

越流型余水吐の流量係数について

斎藤 隆*・大成博文**・赤司信義***・深田三夫*・岡田武司****

On the Discharge Coefficient of Overflow Spillways

Takashi SAITOU, Hirofumi OHNARI, Nobuyoshi AKASHI,
Mitsuo FUKADA and Takeshi OKADA

Abstract

As maximum utilization of water resource is required, so increase the demand for the greater accuracy of discharge coefficient of overflow spillways. It is one of difficulty to reduce the general expression of discharge coefficient of overflow spillways that experimental data of dam model which involves effects of ratio of overflow depth to dam height, overflow depth to overflow span length and etc.

It is necessary to establish the discharge coefficient of two dimensional overflow spillways, as a clue to elucidate the general expression of discharge coefficient of overflow spillways.

The purpose of this study is to deduce the general expression of discharge coefficient of two dimensional overflow spillways. In this report, the author proposed the method to determine the control section and discharge coefficient of overflow spillways with general shape. In theoretical analysis, the author introduced the development of boundary layer along a surface of overflow spillways in the theory as to two dimensional potential flows as is generally known.

We confirm that the achievements in this report are reasonable, in comparing with many former equation for discharge coefficient depend more or less on experimental data under various condition.

1. 緒 論

越流型余水吐は代表的な放流施設であって、ほとんどのダムにおいて、常用あるいは非常用の洪水吐として設けられており、その流量係数の決定はダム水理模型実験の主要な実験項目の一つである。

越流型余水吐の流量係数については、従来より多くの人々によって検討され、各種の公式が提案されているが、これらの大部分は個々の形状に対する実験公式である。ダム構造上から種々の越流面形状が使用され、個々のダムによってダム高さと越流水深（接近流速の影響）、越流水深の径間巾（せき柱の影響）などの関係が全て異なっているので、一般的な流量公式を導くことの障害となって、越流頂の形状と流量係数と

の一般的関係を導いたものはほとんどない。理論的研究としては、Laufer, Jaeger, 岩崎¹⁾, 石井・藤本^{2)~4)}らの二次元ポテンシャル流れに関するものがあげられ、なかでも、藤本²⁾らは流線が同心円上にあるとの仮定についての修正を行なっているのが注目される。岩崎¹⁾は支配断面の位置を規定する $\alpha = h/r$ (h ; 限界水深, r ; 支配断面における壁面の曲率半径) の関数が α による変化が小さいことより、この関数を定数に置きかえ、また、石井・藤本²⁾は越流頂点付近の形状を2次曲線とみなして、両者とも支配断面は越流頂点にあと推論しているが、両者が行なった考察過程において若干の疑問がもたれる。

越流頂を越流する流れは比較的短い区間で流れの状態が急変するので、越流面摩擦（粗度）、すなわち、越流面に沿って発達する境界層の影響は比較的小さいとして無視できるものと考えられている。これに対して、村・荒木⁵⁾は、越流係数に関する模型実験結果はそのまま実物に適用しうるものと仮定され、かつ一般的にこの仮定が比較的妥当であると見なされているこ

* 土木工学科

** 徳山工業高等専門学校 土木建築科

*** 西日本工業大学 土木工学科

**** 大学院工学研究科 土木工学専攻

とに疑問をもち、大小2つの相似な真鍮模型でもって二次元実験を行ない、越流水深が2cmになると水位側定誤差ならびに表面張力の影響を受けるが、越流水深が2cm以上になるとレイノルズ数の流量係数に及ぼす影響はあまり大きいものでないであろうと推論している。その後、藤本⁶⁾は設計越流水頭 H_0 に対し越流水頭 H が $H/H_0 < 0.2 \sim 0.4$ では流量係数が小さくなることに着目し、次元解析的考察から、越流水深が小さい場合には表面張力ならびに粘性の影響が現われるので縮尺効果を考慮する必要があることを指摘している。しかしながら、その定量的評価にはまだ多くの検討の余地が残されている。

二次元ポテンシャル流れに関する結果から明らかなように、越流流れの各断面における最大流速点は壁面上であって、越流面に沿う境界層の発達は最大流速点における流速の欠損であるので、越流流れの条件すなわち境界層厚さと越流水深との相対的大きさによっては無視できなくなるものと考えられる。一方、村・荒木・藤本が指摘している表面張力の影響は、水表面の曲率半径が葉面上の水滴ないしは表面張力程度まで小さくなると考慮する必要があると考えられるが、通常のダム水理模型実験の縮尺程度では上述した境界層発達による影響の方が大きいものと考えられる。

越流型余水吐の流量係数の一般式を確立するには、まず二次元越流流れの流量係数を明らかにし、それに基づいてせき柱比、接近流速などの影響を評価するのが妥当な方法と考えられる。

本文は、上述の観点から、よく知られている越流流れを二次元ポテンシャル流れとした水位～流量の関係式と、任意断面に対するベランジェの法則、すなわち $E = \text{const}$ の条件のもとで $\partial Q / \partial h = 0$ を満足する条件式とから支配断面の位置を決定し、壁面に沿って発達する境界層の発達による速度の欠損量でもってポテンシャル流れに関する流量係数を修正する方法を提案し、越流面の形状と水理量との関係について検討した結果を報告するものである。

2. 越流流れの基礎式

越流頂を越流する流れを二次元ポテンシャル流動とみなすと、Fig. 1 の記号を用いて、表面流速、流速分布、流量および圧力分布はよく知られている次の諸式⁶⁾で表わされる。

$$\frac{v_s}{\sqrt{2gE_0}} = \sqrt{1 + \frac{S}{E_0} - \frac{h}{E_0} \cos \theta} \quad (1)$$

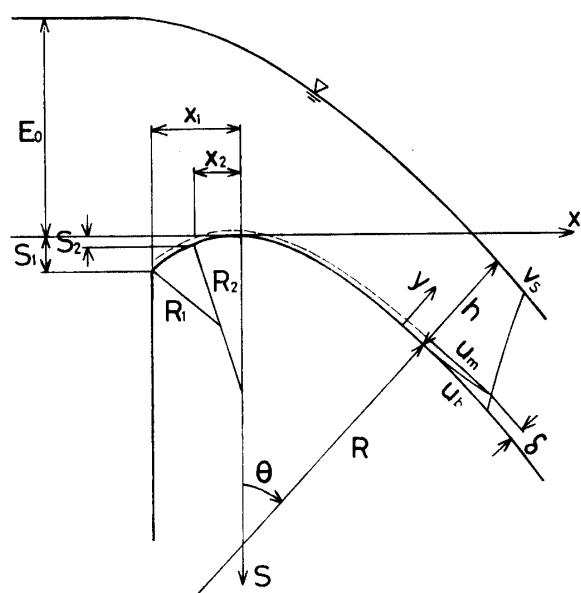


Fig. 1 Schematic view of flows of overflow spillways.

$$\frac{v}{v_s} = \frac{R+h}{R+y} \quad (2)$$

$$\frac{Q}{B\sqrt{2gE_0}} = \sqrt{1 + \frac{S}{E_0} - \frac{h}{E_0}} \cdot \left(\frac{R+h}{E_0} \right) \cdot \ln \left(\frac{R+h}{R} \right) \quad (3)$$

$$\frac{P}{\rho g E_0} = \frac{h-y}{E_0} \cos \theta + \left(1 + \frac{S}{E_0} - \frac{h}{E_0} \cos \theta \right) \left\{ 1 - \left(\frac{R+h}{R+y} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

越流面上の圧力は式(4)で $y=0$ とおいて次式と表わされる。

$$\left(\frac{P}{\rho g E_0} \right)_{y=0} = \frac{h}{E_0} \cos \theta + \left(1 + \frac{S}{E_0} - \frac{h}{E_0} \cos \theta \right) \left\{ 1 - \left(\frac{R+h}{R} \right)^2 \right\} \quad (5)$$

$Q/B\sqrt{2gE_0}$ は S/E_0 , R/E_0 ならびに h/E_0 の関数であるので、越流面の形状と越流比エネルギーが与えられると、式(3)は $Q/B\sqrt{2gE_0}$ と h/E_0 の関係式である。

越流流れは静止状態から急勾配水路の流れとなるので、常流流れから射流流れに変わる不等流流れである。常流流れから射流流れに移行する際に限界流が存在し、このような流れの水理諸量は支配断面における水理量によって規定される。したがって、このような流れを解析するには、まず支配断面の位置を確定しなければならない。

3. 支配断面位置 (x_c/E_0)

支配断面はいわゆるベランジェの法則により定まる。すなわち、 $E_0 = \text{const}$ の条件のもとに $\partial Q/\partial h = 0$ を満たさなければならない。したがって、式(3)を h で微分し、整理すると次式となる。

$$\frac{h_c}{E_0} = \frac{2\left(1 + \frac{S}{E_0}\right) - \left\{\frac{R}{E_0} \cos \theta - 2\left(1 + \frac{S}{E_0}\right)\right\} \ln\left(\frac{R+h_c}{R}\right)}{2 \cos \theta + 3 \cos \theta \ln\left(\frac{R+h_c}{R}\right)} \quad (6)$$

上式は h_c/E_0 と S/E_0 , R/E_0 ならびに θ との関係式であるので、支配断面の位置が定まれば逐次近似法でもって h_c/E_0 が求められる。支配断面の位置は次のようにして定めた。

越流面の形状が一般的に次式で表わされるものとする。

$$\frac{S}{E_0} = K \left(\frac{x}{E_0} \right)^m \quad (7)$$

ここに、 E_0 は越流面形状を定める設計越流比エネルギー、 K, m ；は常数で、標準型越流頂に対して、Randolf は $K=0.53, m=1.80$ と、Harrold は $K=0.5, m=1.85$ と与えている⁸⁾。

式(7)の表示で与えられる越流面の曲率半径は次のように表わされる⁷⁾。

$$R = \left\{ 1 + \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 \right\}^{2/3} / \frac{d^2S}{dx^2} \quad (8)$$

$m < 2$ の場合、越流頂点 ($x=0$) で曲率半径は 0 となり、通常越流頂点より上流側に複合円弧断面が接合されていて、実質的に越流頂点での曲率半径は定め難い。そこで、越流頂点より下流において、各断面が支配断面であるものとして、式(6), 式(3)を用いて流量を求める Fig. 2 のようになる。

Fig. 2 の各断面における流量は、与えられた越流比エネルギーに対して各断面が流下しうる最大流量である。実際の支配断面以外の断面における流量は Fig. 2 で与えられている流量より少ないはずである。したがって、越流頂を流下しうる最大流量は Fig. 2 の最少流量 $Q_c/\sqrt{2gE_0} \cdot B$ であり、支配断面の位置は x_c/E_0 である。図でみられるように、越流流量は越流頂を支配断面（実際には定まらない）とした流量よりもかなり小さい値である。

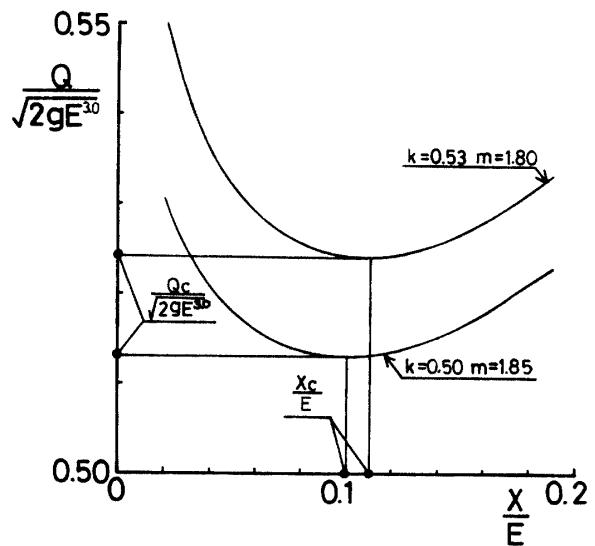


Fig. 2 Hypothesis discharge based on assumption that each sections are control section.

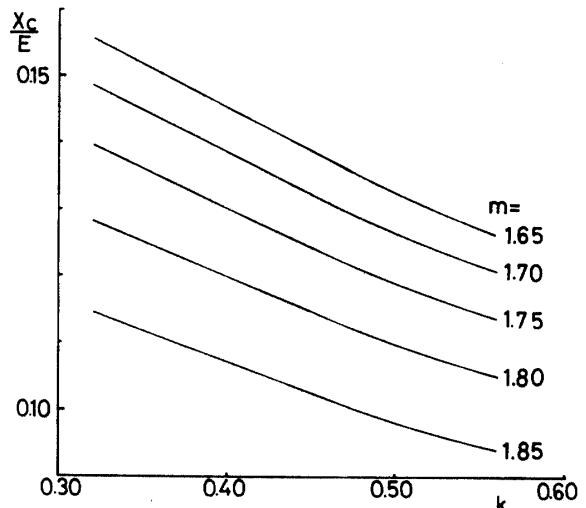


Fig. 3 Relationship between the position of control section and configuration of overflow spillways.

Fig. 3 は、越流面の形状を変えて、上述した方法でもって支配断面の位置を求めた結果である。図より、 K が大きいほど、また m が大きいほど、換言すると、越流頂点付近 ($x/E < 1$) における形状がやせているほど、支配断面の位置は越流頂点に近くなっている (x_c/E が小さい値となっている)。これは、 $m=1$ のときには支配断面は越流頂点になることから妥当な結果と云える。

越流面形状の基準長である越流比エネルギー E_0 (設計越流比エネルギー) と異なる越流比エネルギー E で式(7)を書くと次式となる。

$$\frac{S}{E} = K \left(\frac{E}{E_0} \right)^{m-1} \left(\frac{x}{E} \right)^m \quad (9)$$

越流比エネルギー E に対して、越流面の形状を規定する常数は見掛け上 $K(E/E_0)^{m-1}$ と考えることができる。 $E/E_0 > 1$, すなわち基準越流比エネルギーよりも実際の越流比エネルギーが大きい場合（設計越流水頭よりも越流水頭が大きい場合）には、 $K(E/E_0)^{m-1} > K$ であるので、越流面形状は越流比エネルギーに対して相対的にやせた形状である。したがって、支配断面の位置は設計越流比エネルギーに対する位置よりも上流側となる。逆に越流比エネルギーが基準越流比エネルギーよりも小さい場合 ($K(E/E_0)^{m-1} < K$) には、相対的に越流頂の形状はふくらんだ形であるので、支配断面の位置は下流側となる。

4. 限界水深 (H_c/E_0)

常流流れから射流流れに変わる流れの水面形状は、支配断面の位置とその断面における水深、すなわち限界水深によって規定される。このように水面形状を規定する重要な水理量の一つである限界水深が越流面の形状による変化を図示したものが Fig. 4 である。

図において、 K が大きいほど限界水深 H_c/E_0 は大きくなっている。これは、Fig. 3 でみられるように、 K が大きいほど支配断面の位置が越流頂点に近いためである。一方、 m が大きいほど、Fig. 3 から支配断

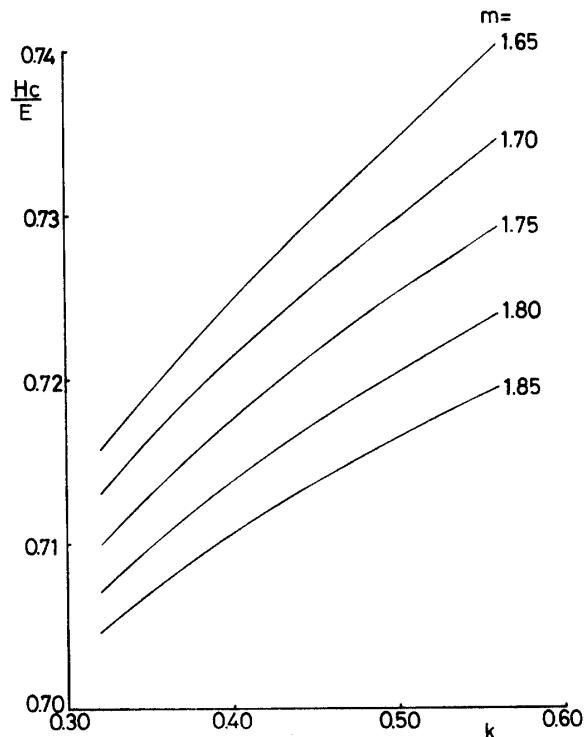


Fig. 4 Relationship between critical and configuration of overflow spillways.

面の位置は越流頂点に近いのにかかわらず限界水深は小さくなっている。これは、 m が大きいほど、越流頂点付近の形状がふくらんだ形であるので、越流面上の遠心力による圧力低下が相対的に小さくなるためである。換言すると、 m が大きいほど支配断面における越流面の曲率半径が大きく、遠心力による圧力低下が相対的に小さくなり越流流量も少なくなるが、支配断面付近における水深変化が小さいため、結果的に m が大きいほど限界水深が小さくなるのである。

5. 流量係数 ($K_q = Q/B\sqrt{2gE}$)

Harrold ならびに Randolph が与えた標準型越流頂の流量係数を前述した支配断面ならびに限界水深から計算した結果が Fig. 5 である。同図には、二次元ボテンシャル流に関する理論解をもとにして、標準型越流頂に関する実験値でもって係数を定めた岩崎の式¹⁾で計算した結果も描いてある。著者らの計算値は岩崎の式に較べかなり大きな値である。この違いの原因

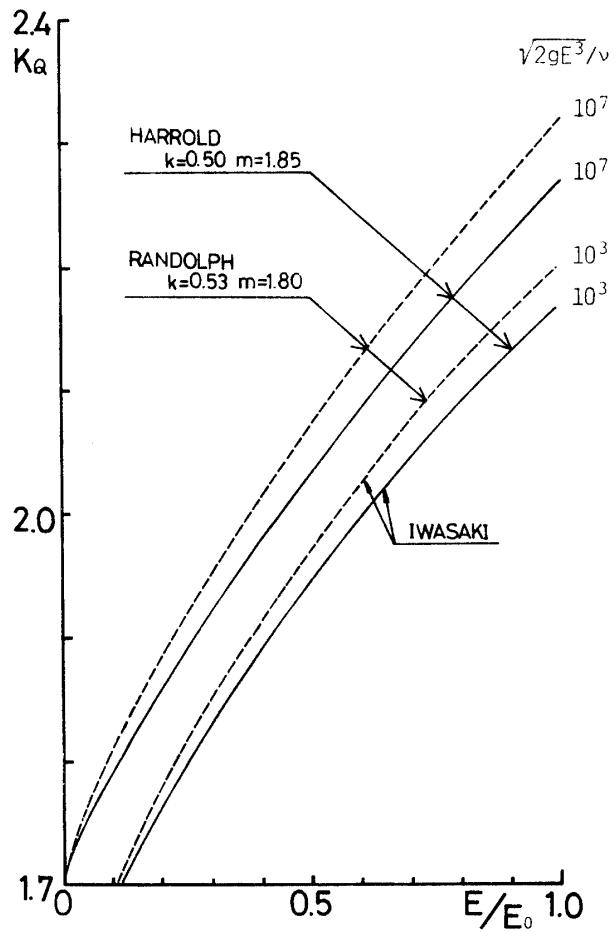


Fig. 5 Discharge coefficient of standard overflow spillways.

としては種々考えられるが、緒論で述べた推測ならびに、村・荒木⁵⁾が越流頂において測定した流速分布において壁面近くの流速が小さくなっていることより、越流面に沿って発達する境界層を無視したことが最も大きい影響であると考えられる。以下、越流面に沿って発達する境界層について考察することにする。

非圧縮性定常状態の境界層運動量方程式はよく知られた次式⁹⁾である。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \delta u_m^2 \int_0^1 \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 d\eta \right\} - u_m \frac{d}{dx} \left\{ \delta u_m \int_0^1 \frac{u}{u_m} d\eta \right\} \\ = -\delta \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \tau_w \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 U_m は境界層外縁の流速、 δ は境界層厚さである。

排除厚 δ_* 、運動量厚 θ

$$\frac{\delta_*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_m} \right) d\eta, \quad \frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_m} \left(1 - \frac{u}{u_m} \right) d\eta \quad (11)$$

を式 (10) に代入すると次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ \delta u_m^2 \left(1 - \frac{\delta_*}{\delta} - \frac{\theta}{\delta} \right) \right\} - u_m \frac{d}{dx} \left\{ \delta u_m \left(1 - \frac{\delta_*}{\delta} \right) \right\} \\ = -\delta \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\rho} \right) - \tau_w \end{aligned} \quad (12)$$

境界層内の流速分布は相似であるものとすると、上式は次式となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_*}{u_m} \right)^2 = \frac{\theta}{\delta} \frac{d\delta}{dx} - \frac{\delta}{u_m} \left(1 - \frac{\delta_*}{\delta} - 2 \frac{\theta}{\delta} \right) \frac{du_m}{dx} \\ - \frac{\delta}{u_m^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{P}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

抵抗則として Blasius 則を用いると

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{u_*}{u_m} \right)^2 &= 0.0225 \left(\frac{u_m \delta}{\nu} \right)^{1/4} \\ \frac{\delta_*}{\delta} &= \frac{1}{8}, \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{72} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

また、抵抗則として Manning-Strickler の式を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{u_*}{u_m} \right)^2 &= 0.0125 \left(\frac{k_s}{\delta} \right)^{1/8} \\ \frac{\delta_*}{\delta} &= \frac{1}{7}, \quad \frac{\theta}{\delta} = \frac{2}{28} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ここに、 u_* は摩擦速度、 k_s は相当粗度である。

越流頂点における境界層厚さは、上流側の複合円弧越流面に沿って発達してきたものであるが、越流面上の流速、圧力分布など不明な点が多いので、計算の簡

便さのため Pohlhausen の近似解法を用いて推測することにする。

Pohlhausen によると stagnation point 近傍における運動量厚は次式と表わされる。

$$\frac{\theta^2}{\nu} = 0.0784 / \left(\frac{du_m}{dx} \right)_{x=0} \quad (16)$$

上式を越流比エネルギー E_0 で無次元化すると、次式となる。

$$\frac{\theta}{E} = \left[0.0784 \frac{\nu}{\sqrt{2gE_0^3}} / \left\{ \frac{d(u_m/\sqrt{2gE_0})}{d(x/E_0)} \right\}_{\frac{x}{E_0}=0} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (17)$$

越流頂点における壁面の曲率半径は定め難いので、実際の流れを推測して上流側複合円弧の半径を越流頂点における曲率半径とする。複合円弧部分における境界層外縁の流速は直線的に増加するものとする。この二つの仮定を用いて越流頂点における境界層厚を式 (17) で求める。境界層外縁の流速を、二次元ポテンシャル理論によって得られる壁面より δ だけ高いところの流速で近似し、式 (13) と式 (14) あるいは式 (15) で境界層の発達を計算する。境界層の発達による流速の欠損だけ流量が減少したとして流量係数を求めた結果が Fig. 6 (a), (b) である。

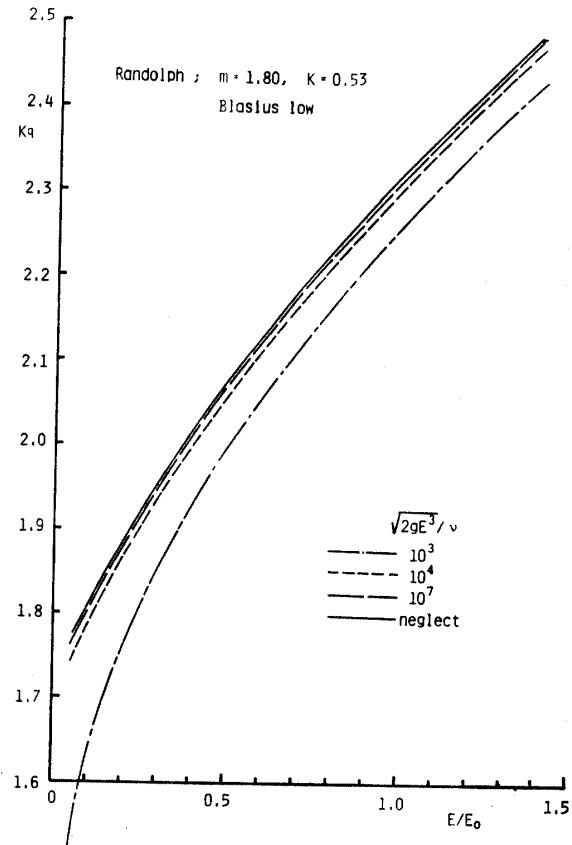


Fig. 6 (a)

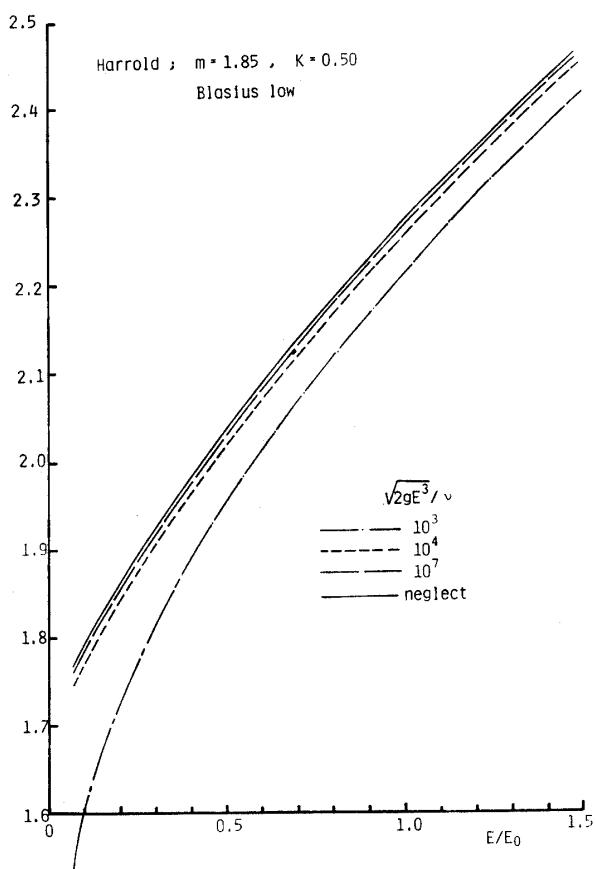


Fig. 6 (a)

Fig. 6(a) Effect of Reynold's number to discharge coefficient.

(b) Effect of Reynold's number to discharge coefficient.

Fig. 6 より、越流頂点における境界層厚さの評価にかなり問題が残されているが、越流比エネルギーを用いたレイノルズ数 $\sqrt{2gE^3}/\nu$ が小さくなると、流量係数の値はかなり小さくなる。この結果は、藤本²⁵⁾が指摘している越流水深が設計越流水深に較べかなり小さくなると流量係数の値が小さくなることと定性的に一致する。越流比エネルギー $E=2 \text{ cm}$ とすると、 $\sqrt{2gE^3}/\nu=1.23 \times 10^4$ である。Fig. 6において、 $\sqrt{2gE^3}/\nu$ の影響が顕著になるのは $\sqrt{2gE^3}/\nu < 10^4$ であって、荒木が指摘した越流水深 2 cm 以下とほぼ一致している。これらの結果から、模型縮尺が大きく、かつ E/E_0 が小さい場合には、模型実験で得られた結果を実物値に換算するのに $\sqrt{2gE^3}/\nu$ による補正が必要である。

Fig. 7 は標準型越流頂の流量係数の各種推定式（岩崎¹¹⁾、土木学会論文集、第43号、pp. 31 より転載）、村・荒木⁵⁾が行なった二次元実験の結果ならび模型実

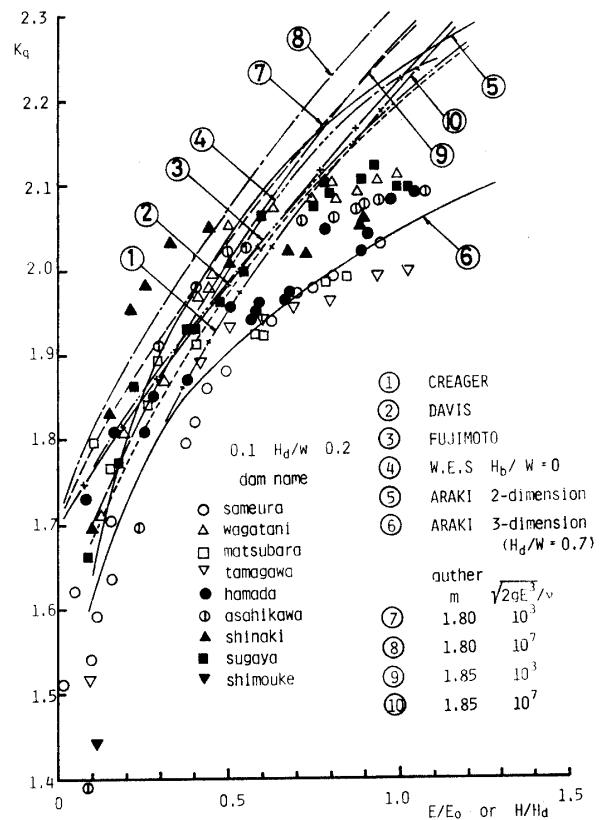


Fig. 7 Discharge coefficient of standard overflow spillways.

験結果（梅原¹⁰⁾ 土木技術資料、14-2、pp. 75 より転載、接近流速が比較的小さいものを選んだ）と著者の計算値と比較したものである。模型装置の次元が明らかでないので、ダム諸元から H_d/W (W ; ダム高) を種々の段階に分けて Fig. 7 と同様に描点した結果、実物と模型の H_d/W とが一致していないことによるものと考えられるが、実験描点の H_d/W による系統的な違いは見出せなかった。

村・荒木が行なった二次元と三次元 ($H_d/B=0.7$) 実験結果をみると、越流水深 H_d と径間巾 B との比、 H_d/B が流量係数に及ぼす影響はきわめて大きい。著者らの提案した計算値が各種推定式による値に較べて若干大きい値となっている。この原因としては、著者らの計算値は無限巾の越流頂、すなわち $H_d/B \rightarrow 0$ に対するものであって、各種推定式にはなんらかの形でもって実験結果が導入されていることと考えられる。

E/E_0 あるいは H/H_d が 1 付近において、各種推定式に較べ実験描点がかなり小さい値となっているが、ダム諸元から H_d/B を求めてみると、 $H_d/B=0.5 \sim 3$ の範囲であって、両者の差は H_d/B の影響によるものと推測される。

6. 越流面圧力

越流面の形状を変えて越流面の圧力分布を計算した結果の一例が Fig. 8 である。図より、 K の値が大きいほど、換言すると越流面の頂点付近 ($x/E < 1$) の形状がやせた形であるほど、越流面上の圧力は低く、最底圧力が発生する位置は上流側（支配断面よりも下流）になっている。この結果は、越流面の形状を決めると、越流水深が大きくなるほど越流面上の最低圧力は越流頂点側に近づき、全体的に越流面上の圧力が低くなることを説明している。

Fig. 9 (a), (b) の圧力分布は山口県の生見ダムならびに荒谷ダムの模型実験結果を計算値とを比較したものである。圧力の測定は外径 2 mm のステンレス管

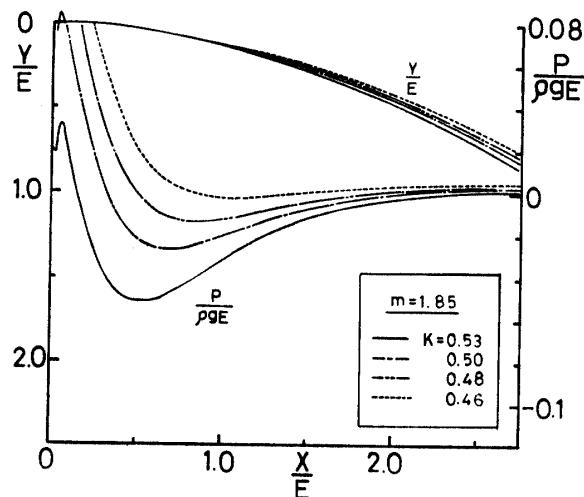


Fig. 8 Pressure distribution on surface of overflow spillways.

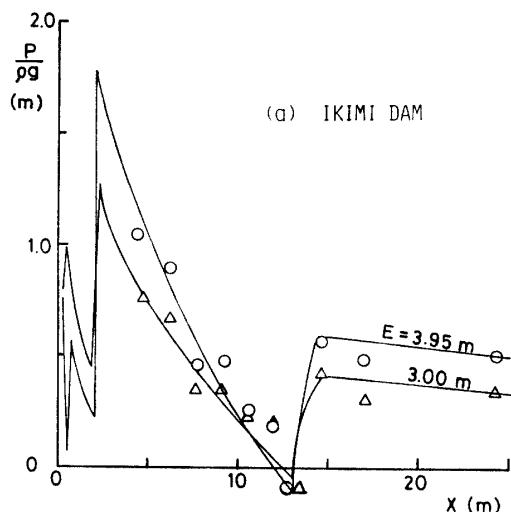


Fig. 9 (a)

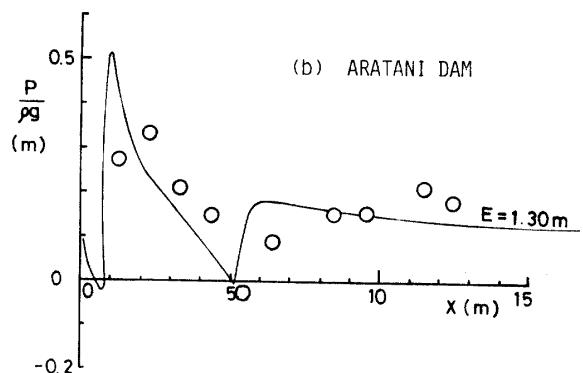


Fig. 9 (b)

Fig. 9 Pressure distribution on surface of overflow spillways.

- (a) IKIMI DAM
- (b) ARATANI DAM

を越流面に裏側から埋め込み、鉛直マノメーターに導いて読みとった。ステンレス管の埋め込み方の微妙な違いによって測定値は変動する。荒谷ダムでは $x=5$ m まで、生見ダムでは $x=13$ m までが曲面であって、その下流は定勾配である。測定精度を考慮すれば、実験描点と測定値の一一致は良好である。

Fig. 10 は越流面上に発生する最底圧力と越流面の形状との関係を図示したものである。越流面の形状を定める K と m の関係が図の $(P/\rho g E_0)_{\min} = 0$ の曲線よりも下側の領域にあれば、越流面上に負圧は発生しない。標準型越流面形状として知られている Randolph ならびに Harrold の形状ではわずかであるが負圧が生じるが、通常の越流比エネルギーの大きさではダム設計基準で定められている -3 m までにはならない。

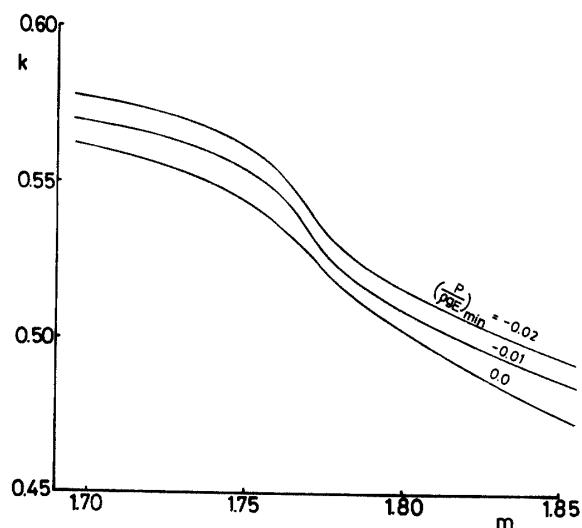


Fig. 10 The value of minimum pressure on surface of overslow spillways.

設計水頭よりも越流水深が大きくなると、最底圧力値は、図の縦軸に平行に上側に K と m の関係が移るので低くなる。

7. 結 語

二次元越流型余水吐の流量係数の一般的表示を導くために、越流流れに関する理論的考察を行ない、越流面の形状と水理量との関係について検討を行なった。主要な結果を列記すると下記のとおりである。

1. 本文で提示した流量係数の決定法は越流面の形状を取込むことができるので、従来から行なわれている標準型とそうでないものとに分けて流量係数を分けて推定する必要がない。

2. 従来、越流流れの支配断面位置は越流頂点であると見なされていたが、越流頂点より下測側であり、越流面の形状 ($x/E_0 < 1$ の範囲) がふくらんだ形であるほど支配断面の位置は下流側である。また、一形状に対して、越流水深が大きくなるほど支配断面の位置は越流頂点に近いところになる。

3. 流量係数は、越流面の形状がとがっているほど大きく、ふくらんだ形であるほど小さい。流量係数の越流水深による変化は、越流面の形状を定める常数 K の値を $K(E/E_0)^{m-1}$ とすることで推定することができる。

4. 越流面に沿って境界層が発達するので、流量係数はレイノルズ数 $\sqrt{2gE_0^3}/\nu$ の影響を受け、 $\sqrt{2gE_0^3}/\nu$ の値が 10^4 以下になると、この影響は無視しえなくなる。したがって模型の縮尺が大きく、越流水深が小さい場合には、模型実験の結果を実寸に換算するのにレイノルズ数 $\sqrt{2gE_0^3}/\nu$ の影響を考慮しなければならない。

5. 越流面上の圧力は、越流頂付近 ($x/E < 1$) の形状がやせているほど低く、ふくらんだ形であるほど圧力の低下は小さい。多くの模型実験結果をみると、本文の計算結果と同様に最底圧力の発生位置が越流頂点より下流側にある場合¹²⁾ と、越流頂点ないしは越流頂点より上流の複合円弧断面にある場合⁵⁾ とがある。越流頂点における曲率半径を上流側の円弧の半経として圧力を計算すると越流頂点で最低圧力が発生する。したがって、越流頂点付近における圧力は上流側複合円弧断面を考慮しなければならない。

以上、得られた結果は、境界線の発達による支配断面の位置が変わることを考慮していない。今後、この点についての検討が必要である。

参 考 文 献

- 1) 岩崎敏夫：土木学会論文集，No. 43 (1957)
- 2) 石井文雄・藤本 成：土木研究所報告，No. 127 (1966)
- 3) 石井文雄・藤本 成：土木研究所報告，No. 130 (1967)
- 4) 藤本 成：土木研究所報告，No. 132 (1967)
- 5) 村 幸雄・荒木正夫：土木研究所報告，No. 93 (1955)
- 6) たとえば、荒木正夫・椿東一郎：水力学演習、上巻、森北 (1962) p. 234
- 7) 小倉金之助・他 3 名：基礎数学ハンドブック、森北 (1964) p. 221
- 8) 土木学会：水理公式集、技報堂 (1971) p. 258
- 9) たとえば、藤本武助：流体力学、養賢堂 (1970) p. 188
- 10) 梅原暉也：土木技術資料，14-2 (1972)
- 11) 藤本 成：土木技術資料，10-2 (1968)
- 12) 永田二生・中川博次・吉竹正致：土木研究所報告，No. 158 (1966)

(昭和55年4月15日 受理)