに次のように考える。粗度の後流は壁面からある程度はなれると、上層部の乱れのためにその性質を失なうが、 $s/k$  が非常に大きくない限り、粗度の近傍においては後流特有の性質が保存される。実際、境界の高さ  $ak$  はこれら2つの性質をもつ流れの境界を表わすものである。従って、粗度によって作られる後流の  $y \leq ak$  における性質は、自由な流れのなかにおかれた2次元物体の後流を中心線で分割した半平面の流れと似かよったものと考えられる。

H. Schlichting<sup>9)</sup> の研究により、流れ方向に  $x$  軸、それに垂直に  $y$  軸をとると、物体から相当離れたところでは、velocity defect  $u_1 (= u_0 - u)$  および後流の巾  $b$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= 0.526c^{-\frac{1}{2}} \xi^{-\frac{1}{2}} (\eta^{\frac{3}{2}} - 1)^2 \\ \frac{b}{c_{x1} k} &= 2.115c^{\frac{1}{2}} \xi^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここに、

$$\xi = \frac{x}{c_{x1} k}, \quad \eta = \frac{y}{c_{x1} k} \xi^{-\frac{1}{2}} 0.473c^{-\frac{1}{2}}$$

上式で  $c_{x1}$  は次式

$$\rho \int_0^b u_0 u_1 dy = \frac{1}{2} \rho c_{x1} k u_0^2$$

で定義され、 $c$  は混合距離  $l$  の表示式

$$\frac{l}{c_{x1}k} = c\xi^{\frac{1}{2}}$$

にあらわれる係数である。

矩形粗度の場合には、有効間隔の大きくない場合も取り扱うので、上式には若干の修正を加える必要がある。まず、物体に接する背後には死水領域が存在するので、その長さを  $x_0$ 、対応する  $\xi$  を  $\xi_0$  とする。また、後流の中  $b$  は  $\xi=0$  で  $k$  である。従って、粗度の直後における上の2条件と、充分離れた所で成り立つ(6)式をともに満足させると

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_1}{u_0} &= 0.526c^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\xi - \xi_0 + (0.526c^{-\frac{1}{2}})^2} \right\}^{\frac{1}{2}} (\eta^{\frac{3}{2}} - 1)^2 \\ \eta &= \frac{y}{c_{x1}k} 0.473c^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{\xi + \left(\frac{0.473c^{-\frac{1}{2}}}{c_{x1}}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる。

粗度の圧力抵抗を支配する速度  $u_e/u_0$  は、棧直前の後流速度であるから、 $x=s-t$  における流速を壁面  $y=0$  より高さ  $y=k$  にわたって平均したもので表わすのが自然であろう。従って

$$\frac{s-t}{c_{x1}k} = \xi_e$$

とおくと、 $\xi_e \geq \xi_0$  に対しては次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_e}{u_0} &= 1 - \frac{0.526c^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\xi_e - \xi_0 + (0.526c^{-\frac{1}{2}})^2}} \left( \frac{\eta_*^3}{4} - \frac{4}{5}\eta_*^{\frac{3}{2}} + 1 \right) \\ \eta_* &= \frac{0.473c^{-\frac{1}{2}}}{c_{x1}\sqrt{\xi_e + \left(\frac{0.473c^{-\frac{1}{2}}}{c_{x1}}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また、壁面にそって発達する境界層を支配する代表流速  $u_b/u_0$  は底面にそう後流速度によってきまる。この速度は  $\xi=\xi_0$  における零より  $\xi$  とともに大きくなり、境界層も  $\xi_0$  より発達し始める。いま、簡単に  $\xi_e$  までの壁面後流速度の平均が境界層の摩擦抵抗を規定する代表速度とみなすと次のようになる。

$$\frac{u_b}{u_0} = \left(1 - \frac{\xi_0}{\xi_e}\right) - \frac{2 \times 0.526c^{-\frac{1}{2}}}{\xi_e} \left[ \sqrt{\xi_e - \xi_0 + (0.526c^{-\frac{1}{2}})^2} - 0.526c^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (9)$$

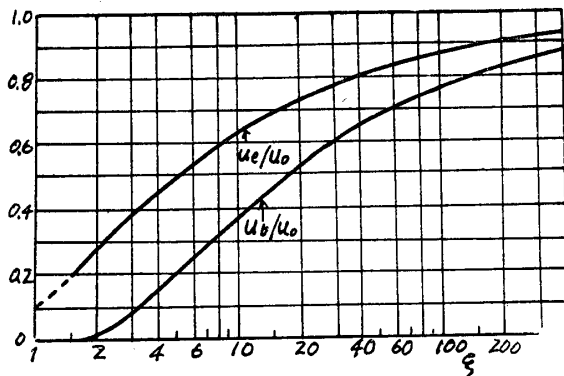


図 - 2

#### 4. 数値的考案

(8), (9)式における  $c$ ,  $\xi_0$  および(5)式における抵抗係数  $c_{x1}$ ,  $c_{x2}$  および  $c_{x3}$  の数値を厳密に求めることは困難であるが、大きさの程度は次のようである。

まず、 $c$  は混合距離  $l$  と後流の中  $b$  との比できまる係数で、自由な流れのなかにおかれた円柱の後流に関する実験では、Reynolds数によっていくらか変化するが0.2の程度である。2次元粗度の場合にも、この値をその

まま用いると  $\sqrt{c}=0.423$  となる。矩形棧の抵抗係数  $c_{x1}$  についても、自由流れのなかの平板の実験結果を用いると  $c_{x1}=2.0$  の程度である。また、死水領域の長さ  $x_0$  は棧の高さ  $k$  に比例すると思われるが、その数値は上層部の流れとの干渉のために、自由な流れにおけるよりも若干小さくなることが予想され、 $x_0=3k$ ,  $\xi_0=1.5$  とおく。

境界層の摩擦抵抗係数  $c_{x2}$ ,  $c_{x3}$  は壁面の性質によってかわる。すなわち、壁面が滑らかな場合には、有効長を  $L$ 、境界層外側の速度を  $u$  として、抵抗係数は  $Lu/\nu$  の関数となり、壁面が相当粗度  $k_{s0}$  の場合には  $L/k_{s0}$  の関数となる。矩形粗度についての今迄の実験は、ほぼ滑らかな底面の上に棧が並べられているので、抵抗係数は Reynolds 数の関数である。然しながら矩形粗度の場合には圧力抵抗が大きいため、 $s/k$  の値がきわめて大きくない限り、摩擦抵抗は大きな役割を占めないと予想されるので簡単に次のようにおく。すなわち、Reynolds 数の小さいことおよび上層部の乱れのために抵抗が増すことを考慮して、普通の境界層よりいくらか大きめの値を取り、棧の中の抵抗係数には  $c_{x2}=0.01$ 、壁面には  $c_{x3}=0.007$  と仮定する。

2次元矩形粗度の相当粗度  $k_s/k$  は、次元解析より  $s/k$ ,  $t/k$  および  $\Delta$  を底面の apparent roughness として  $k/\Delta$  の関数である。実際、多くの研究者は滑らかな壁面の上に  $t/k$  がきまった棧を流れ方向に直角に  $s$  なるピッチで並べ、 $s/k$  をいろいろにかえて、それに伴う  $k_s/k$  の変化を実験的に求めている。すなわち、R. W. Powell, W. Tripp と J. Jonassen の実験は  $t/k=1$ , C. A. Smith と C. Warren とは  $t/k=1.25$ , Bazin, E. A. Le Roux は  $t/k=3$ , J. W. Johnson および W. Tripp の一部の測定は  $t/k=4$  について行なわれている。J. W. Johnson<sup>8)</sup> が(3)式から  $k_s$  を逆算し、これらの結果をまとめたものを図-3にうつした。

計算式のなかの係数の値がきまったので、理論の結果を実験結果と比較することができる。まず、棧の圧力抵抗、底面の摩擦抵抗を規定する速度  $u_e/u_0$ ,  $u_b/u_0$  は上述の数値を(8), (9)式に代入すると、棧の有効間隔  $\xi_e = \frac{s-t}{c_{x1}k}$  の関数として図-2のようになる。なお、同図における  $u_e/u_0$  の点線は  $\xi_e < \xi_0$  に対して計算曲線を延長した推定値である。 $c_{x1}$  は既に与えられているので、 $t/k$  をきめれば  $s/k$  は  $\xi_e$  によってきめられ、(5)式より  $u_0/u_*$  が計算される。従って、 $\log_{10}k_s/k$  は粗度領域と上層部との境界を表わす係数  $\alpha$  を除いて、(4)式より  $s/k$  及び  $t/k$  の関数として求めることができる。 $t/k=1$  および  $t/k=4$  の場合の計算結果を  $\log_{10}\alpha=0.37$  と

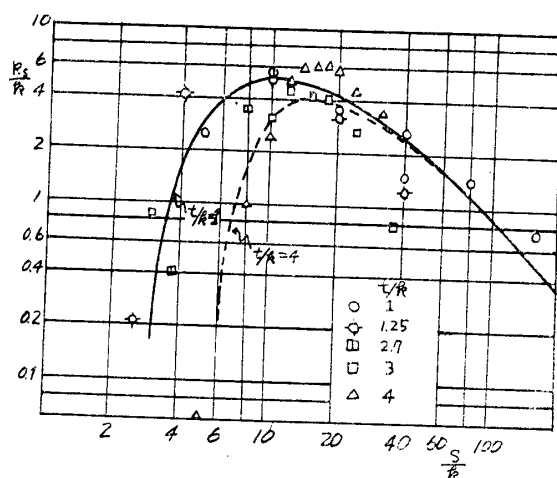


図-3 理論と実験との比較 (矩形粗度)

して図-3にそれぞれ実線及び点線で記した。

この理論はきわめて素朴なものであるが、その結果は矩形粗度の性質をよく表わしているものと云えよう。すなわち

(i) 相当粗度の極大は  $t/k=1$  のとき  $s/k=10$ ,  $t/k=4$  のとき  $s/k=15$  において起ることが示されるが、実験結果はそれぞれ  $s/k=10$ ,  $s/k=14\sim 18$  である。極大値の起るピッチ、波高比については、理論と実験とはよく一致している。

(ii)  $s/k < 10$  においては、同一の  $s/k$  に対応する  $k_s/k$  の値は  $t/k$  が大きいとき小さく、実験結果と同様な傾向を示している。

(iii) 計算によると相当粗度の最大値  $k_{smax}/k$  は  $t/k$  がますとともに、僅かながら減少す

る。一方、実験によると、この値は  $t/k=1$  のときに 5.4,  $t/k=3$  のとき 4.5,  $t/k=4$  のとき 6.3 となり簡単な傾向はみられない。これは各実験者による実験条件の差異や実験誤差に起因するのではないと思われるが、いずれにしても、極大値の大きさの程度は一致している。

以上のことから、2次元粗度とくに矩形粗度の相当粗度に極値のあらわれるのは、次のような機構によるものである。すなわち、(i) 粗度自身が大きな圧力抵抗の原因となり、しかも粗度によって作り出された後流が、圧力抵抗及び壁面にそう境界層の摩擦抵抗を規定する。(ii) 後流の発達が棧のピッチに規定されるために、有効間隔  $\frac{s-t}{k}$  がますとともに、個々の棧の圧力抵抗および棧の間の摩擦抵抗は増加する。(iii) 一方、圧力抵抗の原因となる棧の密度は  $s/k$  が大きい程小さいことである。この両作用の組み合わせのために、特定の  $s/k$  の値において、相当粗度の極大があらわれ、また  $k_s/k$  がピッチ、高さ比の関数としてきまることがわかる。

上述の考察を矩形棧以外の2次元粗度に適用することは興味深い。細井氏<sup>10)</sup>は直径  $k$  の丸いガラス棒を流れ方向に直角に一定間隔  $s$  で水路床にしきならべた実験を行ない、流速の対数分布法則が成り立つことを確かめるとともに、 $k_s/k$  と  $s/k$  との関係を求めている。<sup>11)</sup>測定値は少ないが、図-4に記したように、ほぼ  $s/k=8$  において  $k_s/k$  の最大値が生じている。

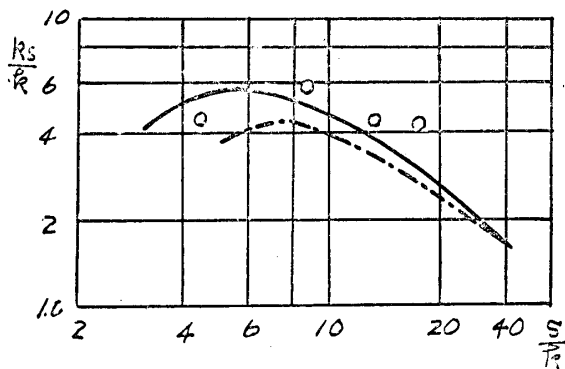


図-4 理論と実験との比較(円柱形粗度)

円柱の圧力抵抗係数は Reynolds 数によって変化するが、細井氏の実験では  $c_{x1}=1.0$  の程度である。前の諸式において、 $c_{x1}=1.0$ ,  $t/k=1$  を導入し、 $\xi_0=3$  および  $\xi_0=2$  として計算した結果をそれぞれ鎖線及び実線で示した。現象が複雑であるから、この程度的一致はかなり滞足すべきものであろう。

本文においては、 $k_s/k$  の値が  $s/k=10\sim 15$  で最大値をとるという矩形粗度の特性を主として考察したため、前述の諸係数には、 $s/k$  の値が10附近で妥当と思われる値を用いてきた。

$s/k$  が大きくなると、本文で主として取り扱った後流の velocity defect よりも、むしろ後流で作られた乱れや底面の境界層が重要な役割をもつ型に移行するから、 $\alpha$  や底面の摩擦係数を常数とみなし得ないようになるであろう。然し、図-3において、 $s/k=40$  附近の実験結果は非常に散らばっており、また資料も少ないために、この領域については詳しく吟味することができなかった。

なお、Einstein<sup>7)</sup>の合成抵抗に関する linearity theory および Moris<sup>3)</sup>の isolated roughness flow の理論は、いずれも、本文の(5)式において、 $u_e/u_0=1$ ,  $\frac{u_b}{u_0}=1$  とおいた場合にほぼ相当している。

## 5. 結 語

以上において、2次元粗度の全抵抗を構成する圧力抵抗および底面にそう境界層の摩擦抵抗の各々が、粗度相互の干渉作用のために、その配列に規定されるものと考え、さらに、粗度によって作り出される後流の velocity defect に注目して、流体抵抗の機構を解析した。粗度の解析においては、粗度層内の後流が大きな役割をもち、それ自身別箇に重要な問題を提供するものであるが、ここでは、自由な流れのなかにおかれた物体背後の後流で近似している。従っ

て、式中の係数や粗度層の境界を示す  $\alpha$  などについては、今後の研究により検討、改善すべき余地が多いと思われる。然しながら、矩形粗度の相当粗度が著るしい極値をもつ特性を初め、実験結果をかなりの程度まで解明できたことは、本文の解析が、極めて素朴なものであるにかかわらず、基本的な面において妥当なことを示すものであろう。また、若干の修正を加えることにより、複雑な形をもつ2次元粗度や疎らにおかれたる次元粗度に対しても適用できるであらう。

おわりに、本研究にあたり種々御教示をいただいた九州大学栗原教授および篠原教授に感謝の意を表す次第である。

### 参考文献その他

- 1) C. F. Colebrook and C. M. White: "Experiments with Fluid Friction in Roughened Pipes." Proc. Roy. Soc. of London, A. 161, 1937.
- 2) H. Schlichting: "Experimentelle Untersuchungen zum Rauigkeits problem" Ing-Archiv, Bd. 7, 1936.
- 3) H. M. Mories: "A New Concept of Flow in Rough Conduits." Proc. A. S. C. E. 1953.
- 4) 栗原道徳: "粗滑遷移領域における管流の抵抗法則について、九大流研報告, 7巻3号, 1951.
- 5) 椿 東一郎: "砂漣を伴う掃流作用について、土木学会誌, 40巻8号, 昭31.
- 6) K. Shinohara and T. Tsubaki: "On the Hydraulic Resistance of Sand Wave-Roughness." Rep. of Res. Inst. for App. Mech. Kyūshū Univ. (in Press.)
- 7) H. A. Einstein and R. B. Bank: "Fluid Resistance of Composite Roughnes." Trans. Ame. Geophy. Union, Vol. 31, 1950.
- 8) J. W. Johnson and E. A. Le Roux: Disucussion of R. W. Powell "Flow in a Channel for Definite Roughness" Trans. A. S. C. E. Vol. 111, 1946.  
或いは岩垣雄一: "開水路乱流の理論、水工学最近の進歩, 1952 参照.
- 9) H. Schlichting: "Über das ebene Wind Schatten Problem," Ing-Archiv, Bd. 1, 1930.
- 10) 細井正延: "開水路乱流の流速分布及び摩擦抵抗について、土木研究, 昭 23.
- 11) この場合の  $k_s$  は(2)式より逆算した。