道路用縦断曲線の一般式について

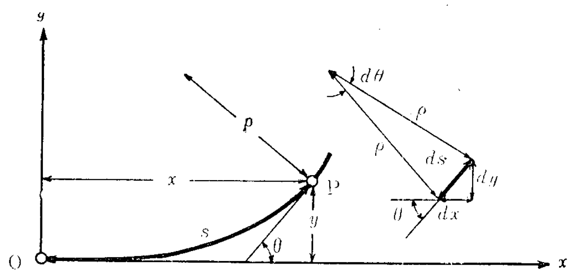
樋　渡　正　美

1. 緒　　言

道路の縦断勾配が急に変化する箇所で，その勾配の代数差が可なり大きい場合には，自動車の様な高速車輛の運行に種々の障害を与える。例えば凹部では，車輪の廻転速度が急変して衝撃を受け，ヘッドライトが下向きになって前部斜面の上方を照し出す事ができない。又凸部では，前部車輪が一旦浮き上って次の瞬間路面を強く叩くから路面及び車体は共に損傷を蒙り，峠の頂点が邪魔になって前方の見透しが困難である。此等の有害なる作用を除去して車輛の安全且つ快適な運行を期すると共に，併せて，路面維持費の軽減を計るためには，勾配の変移点に所謂縦断曲線を挿入しなければならない。縦断曲線としては，従来円及び二次放物線が使用され，その設置法も色々提案されている。然しながら，理論的に考えると円曲線等より緩和曲線と呼ばれる種々の曲線を利用する方が望ましいので，此等すべての曲線に適用できる設置法について説明したいと思う。

2. 曲線の表わし方

第１図において，P を曲線上の任意の一点とし，その座標を夫々 x, y とすれば，曲線の方程式は通常 $y=f(x)$ なる形で与えられる。従来は縦断曲線もこの形で設置しているが，これでは不便な事が多いので，筆者は曲線の方程式を $\rho=f(\theta)$ なる形で表わす事を提案する。ここに ρ 及び θ は夫々 P 点に於ける曲率半径及び切線が x 軸となす角即ち螺旋角である。今，原点 O より P 点までの曲線長を S, P 点附近の微少曲線長を ds, ds の x 方向及び y 方向の分値を夫々 dx 及び dy とすれば，第１図から明らかな様に



第１図　曲率半径と座標の関係

$$ds=\rho d\theta \quad dx=ds\ \mathrm{Cos}\theta \quad dy=ds\ \sin\theta$$

従って

$$S=\int\rho d\theta \qquad x=\int\rho\mathrm{Cos}\ \theta d\theta \qquad y=\int\rho\mathrm{Sin}\ \theta d\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

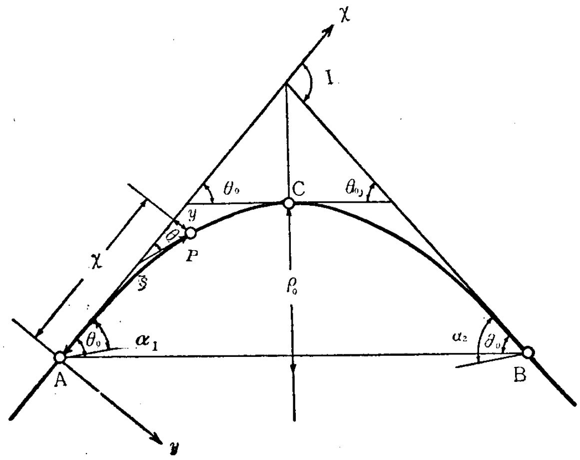
となる。上式は ρ が θ の函数として与えられさえすれば，少くとも理論的には積分可能で，曲線長 s, 横距 x, 縦距 y が θ の値により定まる事になる。そこで問題は縦断曲線として使用できるすべての曲線が $\rho=f(\theta)$ なる形で表わせるかどうかと云う事であるが，筆者の研究によればその関係は第１表の通りである。表中の k 及び K は共に常数を表わす。なお筆者は m, n を任意の正数とする時 $\rho=K/\sin^m\theta\ \mathrm{Cos}^n\theta$, $\rho=K/(\sin\ m\theta)^n$ 及び $\rho=K/\theta^m$ を夫々放物線系，レムニスケート系及びクロソイド系の曲線と仮に名ずけているが，m, n の値を変える事によって，第１表に掲げる曲線の他に，実に無数の曲線が縦断曲線として提案される事になる。而して，これから述べる縦断曲線の決定法等は此等すべての曲線に適用できるものである。

第1表　曲 線 の 方 程 式

曲線名	$y=f(x)$	$\rho=f(\theta)$
円曲線	$x^2+y^2=2ky$	$\rho=K$
二次放物線	$y=kx^2$	$\rho=K/\mathrm{Cos}^3\theta$
三次放物線	$y=kx^3$	$\rho=K/\sqrt{\sin\theta\,\mathrm{Cos}^5\theta}$
江藤氏曲線 (1)	$y=\frac{x^3}{6k}\left\{I+0.2143\frac{x^4}{(2k)^2}+0.1023\frac{x^8}{(2k)^4}+\cdots\right\}$	$\rho=K/\sqrt{\sin\theta}$
レムニスケート曲線	$(x^2+y^2)^2=kxy$	$\rho=K/\sqrt{\sin\frac{2}{3}\theta}$
クロソイド曲線	$y=\frac{x^3}{6k}\left(I+0.0057\frac{x^4}{k^2}+0.0074\frac{x^8}{k^4}+\cdots\right)$	$\rho=K/\sqrt{\theta}$

次に，曲線を $\rho=f(\theta)$ なる形で与える時，縦断曲線の設置法について述べよう。第２図において，A, B 及び C を夫々曲線の始点，終点及び中点とし，ρ_0 を C 点におけるその曲率半径とすれば，曲線は C 点に対し左右同一のものを使用するから ρ_0 は曲線中最小の曲率半径を表わす。今，道路の勾配角を夫々 α_1, α_2 とし，中点 C に於ける螺旋角を θ_0. 交角を I とすれば，図から明らかな様に

$$I=\alpha_1+\alpha_2 \qquad \tan I=\tan(\alpha_1+\alpha_2)=$$
$$(\tan\alpha_1-\tan\alpha_2)/(1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2)=$$
$$(i_1-i_2)/(1+i_1i_2)$$



第２図　縦断曲線の設置法

となる。ここに i_1 及び i_2 は縦断勾配と呼ばれるものであって，通常は％で表わし，その符号は上りを＋，下りを－とする。従って，

$$\theta_0=\frac{I}{2}=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{i_1-i_2}{1+i_1i_2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

我が国では，道路構造令によって縦断勾配を制限しているが，最大の場合でも10％となっている。この様に i_1 及び i_2 は比較的小さな値であるので，(2)式は近似的に

$$\theta_0\fallingdotseq\frac{1}{2}(i_1-i_2) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

としても差し支えない場合が多い。何れにしても，縦断曲線の形は最小半径 ρ_0 と最大螺旋角 θ_0 とが与えられれば決定する。而して，縦断勾配が通常与えられるから(2)式又は(3)式によって θ_0 の値が定まり，ρ_0 の値は後に述べる方法によって決定する。兎も角も，曲線の形が決まれば第２図に示す座標軸を設定して θ の値を適当に仮定し，それに対応する曲線長 S, 横距 x 及び縦距 y の値を(1)式から計算すると普通の切線支距法によって縦断曲線を設置する事ができる。

3.　遠心力に対する縦断曲線の決定

a.　浮き上り防止のため

自動車の様な高速車輛が縦断曲線を通過する時，その半径が小さ過ぎると遠心力のために路

面から浮き上る怖れがある。この現象を防止するには，遠心力の大きさ F を車輛の重量 W 以下に制限すればよい。従って今，自動車の質量を M, 速力を V とし，重力の加速度を g, 曲率半径を ρ とすれば次式が成立する。

$W > F$　然るに，　$W = Mg,\ F = MV^2/\rho$

故に　$g > V^2/\rho$　　即ち　$\rho > V^2/g$

土木構造物の設計においては，極限強度を安全率で割って許容応力とするのが普通である。ここでも此の考え方を取り入れて，安全率を3とすれば最小曲率半径 ρ_0 は次の様になる。

$$\rho_0 = 3V^2/g \qquad \cdots\cdots(4)$$

b.　衝撃緩和のため

縦断曲線が円及び二次放物線である場合には，高速車輛が曲線の始点において突然遠心力を受けるため大きな衝撃を感ずる。これを軽減するには，遠心力の大きさ F を一定値 F_0 以下に制限しなければならない。即ち

$$F \leq F_0$$

然るに今，遠心力の加速度を α_0 とすれば，$F_0 = M\alpha_0$ であるから次式が成立する。

$$MV^2/\rho \leq M\alpha_0 \qquad \text{故に} \qquad \rho_0 = V^2/\alpha_0 \qquad \cdots\cdots(5)$$

さて，α_0 の値をどれ位に決めたらよいかは長い間の経験から割り出され，現在では Blockman の提案した値 $\alpha_0 = \frac{1}{3.6} \fallingdotseq 0.278\text{m/sec}^2$ が標準になっている。重力の加速度が $g \fallingdotseq 9.8\text{m/sec}^2$ であるから $\alpha_0 \fallingdotseq \frac{g}{35}$ となり，Blockman の値を採用して縦断曲線を設計すれば車輛の浮き上りは起らない事が(4)(5)両式から分る。実際の設計基準では，各国とも曲線の凹凸と車輛の速力を考慮して α_0 の値を変えており，米国 0.13～0.24m/sec²，独国 0.12～0.37m/sec²，日本 0.19～0.31m/sec² となっている。

c.　衝撃除去のため

円又は二次放物線を縦断曲線として使用する限り，どんなに工夫しても衝撃をなくして終う事はできない。それは遠心力の式 $F = MV^2/\rho$ から明らかな様に，曲率半径 ρ が直線部で無限大なのに曲線部には入ると同時に急に有限となるからである。而かもこの力は速力が早くなるとその2乗に比例して大きくなる。従って，現在の様なスピード時代には衝撃が全く起らない様な縦断曲線が要求されるわけで，そのためには曲率半径が無限大から除々に小さくなって行く所の緩和曲線を使用する以外に方法はない。従来は，縦断曲線と云えば殆んどすべて円又は二次放物線であったが，今後は緩和曲線がこれに取って変わるべきものと思う。此の場合の最小曲率半径は，遠心力の変化を，衝撃を感じない程度に制限すると云う条件から定まってくる。即ち今時間を t とすれば次式が成立する。

$$\frac{dF}{dt} \leq \frac{dF_0}{dt}$$

然るに，$F = \frac{MV^2}{\rho}$, $F_0 = M\alpha_0$ であるから $\frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{\rho}\right) \leq \frac{d\alpha_0}{dt}$

さて，上式の左辺は V を一定と考えるならば次の様になる。

$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{ds}{dt}\,\frac{dt}{d\theta} = V\frac{dt}{d\theta} \qquad \therefore\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{V}{\rho}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta}\,\frac{V}{\rho} \qquad \therefore\ \frac{d}{dt}\left(\frac{V^2}{\rho}\right) = -\frac{V^2}{\rho^2}\,\frac{d\rho}{dt} = -\frac{V^3}{\rho^3}\,\frac{d\rho}{d\theta}$$

又，右辺は遠心力の加速度の時間的変化を τ_0 とすれば $\frac{d\alpha_0}{dt} = \tau_0$ となる。従って

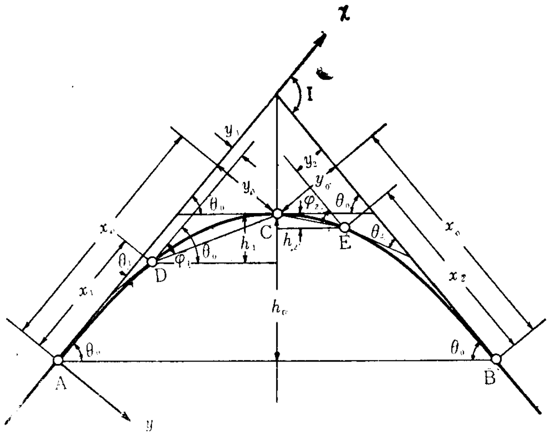
$$\frac{V^3}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\leq\tau_0 \quad \therefore \quad \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\leq\frac{2\tau_0}{V^3} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

ここで，τ_0 の値をどれ位に取ったらよいかが問題となる。それには τ_0 の値を変えて数本の試験道路を造り，実際に自動車を走らせて衝撃を感ずるか感じないかの実験を行い，その結果から判定しなければならない。然し，これは相当面倒な実験なので，ここでは筆者の推定として $\tau_0=0.1\mathrm{m/sec^3}$ 位に取ったらよいのではないかと云う事だけ述べておく[(2)]。なお浮き上り防止のために(6)式から算出された ρ_0 の値が(4)式の値よりも大きくなる事が此の場合必要である。

4. 安全視距に対する縦断曲線の決定

a. 序　　説

道路構造令によると「視距とは車道の中心線上1.3メートルの高さから車道の中心線上にある高さ15センチメートルの物の頂点を見透す事のできる距離を車道の中心線に沿って計った長さを云う」と定義されている。即ち，運転手の目の高さ $h_1=1.3\mathrm{m}$ から路上に在る障害物の高さ $h_2=0.15\mathrm{m}$ を見透した時の道路の長さが視距である。一般に，車輛運行の安全を期するためには，運転手が前方に障害物を発見したらブレーキを踏んで停車するか，又は，ハンドルを切って此れを廻避し得る充分な距離が必要で，それに要する最小の視距を安全視距と称する。従って安全視距 D は，車輛の速力や路面の状態等を考慮して予め与えられており，それに対応する最小曲率半径 ρ_0 の計算式を求めるのが本節の課題である。ところで h_1 及び h_2 と縦断曲線の中央縦距 h_0 との大きさの関係で求める算式が異るから次の三つの場合に分けて考える。なお，求められた式を夫々聯立に解けば，理論的には ρ_0 の値が計算できる筈であるけれども，実際は相当面倒であるから次節の計算例で示す様に遠心力に対する算式で ρ_0 の値を求め，それを本節の算式に代入して，所定の安全視距が得られているかどうかを吟味するのに使用する方が得策である。



第3図　$h_0>h_1$ なる場合

b. $h_0>h_1$ なる場合

第3図において，曲線長 $L=\widehat{ACB}$，安全視距 $D=\widehat{DCE}$ とし，点 D, C, E における座標を夫々 $(x_1,\ y_1)$，$(x_0,\ y_0)$，$(x_2,\ y_2)$ 螺旋角を夫々 $\theta_1,\ \theta_0,\ \theta_2$ とすれば，図から明らかに

$$h_1=\overline{CD}\ \sin\ (\theta_0-\varphi_1)=(x_0-x_1)\ \sec\varphi_1\sin\ (\theta_0-\varphi_1)$$

$$=(x_0-x_1)\frac{\sin\theta_0\mathrm{Cos}\varphi_1-\mathrm{Cos}\theta_0\sin\varphi_1}{\mathrm{Cos}\varphi_1}=(x_0-x_1)\ (\sin\theta_0-\mathrm{Cos}\theta_0\tan\varphi_1)$$

然るに　$\tan\varphi_1=\dfrac{y_0-y_1}{x_0-x_1}$　従って

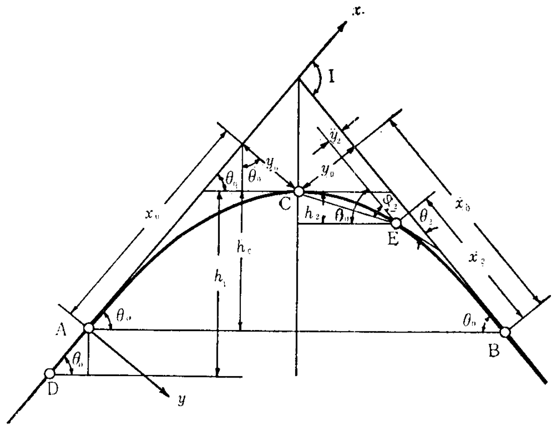
$$h_1=(x_0-x_1)\sin\theta_0-(y_0-y_1)\mathrm{Cos}\theta_0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

同様にして　$h_2=(x_0-x_2)\sin\theta_0-(y_0-y_2)\mathrm{Cos}\theta_0$ $\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

又　$D=\int_{\theta_1}^{\theta_0}\rho d\theta+\int_{\theta_2}^{\theta_0}\rho d\theta$ $\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

(9)式は未知数として $\rho_0,\ \theta_1,\ \theta_2$ の3個を含み(7)式及び(8)式は夫々 $\rho_0,\ \theta_1$ 及び $\rho_0,\ \theta_2$ なる2個ずつの未知数を含む。従って(7)式より θ_1 を，(8)式より θ_2 を夫々 ρ_0 の函数として求め，

(9)式に代入すれば，理論的には ρ_0 の値が得られる事になる。



第4図　$h_1>h_0>h_2$ なる場合

c.　$h_1>h_0>h_2$ なる場合

第4図から $h_0=x_0\sin\theta_0-y_0\mathrm{Cos}\theta_0$ ······(10)

又 $h_2=(x_0-x_2)\sin\theta_0-(y_0-y_2)\mathrm{Cos}\theta_0$ ···(8)

$$D=(h_1-h_0)\mathrm{Cosec}\theta_0+\int_0^{\theta_0}\rho d\theta+\int_{\theta_2}^{\theta_0}\rho d\theta \quad \cdots\cdots(11)$$

(10)式から h_0 を(8)式から θ_2 を夫々 ρ_0 の函数として出し，此等を(11)式に代入すれば ρ_0 の値が求まる。

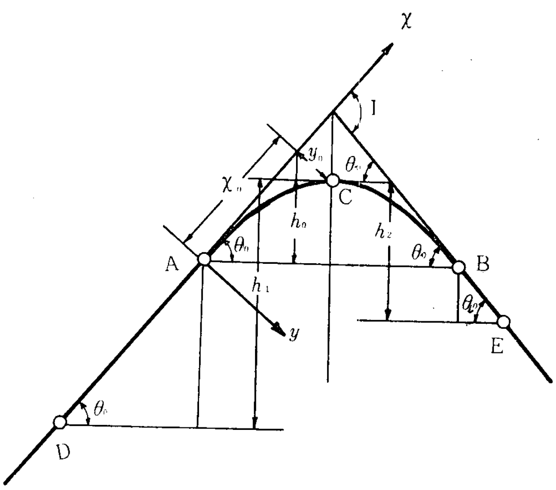
d.　$h_0<h_2$ なる場合

第5図より明らかに次式が成立する。

$$h_0=x_0\sin\theta_0-y_0\mathrm{Cos}\theta_0 \quad \cdots\cdots(10)$$

$$D=(h_1-h_0)\mathrm{Cosec}\theta_0+(h_2-h_0)\mathrm{Cosec}\theta_0+2\int_0^{\theta_0}\rho d\theta \quad \cdots\cdots(12)$$

(10)式を(12)式に代入すれば ρ_0 の値が求まる。



第5図　$h_0<h_2$ なる場合

5.　縦断曲線の設計々算

a.　序　　説

既に述べた様に，道路の縦断曲線として従来は計算が簡単であると云う理由で，専ら円又は放物線が使用されて来た。然し，理論的には所謂緩和曲線と呼ばれている曲線を採用する方が優れているので，ここでは前者の代表として円曲線を，又後者の代表として最も理想的と云われるクロソイド曲線を取り上げてその計算例を示して見よう。勿論，他の如何なる曲線でもそれ等が $\rho=f(\theta)$ なる形で表わされている限り，本節の例題と全く同じ手続きで縦断曲線を設計する事ができるし，計算もそれ程面倒ではない。今，設計資料として道路構造令の第1種山地部を対象に取り，次の様な数値を与える。

$i_1=3\%$　　$i_2=-5\%$　　$V=60\mathrm{km/h}$

$D=75\mathrm{m}$　　$h_1=1.3\mathrm{m}$　　$h_2=0.15\mathrm{m}$

従って(2)式から

$$\theta_0=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0.03+0.05}{1-0.03\times0.05}=\frac{1}{2}\left(0.080120-\frac{0.080120^3}{3}+\frac{0.080120^5}{5}-\cdots\cdots\right)$$

$=0.039975$ ラヂアン$=2°17'25''$

又　$\sin\theta_0=0.039975-\frac{0.039975^3}{6}+\frac{0.039975^5}{120}-\cdots\cdots=0.039965$

$\mathrm{Cos}\theta_0=1-\frac{0.039975^2}{2}+\frac{0.039975^4}{24}-\cdots\cdots=0.999201$

b.　円曲線の場合

先ず衝撃緩和の条件式(5)より最小半径を計算すれば

$$\rho_0=\frac{V^2}{\alpha_0}=\frac{\left(\frac{60000}{60\times60}\right)^2}{\frac{1}{3.6}}=1000\mathrm{m}$$

となる。次に，この半径で充分な視距が得られるかどうかを検討しなければならない。それには(1)式に $\rho=\rho_0$ とおいて

$$S=\int\rho_0 d\theta=\rho_0\theta \qquad x=\int\rho_0\mathrm{Cos}\theta d\theta=\rho_0\sin\theta$$

$$y=\int\rho_0\sin\theta d\theta=\rho_0(1-\mathrm{Cos}\theta)$$

従って

$$S_0=\rho_0\theta_0=1000\times0.039975=39.975\mathrm{m}$$

$$x_0=\rho_0\sin\theta_0=1000\times0.039965=39.965\mathrm{m}$$

$$y_0=\rho_0(1-\mathrm{Cos}\theta_0)=1000\times(1-0.999201)=0.799\mathrm{m}$$

此等の値を(10)式に付入すれば

$$h_0=39.965\times0.039965-0.799\times0.999201=1.597-0.798=0.799\mathrm{m}$$

となるから $h_1>h_0>h_2$ なる場合に相当する。而して此の場合の方程式(8)及び(11)は夫々次の様になる。

$$h_2=(\rho_0\sin\theta_0-\rho_0\sin\theta_2)\sin\theta_0-\{\rho_0(1-\mathrm{Cos}\theta_0)-\rho_0(1-\mathrm{Cos}\theta_2)\}\mathrm{Cos}\theta_0$$

$$\therefore\ h_2=\rho_0\{1-\mathrm{Cos}(\theta_0-\theta_2)\}$$

$$\therefore\ 1-\frac{h_2}{\rho_0}=\mathrm{Cos}(\theta_0-\theta_2)=1-\frac{(\theta_0-\theta_2)^2}{2}+\frac{(\theta_0-\theta_2)^4}{24}-\cdots\cdots$$

$$\therefore\ \frac{h_2}{\rho_0}\fallingdotseq\frac{(\theta_0-\theta_2)^2}{2} \qquad \therefore\ \theta_0-\theta_2\fallingdotseq\sqrt{\frac{2h_2}{\rho_0}}=\sqrt{\frac{2\times0.15}{1000}}=0.017321$$

又 $$D=(h_1-h_0)\mathrm{Cosec}\theta_0+\int_0^{\theta_0}\rho_0 d\theta+\int_{\theta_2}^{\theta_0}\rho_0 d\theta$$

$$=\frac{h_1-h_0}{\sin\theta_0}+\rho_0\theta_0+\rho_0(\theta_0-\theta_2)=\frac{1.3-0.799}{0.039965}+1000\times0.039975+1000\times0.017321$$

$$=12.54+39.98+17.32=69.84\mathrm{m}$$

此れは与えられた安全視距 75m より小さい。従って所定の安全視距を得るためには ρ_0 の値を今少し大きく取る必要がある。

試みに $\rho_0=1200\mathrm{m}$ とすれば

$$S_0=1200\times0.039975=47.970\mathrm{m} \qquad x_0=1200\times0.039965=47.958\mathrm{m}$$

$$y_0=1200\times(1-0.999201)=0.959\mathrm{m}$$

故に $h_0=47.958\times0.039965-0.959\times0.999201=1.917-0.958=0.959\mathrm{m}$

となりやはり $h_1>h_0>h_2$ なる場合に相当する。従って，前と同じ様にして D の値を計算する。

$$\theta_0-\theta_2\fallingdotseq\sqrt{\frac{2\times0.15}{1200}}=0.015811$$

$$D=\frac{1.3-0.959}{0.039965}+1200\times0.039975+1200\times0.015811$$

$$=8.53+47.97+18.97=75.47\mathrm{m}$$

即ち $\rho_0=1200\mathrm{m}$ とすれば与えられた条件をすべて満足する。この縦断曲線を現地に設置する為に必要な数値を，次式から計算して第2表に掲げる。

$$\theta=\frac{S}{\rho_0} \qquad x=\rho_0(\theta-\frac{\theta^3}{6}+\frac{\theta^5}{120}-\cdots\cdots)=S(1-\frac{\theta^2}{6}+\frac{\theta^4}{120}-\cdots\cdots)$$

$$y=\rho_0(\frac{\theta^2}{2}-\frac{\theta^4}{24}+\frac{\theta^6}{720}-\cdots\cdots)=\frac{S\theta}{2}(1-\frac{\theta^2}{12}+\frac{\theta^4}{360}-\cdots\cdots)$$

第 2 表　円 曲 線 の 設 置 表

s (m)	10.000	20.000	30.000	40.000	49.970
θ (ラヂアン)	0.008333	0.016667	0.025000	0.033333	0.039975
x (m)	10.000	19.999	29.997	39.993	47.958
y (m)	0.042	0.167	0.375	0.667	0.959

c.　クロソイド曲線の場合

クロソイドの方程式 $\rho=\frac{K}{\sqrt{\theta}}$ において $\theta=\theta_0$ の時 $\rho=\rho_0$ であるから $K=\rho_0\sqrt{\theta_0}$ 故に $\rho=\rho_0\sqrt{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\theta}}$ となる。此れを衝撃除去の条件式(6)に代入すれば

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\theta}{\rho_0^2\theta_0}\right)\leq\frac{2\tau_0}{V^3} \qquad \therefore \frac{1}{\rho_0^2\theta_0}\leq\frac{2\tau_0}{V^3}$$

$$\therefore \rho_0\geqq\sqrt{\frac{V^3}{2\tau_0\theta_0}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{60000}{60\times60}\right)^3}{2\times0.1\times0.039975}}\fallingdotseq761\mathrm{m}$$

を得る。又浮き上り防止の条件式(4)から

$$\rho_0=\frac{3\times\left(\frac{60000}{60\times60}\right)^2}{9.8}\fallingdotseq85\mathrm{m}$$

従って $\rho_0=800$m とし所定の安全視距が得られるかどうかを検討してみる。(1)式より

$$S=\int\rho_0\sqrt{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}}=2\rho_0\sqrt{\theta_0}\ \sqrt{\theta}$$

$$x=\int\rho_0\sqrt{\theta_0}\frac{\mathrm{Cos}\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta=\rho_0\sqrt{\theta_0}\int\theta^{-\frac{1}{2}}(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\frac{\theta^6}{6!}+\cdots\cdots)d\theta$$

$$=2\rho_0\sqrt{\theta_0}\ \sqrt{\theta}(1-\frac{\theta^2}{10}+\frac{\theta^4}{216}-\frac{\theta^6}{9360}+\cdots\cdots)$$

$$y=\int\rho_0\sqrt{\theta_0}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\theta}}d\theta=\rho_0\sqrt{\theta_0}\int\theta^{-\frac{1}{2}}(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\frac{\theta^7}{7!}+\cdots\cdots)d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\rho_0\sqrt{\theta_0}\ \sqrt{\theta^3}(1-\frac{\theta^2}{14}+\frac{\theta^4}{440}-\frac{\theta^6}{25200}+\cdots\cdots)$$

となる。故に

$$S_0=2\rho_0\theta_0=2\times800\times0.039975=63.960\mathrm{m}$$

$$x_0=2\rho_0\theta_0(1-\frac{\theta_0^2}{10}+\cdots\cdots)=2\times800\times0.039975\times(1-\frac{0.039975^2}{10}+\cdots\cdots)=63.950\mathrm{m}$$

$$y_0=\frac{2}{3}\rho_0\theta_0^2(1-\frac{\theta_0^2}{14}+\cdots\cdots)=\frac{2}{3}\times800\times0.039975^2\times(1-\frac{0.039975^2}{14}+\cdots\cdots)=0.852\mathrm{m}$$

此等の値を(10)式に代入する。

$$h_0=63.950\times0.039965-0.852\times0.999201=2.556-0.851=1.705\mathrm{m}$$

これは $h_0>h_1$ なる場合に相当するから (7) (8) (9) の 3 式から D の値を計算しなければならな

い。先ず(7)式に

$$x_1 \fallingdotseq 2\rho_0\sqrt{\theta_0}\ \sqrt{\theta_1} \qquad y_1 \fallingdotseq \frac{2}{3}\rho_0\sqrt{\theta_0}\ \sqrt{\theta_1^3}$$

を代入すれば

$$h_1 = x_0\sin\theta_0 - y_0\mathrm{Cos}\theta_0 - (x_1\sin\theta_0 - y_1\mathrm{Cos}\theta_0)$$

$$\fallingdotseq h_0 - (2\rho_0\sqrt{\theta_0}\sin\theta_0\sqrt{\theta_1} - \frac{2}{3}\rho_0\sqrt{\theta_0}\,\mathrm{Cos}\theta_0\sqrt{\theta_1^3})$$

$$\therefore\ 1.3 \fallingdotseq 1.705 - (12.785\sqrt{\theta_1} - 106.55\sqrt{\theta_1^3})$$

$$\therefore\ \sqrt{\theta_1}(12.785 - 106.55\theta_1) \fallingdotseq 0.405$$

となる。これは $\sqrt{\theta_1}$ の3次式であるから正確に求めてもよいが試算的に $\sqrt{\theta_1}=0.03195$ を得る。同様にして(8)式から

$$0.15 \fallingdotseq 1.705 - (12.785\sqrt{\theta_2} - 106.55\sqrt{\theta_2^3})$$

$$\therefore\ \sqrt{\theta_2}(12.785 - 106.55\theta_2) \fallingdotseq 1.555$$

となり，試算的に $\sqrt{\theta_2}=0.14947$ を得る。此等の値を(9)式に代入する。

$$D = \int_{\theta_1}^{\theta_0}\rho_0\sqrt{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} + \int_{\theta_2}^{\theta_0}\rho_0\sqrt{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\theta}} = 2\rho_0\sqrt{\theta_0}\{(\sqrt{\theta_0}-\sqrt{\theta_1})+(\sqrt{\theta_0}-\sqrt{\theta_2})\}$$

$$= 2\times800\times0.19994\times\{(0.19994-0.03195)+(0.19994-0.14947)\} = 69.89\mathrm{m}$$

与えられた安全視距は 75m であるから $\rho_0=800$m では充分でない事が分る。故に $\rho_0=1000$m として上述の計算を繰り返す。

$$S_0 = 79.950\mathrm{m} \qquad x_0 = 79.937\mathrm{m} \qquad y_0 = 1.065\mathrm{m}$$

$$\therefore\ h_0 = 2.130\mathrm{m} \qquad \therefore\ h_0 > h_1$$

$$\sqrt{\theta_1}(15.981 - 133.18\theta_1) \fallingdotseq 0.830 \qquad \therefore\ \sqrt{\theta_1} = 0.05321$$

$$又\ \sqrt{\theta_2}(15.981 - 133.18\theta_2) \fallingdotseq 1.980 \qquad \therefore\ \sqrt{\theta_2} = 0.15490$$

$$\therefore\ D = 76.69\mathrm{m}$$

即ち $\rho_0=1000$m とすればすべての条件を満足する。此の場合の曲線設置に必要な数値を次式から計算して第3表に掲げる。

$$\sqrt{\theta} = \frac{S}{2\rho_0\sqrt{\theta_0}}$$

$$x = S(1 - \frac{\theta^2}{10} + \cdots\cdots) \qquad y = \frac{S\theta}{3}(1 - \frac{\theta^2}{14} + \cdots\cdots)$$

第3表　クロソイド曲線の設置表

s (m)	10.000	20.000	30.000	40.000	50.000	60.000	70.000	79.950
θ (ラジアン)	0.000625	0.002502	0.005629	0.010006	0.015635	0.022514	0.030644	0.039975
x (m)	10.000	20.000	30.000	40.000	49.999	59.997	69.994	79.937
y (m)	0.002	0.017	0.056	0.133	0.261	0.450	0.715	1.065

6. 結　　語

この論文で筆者は縦断曲線の一般的な表わし方を述べそれを採用すると全く同じ手続きで，どの様な曲線でも設計できる事を計算例で示した。前節の例題で分る様に同じ最小半径ならば曲線長はクロソイドが円の2倍となり，視距も後者より有利である。更に $\rho=K\theta^{-\frac{2}{3}}$, $\rho=K\theta^{-\frac{3}{4}}$ 等の曲線を使用すれば，曲線長が円曲線の夫々3倍，4倍となって行くから，現地の状況によ

っては切土や盛土或は視距の点で非常に有利となる事もあり得る。従って，今後は現場に最も適した曲線形を見付け，ここに述べた計算法で縦断曲線を設計する事が，一般的に行われる様になることを筆者は期待している。なお，自動車の速力 V が変化する場合や，遠心加速度の時間的変化の標準値 τ_0 に就いては今後の研究に待たねばならない。

文　　献

1）土木学会誌，第26巻，第11号。

2）Shortt は鉄道の緩和曲線設計に際し，水平方向の値として $\tau_0=0.3\mathrm{m/sec^3}$ とすることを提案している。