

透水性壁面を有する平板内の流れについて

深 田 三 夫*

On Turbulent Flow in a Permeable-Walled Channel

Mitsuo FUKADA

Abstract

Turbulent flows in flat rectangular channel having one porous bounding wall is considered on the basis of Reynolds equations and Brinkman's equations, and the effects of boundary roughness and velocity slip condition on the friction factor and the velocity profiles in the channel is analyzed. And the boundary condition (slip velocity condition) is theoretically derived using a perturbation method.

The results shows that velocity slip at the porous surface bring about the increase in the friction factor in the channel, the extent of the increase being accentuated with increasing the factor k/b , this factor also cause a screwing the velocity profiles such that the location of the maximum velocity is shifted toward the solid wall.

記号説明

- A : Karman 定数の逆数 ($=1/\kappa$)
 B : ($=5.5$)
 b : 主流流れの幅
 f : 主流抵抗係数 ($=2(u_f/V_a)^2$)
 H : 浸透層厚
 k : 浸透面上の粗度スケール (相等粗度)
 k_0 : 浸透層の透水係数 ($U_a = -k_0/\mu(dp/dx)$)
 L : 浸透層の代表長さ ($\approx k$)
 U : 浸透層内の流速 (境界層内)
 U_d : " (Darcy-Forchheimer 域)
 u : 主流流速
 V_a : 主流断面平均流速
 u_{1*} : 主流摩擦速度 ($=(\tau_1/\rho)^{1/2}$)
 u_{2*} : " ($=(\tau_2/\rho)^{1/2}$)
 u_f : " ($=(\{\tau_1+\tau_2\}/2\rho)^{1/2}$)
 y^* : 最大流速点までの長さ
 y_s : 対数分布則原点補正量
 τ_1 : 不透水壁面上の摩擦抵抗 (> 0)
 τ_2 : 浸透性壁面上の " (> 0)
 α : ($=\tau_1/\tau_2$)
 β : ($=k/b$)
 γ : ($=\nu/u_{1*}b$)

1. ま え が き

浸透性の壁面を境界としてもつ流れは、固定壁面上の流れと異なっている。すなわち

- (1) 境界面上で有限の速度を持つ。
- (2) 高レイノルズ数の領域や、壁面粗度スケールが大きい時に浸透層内にも乱れが存在する。

このような主流と浸透流との間の相互作用の結果、抵抗係数の増減 (層流域では減少、乱流域では増加) となってあらわれてくる。Stokes 流れについて(1)を仮定すれば抵抗係数の減少は説明される。E. M. Sparrow¹⁾ らは乱流域においても(1)を仮定し、一面が浸透性を有する平行な平板間の流れの解析を、Van Driest の混合距離の仮説を用いて行なった。しかしこれは境界面での粗度の影響を全く無視した解析であったため、実験事実と相反する結果となってしまった。この報告において Sparrow¹⁾ らと同様な一面が浸透性をもつ平行な平板間の流れを扱い、次元解析の手法を用い、境界面粗度の影響を考慮した速度分布則を求めた。次に(1)の理論的な説明を与え、これを用い、Yamamoto²⁾ の方法に従って浸透層境界面近傍での流速分布形を求めた。外部条件、たとえば圧力勾配、流れ幅、壁面の粗度スケール、浸透層の代表長さ (たとえば粒径) が与えられれば、主流場、浸透層内の流速分布、レイノルズ数、抵抗係数、(1)のスリップ速度はすべて与えられ乱流域での抵抗係数の増加も説明される。

* 土木工学科

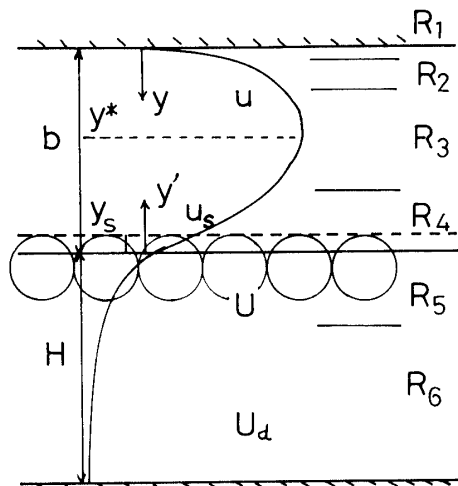


Fig. 1 Schematic diagram of the flow situation.

2. 主流場, および浸透層内の流れの解析

まえがきにおいて述べた流れ場は次の6つの領域に分けて考えることができる. 速度分布に効いてくると考えられる物理量が関数形として示されている.

R₁ 層 $\bar{u} = \bar{u}(\tau_1, y, \mu)$ (1)

R₂ 層 $\bar{u} = \bar{u}(\tau_1, y, \rho, \mu)$ (2)

R₃ 層 $(\bar{u}(y^*) - \bar{u}(y))/u_1^* = g(y/b), g(y^*/b) = 0$ (3)

R₄ 層 $\bar{u} = \bar{u}(\tau_1, y', k, \rho)$ (4)

R₅ 層 粘性応力 (あるいは乱れ応力) によって上層の主流と運動量の交換が行なわれる領域

R₆ 層 Darcy 則 (Forshheimer 則) の成立する領域
本解析では, それぞれの領域において支配する運動方程式から平均流速分布形を導き, 流れ場の抵抗係数を求める.

2.1 主流場の流れの解析

二次元流れを考え, $\partial^2 \bar{u} / \partial x^2 \ll \partial^2 \bar{u} / \partial y^2, \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}'\bar{v}'}{\partial x} \ll \frac{\partial \bar{u}'\bar{v}'}{\partial y}, \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y}$ とすると一般的なレイノルズ方程式は次のようにまとめられる.

$$d(\bar{u}'\bar{v}')/dy = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \frac{d^2 \bar{u}}{dy^2} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = \text{const} \quad (6)$$

$$\bar{P}/\rho + \bar{v}'^2 = P(x,0)/\rho \quad (7)$$

$y=y^*$ で $\bar{u}'\bar{v}'=0, d\bar{u}/dy=0$ の境界条件を与えると

$$\tau = \mu d\bar{u}/dy - \rho \bar{u}'\bar{v}' = dP/dx (y-y^*) \quad (8)$$

$$\tau_1 = -dP/dx \times y^* \quad \tau_2 = dP/dx (b-y^*) \quad (9)$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} = -(\tau_1 - \tau_2)/\rho b \quad (10)$$

以下の解析では $\tau_2 = -\tau_2'$ ($\tau_2' < 0$) として扱う

2.1.1 主流場上層の流速分布

両面が剛体壁で軸対称な流れ場 ($\tau_1 = \tau_2'$ 以下'をとる $y=b/2$) の場合に次元解析により各領域での平均流速の関数形を見出し, 速度および速度勾配をなめらかに接続させることによって分布形が導かれている³⁾. それと同じ方法を領域 $0 \leq y \leq y^*$ で行ないその結果のみを示すと次のようになる.

R₁ 層 $\bar{u} = \tau_1 y / \mu \quad y \ll y^*$ (11)

R₂ 層 $\bar{u}/u_1^* = f(u_1^* y / \nu)$ (12)

R₃ 層 $(\bar{u}(y^*) - \bar{u}(y))/u_1^* = g(y/b), g(y^*/b) = 0$ (3)

各層間の速度, 速度勾配の連続性から関数形を決定すると

$$\begin{aligned} R_2-R_3 \text{ 層 } \bar{u}/u_1^* &= f(u_1^* y / \nu) = f(Re_1 y / b) \\ &= \bar{u}(y^*)/u_1^* - g(y/b) \\ &= h(Re_1) - g(y/b) \quad Re_1 = u_1^* b / \nu \end{aligned} \quad (13)$$

これより関数 h, g は次式を満たすことがわかる.

$$Re_1 dh/d(Re_1) = -(y/b) dg/d(y/b) = A = \text{const} \quad (14)$$

$$\therefore -g(y/b) = A \ln(y/b) + B$$

$$\therefore h(Re_1) = A \ln Re_1 + C$$

$$g(y^*/b) = 0 \text{ より } A \ln(y^*/b) + B = 0$$

$$\therefore -g(y/b) = A \ln(y/y^*)$$

$$\therefore \bar{u}/u_1^* = A \ln(Re_1 y / b) + C \quad (15)$$

一方 R₁-R₂ 層の接続により

$$\tau_1 y_1 / \mu = u_1^* \{A \ln(Re_1 y_1 / y^*) + C\}$$

実験値と比較して $u_1^* y_1 / \nu = 11 \quad y_1 = 11 / Re_1$

$$\therefore C = 5.5 + A \ln(Re_1 y^* / b)$$

$$\bar{u}/u_1^* = A \ln(Re_1 y / b) + 5.5 \quad (15)$$

平板の中心付近においては

$$-\rho \bar{u}'\bar{v}' = \mu_1 d\bar{u}/dy = dP/dx \times (y-y^*) \quad (16)$$

$$\tau_1 = -dP/dx \times y^* \text{ より}$$

$$\bar{u}(y^*) - \bar{u}(y) = (\tau_1 y^* / \mu_1) \times \{1/2 + 1/2 \times (y/y^*)^2 y - /y^*\}$$

$\xi_1 = y_1 / y^*$ で前と同様に速度, 速度勾配の接続を行

なうと ξ_1 は次式を満たす方程式の解として求められる。

$$1 - 2\xi + \xi^2 = 2(\xi^2 - \xi) \ln \xi$$

これを満足する解は $\xi_1 = y_1/y^* = 0.286$ となる。

$$\begin{aligned} \therefore (\bar{u}(y^*) - \bar{u}(y))/u_{1*} &= A\{1/2 + 1/2 \times (y/y^*)^2 - y/y^*\} / (\xi_1 - \xi_1^2) \\ &= 12.24 \times \{1/2 - y/y^* + 1/2 \times (y/y^*)^2\} \quad (17) \\ \xi_0 &\leq y/y^* \leq 1 \end{aligned}$$

2.1.2 主流場下層の流速分布

流れの境界面が多孔体で構成されている場合、主流は多孔体表面の形状、あらし、空隙率などに大きく影響を受けると考えられる。ここでは特に表面粗度のスケールに流れが影響されると考え、前と同様に速度分布を導く。 R_4 層の関数形は次元解析により

$$\begin{aligned} u/u_{2*} &= f(y'/k) = f(y'/b \times b/k) \\ &= f(bu_{2*}/\nu \times \nu/u_{2*}k \times y'/b) \\ &= f(Re_2/k^+ \times y'/b) \quad (18) \\ Re_2 &= u_{2*}b/\nu, k^+ = u_{2*}k/\nu \\ k &: \text{壁面の粗度スケール} \end{aligned}$$

R_3 - R_4 層の境界付近において

$$\begin{aligned} f(Re_2/k^+ \times y'/b) &= \bar{u}(y^*)/u_{2*} - g(y'/b) \quad (19) \\ \therefore \bar{u}(y^*)/u_{2*} &= h(Re_2/k^+) \\ \therefore f(Re_2/k^+ \times y'/b) &= h(Re_2/k^+) - g(y'/b) \end{aligned}$$

よって関数 h, g は次式を満たす。

$$\begin{aligned} Re_2/k^+ \times dh/d(Re_2/k^+) &= -y'/b \times dg/d(y'/b) \\ &= A' = \text{const} \quad (20) \\ -g(y'/b) &= A' \ln(y'/b) + B' \\ h(Re_2/k^+) &= A' \ln(Re_2/k^+) + C' \\ \therefore \bar{u}/u_{2*} &= h - g = A' \ln(Re_2 y'/b) + A_1 - A' \ln k^+ \quad (21) \end{aligned}$$

定数 $A_1 - A' \ln k^+$ は実験によって決められる量である。 R_3 - R_4 層の接続も同様な方法で行なうと前と全く同様な型の二次曲線分布形が求まる。

$$\begin{aligned} (\bar{u}(y^*) - \bar{u}(y))/u_{2*} &= A \times \{1/2 - y'/y^* + 1/2 \times (y'/y^*)^2\} / (\xi' - \xi'^2) \quad (22) \\ \xi &= 0.286 \quad 0.286 < y'/y^* < 1 \end{aligned}$$

以上、主流場各層の流速分布形をまとめると

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \tau_1 y / \mu \quad 0 \leq y/y^* \leq 22/Re_1 \\ \bar{u}/u_{1*} &= A \ln(Re_1 y/y^*) + B + A \ln(y^*/b) \\ & \quad 22/Re_1 \leq y/y^* \leq 0.283 \\ (\bar{u} - \bar{u}(y^*))/u_{1*} &= -12.24\{1/2 - y/y^* + 1/2 \times (y/y^*)^2\} \\ & \quad 0.283 \leq y/y^* \leq 1 \\ (\bar{u} - \bar{u}(y^*))/u_{2*} &= 12.24\{1/2 - y'/y^* + 1/2 \times (y'/y^*)^2\} \\ & \quad 0.283 \leq y'/y^* \leq 1 \\ \bar{u}/u_{2*} &= A \ln(Re_2 y'/b) + A_1 - A \ln k^+ \\ & \quad y_s/y^* \leq y/y^* \leq 0.283 \end{aligned}$$

第 2, 3 式より

$$\bar{u}(y^*) = Au_{1*} \ln(Re_1 y^*/b) + Bu_{1*} \quad (23)$$

第 3, 4 式より

$$\begin{aligned} \bar{u}(y^*) &= Au_{2*} \ln(Re_2 y'/b) + (A_1 - A \ln k^+) u_{2*} \quad (24) \\ y' &= b - y \end{aligned}$$

(23) (24) は $y^* = b - y^*$ において同値でなければならぬから

$$\begin{aligned} Au_{1*} \ln(Re_1 y^*/b) + Bu_{1*} &= Au_{2*} \ln\{Re_2(b - y^*)/b\} + \{A_1 - A \ln k^+\} u_{2*} \\ A_1 - A \ln k^+ &= B \quad (25) \end{aligned}$$

の関係があることがわかる。実際の粗面の粗度のスケールを k_s とし (21) を次の形に置き換えれば

$$\begin{aligned} \bar{u}/u_{2*} &= A \ln\{Re_2(b - y)/b\} + B \\ &= A \ln(b - y)/k_s + B_s \quad (26) \end{aligned}$$

$$B_s = B - A \ln k/k_s \quad \exp\{(B - B_s)/A\} = k/k_s \quad (27)$$

実験値との比較から、完全粗面上の流れと考えて、 $B_s = 8.5, A = 2.5, B = 5.5$ とすると

$$k = 0.30k_s \quad (28)$$

(25) を変形すれば y^* は次式を満たすことがわかる。

$$\begin{aligned} (y^*/y_1) \cdot (k/(b - y^*))^{u_{2*}/u_{1*}} &= \exp\{(B/A) \cdot (u_{2*}/u_{1*} - 1)\} \quad (29) \end{aligned}$$

ここに $u_{1*} = \nu/y_1 = (\tau_1/\rho)^{1/2}$

$$u_{2*} = \nu/y_2 = (\tau_2/\rho)^{1/2}$$

である。さらに $\tau_2/\tau_1 \equiv \alpha, k/b \equiv \beta, y_1/b \equiv \gamma$ とおいて整理すると

$$\{1/(1 + \alpha)\gamma\} \cdot \{\beta(1 + \alpha)/\alpha\}^{\sqrt{\alpha}} = \exp\{(\sqrt{\alpha} - 1) \cdot (B/A)\} \quad (30)$$

となる。あるいは

$$F_1(\tau_1/\tau_2, k/b, y_1/b) = 0 \quad (31)$$

2.1.3 主流場の流量特性

2.1.1, 2.1.2で主流場の流速分布および、壁面抵抗、主流幅、粗度スケール間の関係式が求められたから次に流速を流れ場全体で積分することによって、流量を求める。上層の粘性底層 $0 \leq y/y^* \leq 22/Re_1$ からの流量への寄与は無視できるとして積分すると上層下層の流量を Q_1, Q_2 として、

$$\begin{aligned} Q_1 &= y^* \{ \bar{u}(y^*) - (0.644A + 0.724)u_{1*} \} \\ Q_2 &= (b - y^*) \{ \bar{u}(y^*) - (0.644A + 0.724)u_{2*} \} \end{aligned}$$

したがって断面平均流速 V_a は

$$\begin{aligned} V_a &= (Q_1 + Q_2)/b \\ &= \bar{u}(y^*) - (0.644A + 0.724) \{ u_{1*}(y^*/b) \\ &\quad + u_{2*}(1 - y^*/b) \} \end{aligned} \quad (32)$$

また主流レイノルズ数を $V_a b/\nu$ で定義すると (32) より

$$\begin{aligned} Re_f &\equiv V_a b/\nu \\ &= \bar{u}(y^*)b/\nu - \delta \{ (u_{1*}b/\nu) \cdot (y^*/b) + (u_{2*}b/\nu) \cdot (1 - y^*) \} \\ &= A(u_{1*}b/\nu) \ln \{ (u_{1*}b/\nu) \cdot (y^*/b) \} + B(u_{1*}b/\nu) \\ &\quad - \delta \{ (u_{1*}b/\nu) \cdot (y^*/b) \\ &\quad + (u_{2*}/u_{1*}) \cdot (u_{1*}b/\nu) \cdot (1 - y^*/b) \} \end{aligned} \quad (33)$$

ここに $\delta = 0.644A + 0.724$
 α, β, γ を用いて整理すると

$$Re_f = \left\{ -A \ln \{ (1 + \alpha)\gamma \} + B - \delta(1 + \alpha\sqrt{\alpha})/(1 + \alpha) \right\} / \gamma \quad (34)$$

となる。あるいは

$$F_2(Re_f, \tau_2/\tau_1, y_1/b) = 0$$

次に抵抗係数を次式で定義すると同様に

$$\begin{aligned} f &\equiv -(b/\rho V_a^2) \cdot (dP/dx) \\ &= (\tau_1 + \tau_2)/\rho V_a^2 = 2 \cdot (u_f/V_a)^2 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \therefore (2/f)^{1/2} &= V_a/u_f \\ &= \bar{u}(y^*)/u_f - \delta \{ (u_{1*}/u_f) \cdot (y^*/b) \\ &\quad + (u_{2*}/u_f) \cdot (1 - y^*/b) \} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} u_f &= \{ (\tau_1 + \tau_2)/2\rho \}^{1/2} \\ &= (1/\sqrt{2}) \cdot \{ (\tau_1/\rho) \cdot (1 + \tau_2/\tau_1) \}^{1/2} \\ &= (1/\sqrt{2}) \cdot u_{1*} (1 + \tau_1/\tau_2)^{1/2} \\ &= (1/\sqrt{2}) \cdot u_{1*} (1 + \alpha)^{1/2} \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} u_{1*}/u_f &= (2/(1 + \alpha))^{1/2}, \\ u_{2*}/u_f &= (u_{2*}/u_{1*})/(u_f/u_{1*}) = (2\alpha/(1 + \alpha))^{1/2} \\ y^*/b &= 1/(1 + \alpha) \end{aligned} \quad (38)$$

$$(39)$$

などを用いて (36) を整理すると

$$\begin{aligned} 1/\sqrt{f} &= (1/\sqrt{1 + \alpha}) \cdot [-A \ln \{ (1 + \alpha)\gamma \} \\ &\quad + B - \delta \cdot (1 + \alpha\sqrt{\alpha})/(1 + \alpha)] \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} 1/\gamma &= u_{1*}b/\nu = (u_{1*}/u_f) \cdot (u_f b/\nu) \\ &= (2/(1 + \alpha))^{1/2} \cdot Re_f \cdot (f/2)^{1/2} \end{aligned}$$

であることを考えれば

$$\begin{aligned} 1/\sqrt{f} &= (1/\sqrt{1 + \alpha}) [A \ln \{ Re_f \sqrt{f} \} - 1.5A \ln(1 + \alpha) + B \\ &\quad - \delta(1 + \alpha\sqrt{\alpha})/(1 + \alpha)] \end{aligned} \quad (41)$$

あるいは $F_3(f, \tau_2/\tau_1, y_1/b) = 0$

これが粗度の異なる平行な平板間の流れの抵抗係数をあらわす関数形であって、軸対称な流はの場合、対数分布則を仮定して導かれた関係式

$$1/\sqrt{f} = 4.073 \log_{10} \{ \sqrt{f} \cdot Re_f \} + 0.2833 \quad (42)$$

あるいは、Blasius の 1/7 乗則を仮定して得られた

$$\begin{aligned} f &= 0.071 Re_f^{-1/4} \\ f &= 12/Re_f \text{ (層流)}, f = \tau_1/(1/2\rho V^2), u_f = (gbI/2)^{1/2} \end{aligned} \quad (43)$$

と比較して、両面のせん断力の比によっても抵抗係数は変化することがわかる。このことは粗度の異なる平板間流れの特徴であって、粘性流れや、軸対称な流れ場では外部条件として、流れ幅 b , 圧力勾配 I , 壁面粗度 k が与えられれば (43) によって u_f が求まり、レイノルズ数 Re , 抵抗係数 f も一意的に定まる。すなわち

$$Re_f = Re_f(u_f b/\nu) \quad (44)$$

$$f = f(u_f b/\nu) \quad (45)$$

ところが粗度の異なる流れ場では (34), (41) でみたように

$$Re_f = Re_f(\alpha, \gamma) \text{ または } Re_f(u_f b/\nu, k/b) \quad (46)$$

$$f = f(\alpha, \gamma) \text{ または } f = f(u_f b/\nu, k/b) \quad (47)$$

b, I, k が与えられた時の Re_f, f の計算順序を以下にまとめて示す。

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{array}{l} b, I, k \\ \alpha, \gamma \\ \tau_1, \tau_2, Re(\alpha, \gamma), f(\alpha, \gamma), y^*/b \end{array} \right\} \rightarrow f(Re, f) = 0 \\
 & u_f = (gbI/2)^{1/2} = ((\tau_1 + \tau_2)/2\rho)^{1/2} = (\nu/\sqrt{2}b) \cdot (1+\alpha)^{1/2}/\gamma \\
 & \{1/(1+\alpha)\gamma\} \cdot \{\beta(1+\alpha)/\alpha\}^{\sqrt{\alpha}} = \exp\{(\sqrt{\alpha}-1) \cdot (B/A)\} \\
 & \text{上の2式より} \\
 & u_f b/\nu = \{(1+\alpha)^{3/2}/\sqrt{2}\} \cdot [\exp\{(\sqrt{\alpha}-1) \cdot (B/A)\}] / \{B(1+\alpha)/\alpha\}^{\sqrt{\alpha}} \\
 & \tau_2 = \rho u_{2*}^2 = \rho u_f^2 \cdot \{2\alpha/(1+\alpha)\} \\
 & \tau_1 = \rho u_{1*}^2 = \rho u_f^2 \cdot \{2/(1+\alpha)\} \\
 & y^*/b = \tau_1/(\tau_1 + \tau_2) = 1/(1+\alpha)
 \end{aligned}$$

Fig. 2, Fig. 3 に b, I, k が与えられた時のレイノルズ数と抵抗係数の変化の数値計算の一例を示す。

2.1.4 実験値との比較について

Fig. 2, 3, 4 に実験値から求めたデータがのせられている。また Fig. 5 には主流の流速分布の測定例がのせられている。測定されたデータは流れの圧力勾配 I , 流量, そして流速分布のみである。あとは二次的なデータである。最大流速点は測定にかなりの誤差を伴うのであまり信頼はおけないが、ずれの位置が $u_f b/\nu$ の増加と共に減少していく様子が見られる。しかし k/b が大きくなると理論曲線が示すものより急激に変化していく。また抵抗係数においても $k/b \sim 0.1$ ではほぼ理論曲線上にあるが $k/b \geq 0.2$ ではそのずれは大きくなっ

ていく。流速分布から判断されるように境界面との slip velocity よりも粗度に大きく影響を受けていることがわかる。理論的に導いた平均流速分布形は $k/b \sim 0.2$ においては修正の必要があると考えられる。

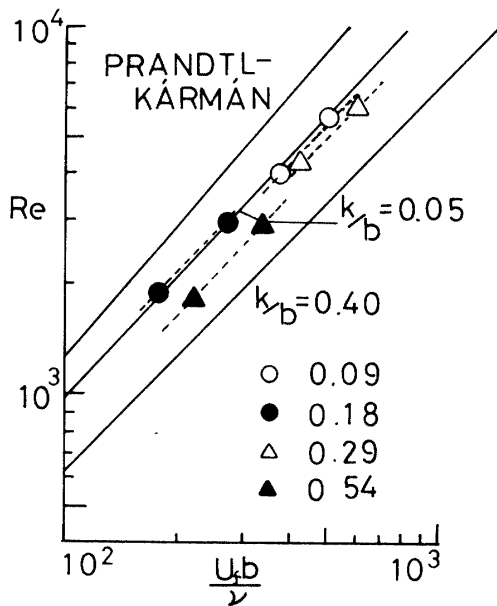


Fig. 2 Effect of $\frac{U_f b}{\nu}$ on the Reynolds number.

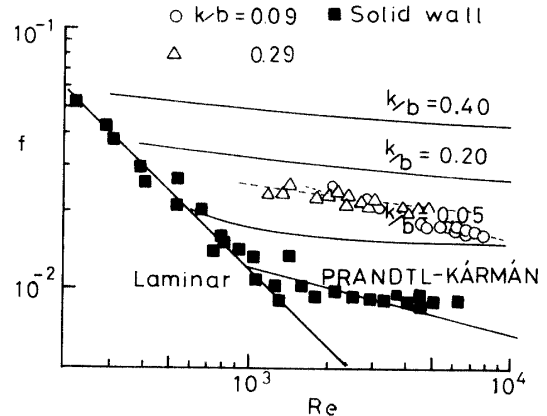


Fig. 3 Effect of roughness parameter k/b on the friction factor.

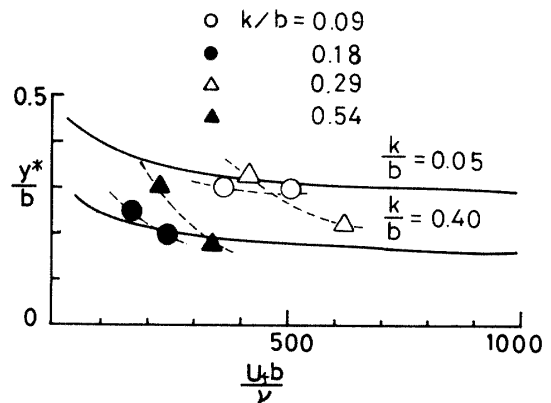


Fig. 4 Displacement of the location of the maximum velocity.

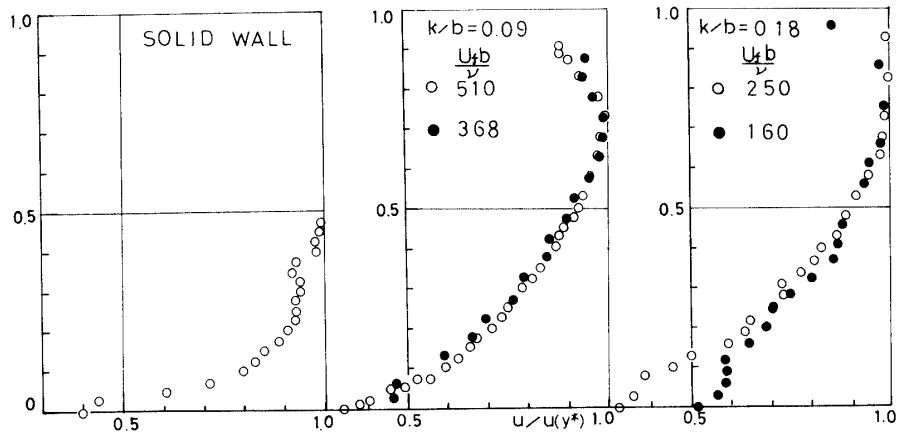


Fig. 5 An example of observed velocity distributions in a channel.

2.2 浸透層内の流れの解析

2.2.1 主流場と浸透層の境界条件

剛体壁が境界面を構成している場合と異なり、主流場境界面近傍の流速分布は大きな速度勾配を持った流れであると推測される。この大きな速度勾配をもつ層を境界層と呼ぶことにする。境界層の流れと主流の相互作用については、Beavers⁴⁾らが層流について、slip velocity の概念を導入し、主流の流量増加と抵抗係数の減少（剛体壁と比較して）を説明した。一方 Saffman⁵⁾, Yamamoto²⁾はこの slip velocity の理論的導出を試みた。特に Yamamoto は主流場、境界層流れがそれぞれ3次元の Stokes flow, Brinkman 型⁶⁾の方程式に支配される流れについて摂動法を用い、slip velocity の一般形を導くと同時に、この境界層の厚さがほぼ多孔体の構成要素のオーダーであることも見出した。一方乱流場においては、境界面付近で流れは壁面粗度のスケールや形状、配列に大きく影響され、境界層とのレイノルズ応力による運動量交換が考えられる。E. M. Sparrow¹⁾らは乱流場においても、slip velocity があると考え、Van Driest 型の混合距離を用い、流速分布の理論解を求めた。その結果は、層流の場合と同じく、流量の増加、抵抗係数の減少、最大流速点の浸透層よりへのずれなどであった。ところが2, 3の実験報告によると、この結果と全く逆の結果が得られている。§2で理論展開したように R_4 層では、完全粗面上の対数分布則であった。粗度の上端面を境にして R_4 層と R_5 層での流れは全く異なる運動方程式に支配されていると考える。すなわち、 R_4 層ではレイノルズ方程式、 R_5 層においては一般化された Brinkman 型の方程式である。Yamamoto²⁾ にならって、まずこの境界面で成立する条件の理論的導出を試

みる。 R_4, R_5 層での方程式系は

R_4 層: (5), (6), (7) 式 (5) 式は渦動粘性係数を導入して

$$\rho d/dy((\epsilon_0 + \nu) d\bar{u}/dy) = dp/dx \quad (5)'$$

$$R_5 \text{ 層: } \rho d/dy\{(\nu + \epsilon_0) d\bar{U}/dy\} - \mu \bar{U}/k_0 - C\rho \bar{U}^2/\sqrt{k_0} = dP/dx \quad (48)$$

境界層においては、粘性力とレイノルズ応力がほぼ同じオーダーだと仮定する。すなわち

$$\epsilon_0 \approx \nu \quad (49)$$

この場合 (48) は

$$dP/dx \approx \mu d^2 \bar{U}/dy^2 - \mu \bar{U}/k_0 - C\rho/\sqrt{k_0} \bar{U}^2 \quad (50)$$

ここに $k_0[L^2]$ は Darcy 則で定義される透水係数、すなわち $U_a = -(k_0/\mu) \cdot (dP/dx)$, C は透水体の形状、大きさによって決まる固有の量である。この C に関しては D. D. Joseph⁷⁾で議論されている。式 (50) は Brinkman によって使われたもので⁶⁾ 右辺第1項がない時は Forchheimer の式、第1, 第3項が無視される場合は、よく知られた Darcy の式である。(5)' (50) を以下のような代表速度、代表長さを用いて無次元表示すると、

$$dp'/dx = d/dy\{(1 + \epsilon_0/\nu) du'/dy'\} \quad (5)''$$

$$dP'/dx' = d^2 \bar{U}'/dy'^2 - L^2 \bar{U}'/k_0 - (C\rho/\sqrt{k_0}) \cdot (L^2/\mu) U_a U'^2 \quad (50)'$$

$$\bar{u}/\bar{U}_a = \bar{u}' \quad p/(\mu \bar{U}_a/L) = p' \quad (53)$$

$$\bar{U}/\bar{U}_a = \bar{U}' \quad P/(\mu \bar{U}_a/L) = P' \quad (54)$$

$$\bar{U}_a = -(k_0/\mu) dP/dx$$

$\varepsilon^2 = k_0/L^2$, $Re_p = LU_d/\nu$ とおき, 方程式系の ' - を以下とって表わすことにすれば (50)' は

$$dP/dx = d^2U/dy^2 - (1/\varepsilon^2) \cdot U - (CRe_p/\varepsilon)U^2 \quad (55)$$

浸透層の代表長さ L として粒径をとれば通常 $\varepsilon = \sqrt{k_0}/L = 1.9 \times 10^{-2}$ (粒径 2mm の場合) で $Q(10^{-2})$ である. また Re_p は $O(10^1)$ と考えてよい. 境界面で成立する条件は

$$1. \text{ 速度が連続 } u|_{y=0} = U|_{y=0} \quad (56)$$

$$2. \text{ 圧縮応力が連続 } p|_{y=0} = P|_{y=0} \quad (57)$$

$$3. \text{ せん断応力が連続 } \tau_{xy}|_{y=0} = \tau'_{xy}|_{y=0} \quad (58)'$$

連続の式を使って書き直せば 3. の条件は

$$3' \quad (du/dy)_{y=0} = (dU/dy)_{y=0} \quad (58)$$

となる.

ε で摂動展開を行ない, 境界層での流速分布を求める一般にこの種の問題で行なわれるのと同様に境界層において座標のひきのぼし $\eta = y/\varepsilon$ を行ない, P, U を次の形で展開する.

$$P = P_d^{(0)} + \varepsilon P_d^{(1)} + \varepsilon^2 P_d^{(2)} + \varepsilon^3 P_d^{(3)} + \dots \quad (59)$$

$$U = \varepsilon U_B^{(1)}(\eta) + \varepsilon^2 (U_d^{(2)}(y) + U_B^{(2)}(\eta)) + \varepsilon^3 (U_d^{(3)}(y) + U_B^{(3)}(\eta)) + \dots \quad (60)$$

ここに

$$P = P_d^{(0)} + \varepsilon P_d^{(1)} + \varepsilon^2 P_d^{(2)} + \varepsilon^3 P_d^{(3)} + \dots \quad (61)$$

$$U = \varepsilon^2 U_d^{(2)} + \varepsilon^3 U_d^{(3)} + \dots \quad (62)$$

は方程式

$$dP/dx = -U/\varepsilon^2 - (cRe/\varepsilon)U^2$$

を満たし, Darcy-Forchheimer の関係式となることかわかる. 一方主流のレイノルズ方程式の解を同様に ε で展開を行ない

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \dots \quad (63)$$

$$u = u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)} + \dots \quad (64)$$

$u^{(i)}, p^{(i)}$ ($i=0, 1, 2, \dots$) は

$$dp^{(i)}/dx = d/dy \{ (1 + \varepsilon_0/\nu) du^{(i)}/dy \} \quad i=0, 1, 2, \dots$$

の解とする. (59), (60) を境界層での方程式 (55) に代入し境界条件 (1), (2), (3)' を用い, 摂動パラメーター ε の各次の項を等しいとおいて, 各項の満たす方程式が導かれる. その方程式を解いて解を求めることができる. (Appendix) その結果のみを記すと境界面 $y=0$ での関係式として,

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= (\varepsilon^2 U_d^{(2)} + \varepsilon^3 U_d^{(3)} + \dots) \\ &+ \varepsilon \{ d/dy (u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots) \}_{y=0} \\ &+ 1/3 \cdot \varepsilon^3 C \cdot Re_p \{ (du^{(1)}/dy)_{y=0} \}^2 \\ &= U_d + \varepsilon (du/dy)_{y=0} \\ &+ 1/3 \cdot \varepsilon^3 CRe \{ (du^{(1)}/dy)_{y=0} \}^2 \end{aligned} \quad (65)$$

また層内の流速分布形として

$$\begin{aligned} u &= U_d + \varepsilon (du/dy)_{y=0} e^{y/\varepsilon} \\ &+ 2/3 \cdot \varepsilon^2 CRe \{ (du^{(1)}/dy)_{y=0} \}^2 e^{y/\varepsilon} \end{aligned} \quad (66)$$

が求められる. Yamamoto が導いた式は, 右辺第 3 項は含まれていない. これは Brinkman 方程式 (55) の第 3 項の非線項に帰因するものであるが, もちろん Re_p の小さい場合は省略してよい. この場合には,

$$u|_{y=0} = U_d + \varepsilon (du/dy)_{y=0} \quad (65)'$$

$$U \doteq U_d + \varepsilon (du/dy)_{y=0} e^{y/\varepsilon} \quad -\infty < y < 0 \quad (66)'$$

となり, Beavers らが層流流れにおいて無条件で用いた境界条件となる. U_d を代表流速とした無次元表示は

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= 1 + \varepsilon (du/dy)_{y=0} \\ U &= 1 + \varepsilon (du/dy)_{y=0} e^{y/\varepsilon} \quad -\infty < y < 0 \end{aligned} \quad (66)''$$

以下の解析は, 浸透層レイノルズ数 Re_p が小さい場合について行なうが, Re_p が無視できない場合には (66) を用いれば全く同様に扱うことができる. (66)' を用い, 境界層内の断面平均流速の無次元表示を求めると

$$\begin{aligned} U_a &= \bar{U}/U_d = \left(\int_0^{-H^+} U dy \right) / H^+ \\ &= \int_0^{-H^+} (\varepsilon (du/dy)_{y=0} e^{y/\varepsilon} + 1) dy \\ &= 1 + \varepsilon^2 \cdot (L/H) \cdot (du/dy)_{y=0} \\ &\quad (1 - \exp(\varepsilon H/L)) \end{aligned} \quad (67)$$

$H^+ = H/L$ H : 浸透層厚さ

2.2.2 対数分布則 (26) の原点補正量 y_s の導入

浸透層の上端面 $y=0$ において上にみたように, 境界条件が求まった. 対数分布則 (26) は $y=0$ で $-\infty$ になるので, 原点を $-y_s$ 移動し, $y=y_s$ において前述の境界条件 (65) または (66) が成立すると考え, $y=y_s$ で対数分布と境界層の速度分布 (66)' の接続を試みる. 対数速度則より $u/u_{2*} = A \ln y/k + B$, k は浸

透層粗度スケールである。

$$\therefore u_s/u_{2*} = A \ln y/k + B \quad u_s = u|_{y=y_s} \quad (68)$$

$$\therefore (u - u_s)/u_{2*} = A \ln(y/y_s)$$

U_d, L を用いて無次元表示をしておけば

$$u/U_d = (U_{2*}/U_d) \cdot \{A \ln(y/L) - A \ln(k/L)\} + B(u_{2*}/U_d)$$

境界条件を用いて

$$\varepsilon (du/dy)_{y=0} = u|_{y=y_s} - 1 \approx u|_{y=y_s}$$

$$\begin{aligned} \therefore \varepsilon (A u_{2*} L / U_d y_s) &= (u_{2*} / U_d) A \\ &\times \ln(y_s/k) + B(u_{2*} / U_d) \end{aligned}$$

$$\therefore k_0/L y_s = \ln(y_s/k) + (B/A) \quad (69)$$

この式によって原点補正量 y_s が決まる。砂を密にしきつめたような場合は $L \approx k$ とおくことができ、上式は

$$k_0^*/(y_s/k) = (k_0/k^2)/(y_s/k) = \ln(y_s/k) + B/A$$

k_0^* は透水体の大きさ、形状、配列によって決まる固有な量であって、例として径 0.2 cm の密な砂粒粗度の場合 $k_0 = 1.5 \times 10^{-5} \text{ cm}^2$ $k = 0.2 \text{ cm}$ $k_0^* = 3.75 \times 10^{-4}$ 、この場合、上の方程式の解は $y_s/k = 0.12$ であるが一般的には

$$y_s/k = f(k_0^*) \quad (70)$$

である。(69) によって y_s/k が求まれば (68) に代入することによって境界面での slip velocity u_s が求まる。

$$u_s/u_{2*} = A \ln(y_s/k) + B = f(k_0/k)$$

$$\text{あるいは} \quad u_s = u_{2*} f(k_0/k) \quad (71)$$

で摩擦速度 u_{2*} 、粗度スケール k 、透水係数 k_0 によって定まることがわかる。摩擦速度 u_{2*} が $u_f (= \{gbI/2\}^{1/2})$ 、 k/b によって決まったことを考えれば

$$u_s = g(u_f b/\nu, k/b, k_0^*) \quad (72)$$

これは層流の Poseville 流れの場合と比較すると

$$u_s/u_f = (u_f b/\nu) \Phi \quad \Phi = (\sigma + 2\alpha) / \{\sigma(1 + \sigma\alpha)\}$$

$$\sigma = b/\sqrt{k_0}$$

$$\alpha: \text{浸透層固有の無次元量} (= k_0^*)$$

slip velocity を用いて、境界層内の流速分布を書き直すと (66)' (71) より

$$\begin{aligned} U &= 1 + (u_s/U_d - 1) \exp(-L^2 y/k_0) \quad -1 < y < 0 \\ &\approx 1 + A(k_0/L^2) \{(u_{2*}/U_d)/(y_s/L)\} \exp(-L^2 y/k_0) \end{aligned}$$

以上、境界層内の流速分布が主流の摩擦速度 u_{2*} 、透水体の代表長さ L 、透水係数 k_0 などの関数として求められた。このことを整理すると次のようになる。外部条件として通常与えられるものは k_0, L, I, k であるから

$$\left. \begin{array}{l} k_0 \\ L \\ I \\ k \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{---} y_s \text{---} u_s \\ \varepsilon (du/dy)_{y=0} = (u)_{y=0} - 1 \\ \text{対数分布則} \\ \text{---} u_{2*} \end{array} \right\} \text{---} U = U(y)$$

Appendix

$$\begin{aligned} P &= P_d^{(0)} + \varepsilon P_d^{(1)} + \varepsilon^2 P_d^{(2)} \\ &\quad + \varepsilon^3 P_d^{(3)} + \varepsilon^4 P_d^{(4)} + \dots \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= U_d^{(0)} + \varepsilon U_d^{(1)} + \varepsilon^2 U_d^{(2)} \\ &\quad + \varepsilon^3 U_d^{(3)} + \varepsilon^4 U_d^{(4)} + \dots \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

とし、方程式 (55) に代入すれば

$$\begin{aligned} dP/dx &= dP_d^{(0)}/dx + \varepsilon dP_d^{(1)}/dx \\ &\quad + \varepsilon^2 dP_d^{(2)}/dx + O(\varepsilon^2) \\ &= d^2/dy^2 (U_d^{(0)} \varepsilon U_d^{(1)} + \varepsilon^2 U_d^{(2)}) \\ &\quad - (1/\varepsilon^2) (U_d^{(0)} + \varepsilon U_d^{(1)} + \varepsilon^2 U_d^{(2)}) \\ &\quad - (CRe_p/\varepsilon) \{ (U_d^{(0)})^2 + \varepsilon^2 (U_d^{(1)})^2 \\ &\quad + \varepsilon^2 (U_d^{(2)})^2 + 2\varepsilon U_d^{(0)} U_d^{(1)} + \dots \\ &\quad + 2\varepsilon^2 U_d^{(0)} U_d^{(2)} + \dots \\ &\quad + 2\varepsilon^3 U_d^{(1)} U_d^{(2)} + \dots \} \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

$$1/\varepsilon^2, 1/\varepsilon, \text{定数項}, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \dots$$

の項を比較することにより次式が得られる。

$$U_d^{(0)} = 0, \quad U_d^{(1)} = 0$$

$$O(1) \quad dP_d^{(0)}/dx = -U_d^{(2)}$$

$$O(\varepsilon) \quad dP_d^{(1)}/dx = -U_d^{(3)}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^2) \quad dP_d^{(2)}/dx &= d^2 U_d^{(2)}/dy^2 - U_d^{(4)} \\ &= -U_d^{(4)} \quad (\because dP_d^{(0)}/dy = 0) \end{aligned}$$

$$O(\varepsilon^3) \quad dP_d^{(3)}/dx = -U_d^{(5)} - CRe_p (U_d^{(2)})^2$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon^4) \quad dP_d^{(4)}/dx &= -U_d^{(6)} \\ &\quad - 2 CRe_p (U_d^{(2)} U_d^{(4)})^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore dP/dx &= d/dx(P_d^{(0)} + \varepsilon P_d^{(1)} + \varepsilon^2 P_d^{(2)} + \dots) \\ &= -U_d^{(2)} - \varepsilon U_d^{(2)} - \varepsilon^2 U_d^{(3)} \\ &\quad - \varepsilon^3 U_d^{(5)} - \varepsilon^3 CR_e(U_d^{(2)})^2 \\ &= -(1/\varepsilon^2)\{\varepsilon^2 U_d^{(2)} + \varepsilon^3 U_d^{(3)} + \dots\} \\ &\quad - (CR_e/\varepsilon)\{\varepsilon^2 U_d^{(2)} + \dots\} \\ &= -(1/\varepsilon^2) \cdot U - (CR_e/\varepsilon) \cdot U^2 \end{aligned}$$

となり、これは Darcy-Forchheimer の式に他ならない。次に境界層内では (59), (60) のように展開し境界条件 $p|_{y=0} = P|_{y=0}$ $(du/dy)_{y=0} = (dU/dy)_{y=0} = (1/\varepsilon)(dU/d\eta)_{y=0}$, $U|_{y=0} = U|_{y=0}$ を用いこれに代入すれば

1. $p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \varepsilon^3 p^{(3)} + \dots$
 $= P_d^{(0)} + \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \dots$
2. $d/dy(u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots)$
 $= (1/\varepsilon)d/d\eta\{\varepsilon U_B^{(1)} + \varepsilon^2 U_B^{(2)} + \varepsilon^3 U_B^{(1)} + \dots\}$
 $+ d/dy(\varepsilon^2 U^{(1)} + \varepsilon^3 U_d^{(2)} + \dots)$
3. $u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \varepsilon^3 u^{(3)} + \dots$
 $= \varepsilon U_B^{(1)} + \varepsilon^2 U_B^{(2)} + \varepsilon^3 U_B^{(3)} + \varepsilon^2 U_D^{(2)} + \varepsilon^3 U_D^{(3)}$

ε の各項を比較すれば境界条件として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} O(1) \quad &u^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = P_d^{(0)} \\ &du^{(0)}/dy = du_B^{(1)}/d\eta \\ O(\varepsilon) \quad &u^{(1)} = U_B^{(1)}, \quad p^{(1)} = P_d^{(1)} \\ &du^{(1)}/dy = dU_B^{(2)}/d\eta \\ O(\varepsilon^2) \quad &u^{(2)} = U_B^{(2)} + U_d^{(2)}, \quad p^{(2)} = P_d^{(2)} \\ &du^{(2)}/dy = dU_B^{(2)}/d\eta + dU_d^{(2)}/d\eta \end{aligned} \right\} (A4)$$

前と同様に方程式 (55) に代入して ε の各項を比較すれば、

$$\begin{aligned} O(1/\varepsilon) \quad &d^2 U_B^{(1)}/d\eta^2 - U_B^{(1)} = 0 \\ &\text{これと上の境界条件より} \\ &U_B^{(1)} = (du^{(0)}/dy)_{y=0} e^{+\eta} \\ &u^{(1)} = U_B^{(1)} = (du^{(0)}/dy)_{y=0} \\ O(1) \quad &dP_d^{(0)}/dx = d^2 U_B^{(2)}/d\eta^2 \\ &\quad - (U_B^{(2)} + U_d^{(2)}) \end{aligned}$$

Darcy の式 (A3) と (A4) より

$$\begin{aligned} U_B^{(2)} &= +(du^{(1)}/dy)_{y=0} e^\eta \\ u^{(2)}|_{y=0} &= U_d^{(2)} + du^{(1)}/dy|_{y=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O(\varepsilon) \quad &d^2 U_B^{(3)}/d\eta^2 - U_B^{(3)} \\ &\quad - CR_{ep}(U_B^{(1)})^2 = 0 \quad \text{など} \end{aligned}$$

以上の結果から

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= u^{(0)} + \varepsilon u^{(1)} + \varepsilon^2 u^{(2)} + \dots|_{y=0} \\ &= 0 + \varepsilon (du^{(0)}/dy)_{y=0} + \varepsilon^2 (U_d^{(2)} + du^{(1)}/dy)_{y=0} \\ &\quad + \varepsilon^3 [(U_d^{(3)} + du^{(2)}/dy + dU_d^{(2)}/dy) \\ &\quad - 1/3 \cdot CR_{ep} \{(dU^{(1)}/dy)_{y=0}\}^2] \\ &= U_d + \varepsilon (du/dy)_{y=0} \\ &\quad + 1/3 \cdot \varepsilon^3 CR_{ep} \{(du^{(1)}/dy)_{y=0}\}^2 \end{aligned}$$

参考文献

- 1) E. M. Sparrow., V. K. Jonsson., G. S. Beavers., and R. G. Qwen: Trans. of the ASME, J. Basic Eng. (1972). pp. 314
- 2) K. Yamamoto: J. Phys. Soc. Japan **34**, 814 (1973)
- 3) P-C. Lu: "Introduction to the Mechanics of viscous Fluids" McGraw-Hill p. 272
- 4) G.S. Beavers, and D.D. Joseph: J. of Fluid Mech. **30**, 197 (1967)
- 5) P.G. Saffman: Studies in Appl. Math, **50**, 93 (1971)
- 6) H.C. Brinkman: Appl. Sci. Res. A1, p. 27. (1947)
- 7) D. D. Joseph, D. A. Nield, G. Papanicolaou: Water resources research **18**, 1049 (1982)

(昭和 58 年 10 月 15 日 受理)