

の繁雑をさけて、しかも歯形の実態を確実につかむことができる。

3. 総形バイトによる歯形といえども古典的な近似画法はやめて正しいインポリユートとすべきである。これは簡単な器具で容易に実施する

ことができ、しかも工具取付の点検にまで利用することができる。

文 献

山本 倍夫： 歯切仕事

小間隙を有する回轉二重管内の流れについて (1)

山 根 信 太 郎

1. 緒 言

回轉二重管内をとおす流れについては、隙間の小さいばあいは浅沼氏⁽²⁾によつて一応解かれている。

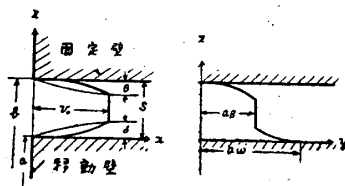
これらの解は隙間内の流れを完全乱流と考え、乱流速度分布を仮定し、カルマンの乱流公式に代入して回轉二重管内の流体摩擦抵抗を層流及び乱流について求めたものであるが、本論文は境界層理論によりカルマンの運動量方程式を用いて流体摩擦抵抗を求めた。この理論を用いば層流から乱流にせぬと思われる附近の実験結果に対してよい一致を与える。しかし境界層内の流れが完全に乱れて来ると、そのままでは運動量方程式が複雑となり容易に解を求めることができなくなるので適当な仮定を用いて流体摩擦抵抗を求めた。そして結果をコルニツシユの実験結果と比較してみた。

2. 層流境界層の場合

回轉数が小さく、この隙間をとおす流れの圧力差が小さい間は境界層内は層流をなしているものと考えられる。

そこでこの層内の速度分布を二次式であらわしカルマン運動量方程式を用いて解を求める。

回轉軸に沿うて発生する境界層の速度分布を次のようにおく。



第 1 図

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0(2 - z/\delta)z/\delta \\ u &= a\omega - a(\omega - \beta)(2 - z/\delta)z/\delta \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし δ ; 境界層の厚さ

β ; 層外の回轉角速度

v_0 ; 層外ポテンシャル流れ速度

z は回轉軸から測るものとする。

運動量方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (a+z)v^2 dz - v_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (a+z)v dz = \\ -a \frac{\tau_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^\delta (a+z) \frac{\partial p}{\partial x} dz \end{aligned} \quad (2.2)$$

運動量モーメント方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (a+z)^2 uv dz - \beta (a+z)^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (a+z)v dz \\ = -\frac{a^2}{\rho} \tau_y \end{aligned} \quad (2.3)$$

これに

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= av_0 \delta \frac{\partial v_0}{\partial x} - a\beta^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \\ \tau_x &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = \mu \frac{2v_0}{\delta} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\tau_y = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{r} \right)_{z=0} = -\mu \frac{2a(\omega - \beta)}{\delta} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\delta (a+z)v^2 dz &= 8/15 \cdot a\delta v_0^2 + \dots \\ \int_0^\delta (a+z)v dz &= 2/3 \cdot av_0 \delta + \dots \\ \int_0^\delta (a+z)^2 uv dz &= a^3 [2\omega/15 + 8\beta/15] \\ &\quad v_0 \delta + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

を代入し同時に

$$v_0 \delta = \theta \quad \bar{x} = x/l$$

とおき \bar{x} を x であらわせば、

$$\frac{21}{15} \theta \delta \frac{d\theta}{dx} - \frac{23}{15} \theta^2 \frac{d\delta}{dx} + 2\nu l \theta + a\beta^2 \delta^3 \frac{d\delta}{dx} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{2}{15} (\omega - \beta) \delta \frac{d\theta}{dx} + 2\nu l (\omega - \beta) = 0 \quad (2.8)$$

これを解くために

$$\theta = x^n (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$

$$\delta = x^p (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

とおき (2.7), (2.8) に代入して最低次の項を等しいように n と p 及び a_0, b_0 を決めると

$$n = 3/5 \quad p = 2/5$$

$$a_0 = 12.3 (l^3 \nu^3 a \beta^2)^{1/5}$$

$$b_0 = -2.04 (l^2 \nu^2 / a \beta^2)^{1/5}$$

故に

$$\delta = -2.04 \left(\frac{l^2 \nu^2}{a \beta^2} \right)^{1/5} x^{2/5} \quad (2.9)$$

$$\theta = 12.3 (l^3 \nu^3 a \beta^2)^{1/5} x^{3/5} \quad (2.10)$$

これより

$$v_0 = \theta / \delta = -6.0 \nu^{1/5} (a \beta^2)^{2/5} x^{1/5} \quad (2.11)$$

そこで x 方向の摩擦力を求めるには、(2.11) を (2.4) に代入すればよい。

$$\tau_x = \mu 2v_0 / \delta = 6\mu \nu^{-1/5} (a \beta^2)^{3/5} x^{-1/5}$$

全摩擦力は

$$\tau_{11} = 2\pi a \int_0^l \tau_x dx = 2\pi a \mu \nu^{-1/5} (a \beta^2)^{3/5} l^{4/5} \times \frac{15}{2} \quad (2.12)$$

固定壁に沿う境界層の速度分布は次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 (2 - z/\theta) z/\theta \\ u &= b\beta (2 - z/\theta) z/\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

θ ; 境界層の厚さ

z は固定壁より測るものとする。

運動量方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\theta (b-z) v^2 dz - v_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\theta (b-z) v dz = -a \frac{\tau_x}{\rho} - \frac{1}{\rho} \int_0^\theta (b-z) \frac{\partial p}{\partial x} dz \quad (2.14)$$

運動量モーメント方程式

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\theta (b-z)^2 u v dz - \beta (b-\theta)^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\theta (b-z) v dz = -b^2 \frac{\tau_y}{\rho} \quad (2.15)$$

$$\tau_x = 2\mu v_0 / \theta$$

$$\tau_{y2} = 2\mu b \beta / \theta$$

$$\int_0^\theta (b-z) v^2 dz = 8/15 b \theta v^2 + \dots$$

$$\int_0^\theta (b-z) v dz = 2/3 b \theta v_0 + \dots$$

$$\int_0^\theta (b-z)^2 u v dz = 8/15 b^3 \beta v_0 \theta + \dots$$

$$\text{圧力分布は} \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = b v_0 \theta \frac{\partial v_0}{\partial x} - b \beta^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

これらの式を (2.14) (2.15) に代入すれば

$$\frac{21}{15} \theta_1 \theta_1' \theta - \frac{23}{15} \theta_1^2 \theta_1' + 2\nu \theta_1 l + b \beta^2 \theta^3 \theta_1' = 0 \quad (2.16)$$

$$\theta_1' \theta = 15\nu \quad (2.17)$$

ただし $x = \bar{x} = \frac{x}{l}$ $\theta' = v_0 \theta$ とする。

回転軸に沿うばあいと同様にこれをとけば

$$\theta_1 = 12.3 (l^3 \nu^3 b \beta^2)^{1/5} x^{3/5} \quad (2.18)$$

$$\theta = -2.04 \left(\frac{l^2 \nu^2}{b \beta^2} \right)^{1/5} x^{2/5} \quad (2.19)$$

を求めると

$$\tau_{12} = \int_0^l \tau_x dx \times 2\pi b = 2\pi b \cdot \frac{15}{2} \nu^{-1/5} l^{4/5} (b \beta^2)^{3/5} \mu \quad (2.20)$$

全摩擦力 τ_e は $a=b$ とすれば

$$\begin{aligned} \tau_e &= \tau_{11} + \tau_{12} = 2\pi a \frac{15}{2} \nu^{-1/5} l^{4/5} (a \beta^2)^{3/5} \mu + \\ &2\pi b \frac{15}{2} \nu^{-1/5} l^{4/5} (b \beta^2)^{3/5} \mu = 15 \cdot 2\pi a \nu^{-1/5} \\ &\times (a \beta^2)^{3/5} l^{4/5} \mu \end{aligned} \quad (2.21)$$

圧力と摩擦力は釣合うものであるから

$$\begin{aligned} 2\pi a p (b-a) &= \tau_e = 2\pi a \cdot 15 \nu^{-1/5} l^{4/5} (a \beta^2)^{3/5} \\ b-a &= s \quad \text{とおけば} \\ ghs &= 15 \nu^{4/5} (a \beta^2)^{3/5} l^{4/5} \end{aligned} \quad (2.22)$$

摩擦係数を求めるために、この隙間を通る平均速度を \bar{v} とし、 $\bar{v}^2 l$ で (2.22) の両辺を除すと

$$\frac{ghs}{\bar{v}^2 l} = \frac{15 \nu^{4/5} (a \beta^2)^{3/5}}{\bar{v}^2 l^{1/5}} \quad (2.23)$$

β と ω との関係を求めるために回転方向の摩擦力を求める。

$$\tau_{y1} = -\mu \frac{2a(\omega - \beta)}{\delta} = \mu a (\omega - \beta) \left(\frac{a \beta^2}{\nu^2} \right)^{1/5} x^{-2/5} \quad (2.24)$$

$$\tau_{y2} = -\mu \frac{2b\beta}{\theta} = \mu b \beta \left(\frac{b \beta^2}{\nu^2} \right)^{1/5} x^{-2/5}$$

$$\therefore \tau_{ly1} = \int_0^1 \tau_{y1} dx \times 2\pi a = 2\pi a \frac{5}{3} a (\omega - \beta) \left(\frac{a\beta^2}{\nu^2} \right)^{1/5} l^{3/5}$$

$$\tau_{y'2} = 2\pi b \int_0^1 \tau_{y2} dx = 2\pi b \frac{5}{3} b \beta \left(\frac{b\beta^2}{\nu^2} \right)^{1/5} l^{3/5}$$

回転壁面の摩擦力と固定壁面上摩擦力とは釣合うから

$$\tau_{ly1} = \tau_{ly2}$$

$$(\omega - \beta)a^{1/5} = \beta b^{1/5}$$

$a = b$ とすれば

$$\omega / \beta = 2 \tag{2.25}$$

これを用いて (2.23) を変形すれば

$$\frac{ghs}{\nu^2 l} = 15 \frac{\nu^{4/5}}{\nu^{4/5} l^{1/5} a^{3/5}} \left(0.25 \frac{\omega a^2}{\nu^2} \right)^{3/5} \tag{2.26}$$

$R = \bar{v}l/\nu$ とおけば

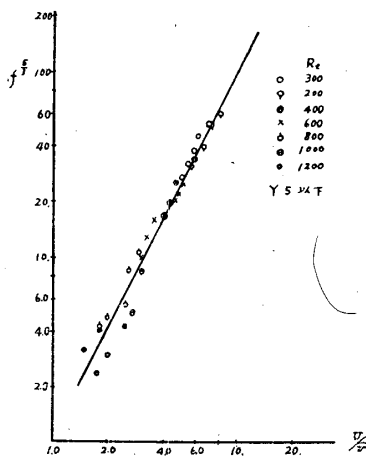
$$\frac{ghs}{\nu^2 l} = 15 R^{-4/5} \left(\frac{l}{a} \right)^{3/5} \left(0.25 \frac{\omega a^2}{\nu^2} \right)^{3/5} \tag{2.27}$$

ユルニツシユの実験結果のカーブの急変する部分 $Y=5$ 以下、 $l/S=7.6$ ととれば

$$f = 4 \left[\frac{R^{4/5}}{15} \frac{ghS}{\nu^2 l} \left(\frac{a}{l} \right)^{3/5} \right]$$

とし縦軸に $f^{3/5}$ を横軸に $U/\bar{v} = \omega a/\nu$ をとれば第2図のように

レイノルズ数 R_e が小さい範囲ではきわめてよい一致を示し $R_e=1000$ をこえるに従って、やや違いがでて来る。これはここでは R_e が大きくすでに境界層内の速度分布が乱流になりつつあることを示すものであろう。



第2図 f と U/\bar{v} との関係

3. 亂流境界層の場合

亂流境界層においては速度分布を次のようにおく。

移動壁 ;

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 [2(z/\delta)^{1/6} - 1] (z/\delta)^{1/6} \\ u &= a (\omega - \beta) [2(z/\delta)^{1/6} + a\beta] \end{aligned} \right\} \tag{3.1}$$

固定壁 ;

$$\left. \begin{aligned} v &= v_0 [2(z/\theta)^{1/6} - 1] (z/\theta)^{1/6} \\ u &= b\beta (z/\theta)^{1/6} \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

カルマンの運動量方程式及び運動量モーメント方程式は (2.2) (2.3), (2.14) (2.15) と同一である。

ただし

$$\tau_{x1} = 0.0225\rho(\nu/\delta)^{1/4} v_0^2 [v_0^2 + a^2(\omega - \beta)^2]^{3/8} \tag{3.3}$$

$$\tau_{y1} = 0.0225\rho(\nu/\delta)^{1/4} a(\omega - \beta) [v_0^2 + a^2(\omega - \beta)^2]^{3/8} \tag{3.4}$$

及び

$$\tau_{x2} = 0.0225\rho(\nu/\theta)^{1/4} v_0 [v_0^2 + b\beta^2]^{3/8} \tag{3.5}$$

$$\tau_{y2} = 0.0225\rho(\nu/\theta)^{1/4} b\beta [v_0^2 + b\beta^2]^{3/8} \tag{3.6}$$

然るにこれらの摩擦力公式を運動量方程式に代入して解くことはきわめて解を複雑なものにする。そこで大ざっぱな仮定ではあるが v_0 を x に関して変らないものとして境界層の厚さ δ を求め、この δ をもとにして摩擦力 τ を求めてみた。もとよりこの仮定は乱暴なものであるが隙間 S と長さ l との比 l/S が小さい間は v_0 もあまり変ることなく実際と大きく違わないものと思われる。そこで l/S の小さいばあいにつき流体摩擦抵抗数を求め実験結果と比較してみた。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\delta (a+z)v^2 dz &= 0.48av_0^2\delta + 0.33v_0^2\delta^2 \\ \int_0^\delta (a+z)v dz &= 0.64av_0\delta + 0.4v_0\delta^2 \end{aligned} \right\} \tag{3.7}$$

δ^2 は小さいから省略して δ のみを取り上式を代入すれば

$$\begin{aligned} -0.16av_0^2 \frac{d\delta}{dz} &= a^2\beta^2 \delta \frac{d\delta}{dz} - 0.0225 \left(\frac{\nu}{\delta} \right)^{1/4} v_0 \\ &\times [v_0^2 + a^2(\omega - \beta)^2]^{3/8} \cdot a \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\delta^{1/4} = \Delta \quad x = \frac{x}{l} \quad \text{とおいて、無次元}$$

化すれば

$$\begin{aligned} 0.64v_0^2 \Delta^4 \Delta' + 4a^2\beta^2 \Delta^3 \Delta' - 0.0225\nu^{1/4} v_0 \\ \times [v_0^2 + a^2(\omega - \beta)^2]^{3/8} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\Delta = C_0 x^p + C_1 x^{p+1} + \dots$$

とて上式を解けば $p = \frac{1}{5}$

$$\delta^{1/4} = \Delta = 0.59\nu^{1/20}v_0^{-1/5}[v_0^2 + a^2(\omega - \beta)^2]^{3/40}$$

$$\times l^{1/5}x^{1/5} = 0.59\nu^{1/20}v_0^{-1/5}[v_0^2 + a^2(\omega - \beta)^2]^{3/40} x^{5/1} \quad (3.10)$$

$$\therefore \delta = 0.12\left(\frac{\nu}{v_0}\right)^{1/5} \left[1 + \frac{a^2(\omega - \beta)^2}{v_0^2}\right]^{3/10} x^{4/5} \quad (3.11)$$

δ を(3.3)に代入すれば

$$\tau_x = 0.038\rho\nu^{5/1}v_0^{5/9} \left[1 + \frac{a^2(\omega - \beta)^2}{v_0^2}\right]^{3/10} x^{-1/5}$$

摩擦力を円筒全面にわたって求めるには

$$\tau_l = 2\pi a \int_0^l \tau_x dx = 2\pi a \left[0.0475\rho\nu^{1/5}v_0^{5/9} \left\{1 + \frac{a^2(\omega - \beta)^2}{v_0^2}\right\}^{3/10}\right] l^{4/5} \quad (3.12)$$

固定壁面上の摩擦力 τ_x^* も同様にして

$$\theta = 0.12\left(\frac{\nu}{v_0}\right)^{1/5} \left[1 + \frac{b^2\beta^2}{v_0^2}\right]^{3/10} x^{4/5} \quad (3.13)$$

$$\tau_x^* = 0.0475\rho\nu^{1/5}v_0^{5/9} \left[1 + \frac{b^2\beta^2}{v_0^2}\right]^{3/10} x^{-1/5} \quad (3.14)$$

$$\tau_l^* = 2\pi b \int_0^l \tau_x^* dx = 2\pi b \left[0.0475\rho\nu^{1/5}v_0^{5/9} \left\{1 + \frac{b^2\beta^2}{v_0^2}\right\}^{3/10}\right] l^{4/5} \quad (3.15)$$

摩擦力と圧力との釣合より

$$\tau_l + \tau_l^* = p2\pi a(b-a) \quad (3.16)$$

$b-a=s$ とし $2\pi a = 2\pi b$ とすれば

$$ghs = 0.0475\nu^{1/5}v_0^{5/9} \left\{ \left[1 + \frac{a^2(\omega - \beta)^2}{v_0^2}\right]^{3/10} + \left[1 + \frac{b^2\beta^2}{v_0^2}\right]^{3/10} \right\} \quad (3.17)$$

さてこれを計算するばあい前節と同様にして ω と β との関係を求めねばならない。前と同様の方法により(3.10)を(3.10)に代入し

$$\tau_{ly} = 2\pi a 0.0475\nu^{5/1}v_0^{4/5}\rho \left\{1 + \frac{a^2(\omega - \beta)^2}{v_0^2}\right\}^{3/10}$$

$$a(\omega - \beta)l^{4/5} \quad (3.18)$$

$$\tau_{yl}^* = 2\pi b 0.0475\nu^{1/5}v_0^{4/5}\rho \left\{1 + \frac{b^2\beta^2}{v_0^2}\right\}^{3/10}$$

$$\times b\beta l^{4/5} \quad (3.19)$$

中心に関するモーメントを考えれば

$$a\tau_{ly} = b\tau_{yl}^*$$

故に

$$(\omega - \beta) \left[1 + \frac{a^2(\omega - \beta)^2}{v_0^2}\right]^{3/10} = \beta \left[1 + \frac{b^2\beta^2}{v_0^2}\right]^{3/10} \quad (3.20)$$

(3.20) は $\omega/\beta = 2$ で満足させられる。故にこれを(3.17)に入れば

$$ghS = 0.095\nu^{1/5}v_0^{5/9} \left[1 + 0.25\frac{a^2\omega^2}{v_0^2}\right]^{3/10} l^{4/5} \quad (3.21)$$

$R = v_0 l / \nu$ とすれば両辺を $v_0^2 l$ で除して

$$\frac{ghS}{v_0^2 l} = 0.095R^{-1/5} \left[1 + 0.25\frac{a^2\omega^2}{v_0^2}\right]^{3/10} \quad (3.22)$$

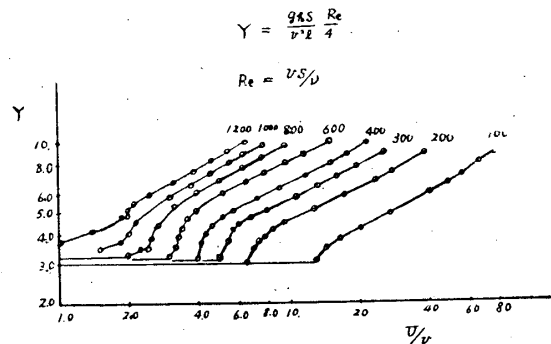
$Re = v_0 s / \nu$ とすれば $U = \omega a$ として摩擦係数を次のように表わすこともできる。

$$\frac{ghS}{v_0^2 l} = \frac{0.095}{5\sqrt{Re}} \left(\frac{S}{l}\right)^{1/5} \left[1 + 0.25\left(\frac{U}{v_0}\right)^2\right]^{3/10} \quad (3.23)$$

又は

$$\lambda = \frac{0.395}{\sqrt{Re}} \left(\frac{S}{l}\right)^{1/5} \left[1 + 0.25\frac{U^2}{v_0^2}\right]^{3/10} \quad (3.24)$$

流体摩擦係数は(3.24)で得られるのであるがこの式をみるに λ は Re , $\frac{U}{v_0}$ のかん数のみならず s/l のかん数となつてゐる。しかしこれは境界層の十分発達しない間、即ち v_0 の変化が大きい値でない範囲であらねばならぬ。コルニツシュの実験結果(第3図)より $Y = 5$ 以上の値にた



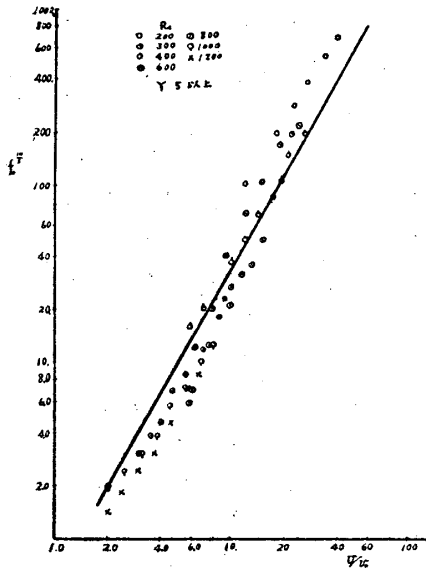
第3図 コルニツシュの実験

いし $l/S = 4$ とつて

$$\frac{ghS}{v_0^2 l} \frac{Re^{1/5}}{0.095} \left(\frac{l}{S}\right)^{1/5} = f_0$$

を求め、 $f_0^{10/3}$ を縦軸に U/v_0 を横軸にとつて点を求めれば第4図のようになる。図よりみれば $v_0 = C = v$ としたにもかかわらず傾向は大体でている。ただ傾きが実験結果と完全に一致せずレ

レイノルズ数の小さいはんいでは点が理論線の上に、レイノルズ数の大きいはんいでは理論線よりも下に來ているがこれはやむを得ない結果である。



第4図 f_0 と U/v_0 との関係

4. 結 言

内半径 a , 外半径 b なる回転二重管において、内半径軸が ω で回転しているばあいの軸方向の流体摩擦抵抗を層流境界層、乱流境界層、にわけて考察したが層流境界層ではカルマンの運動

量方程式を v_0, δ , 共に x のかん数として解き摩擦係数として次のような式を得た。

$$\frac{ghs}{v^2 l} = \frac{6.51}{Re^{4/5}} \left(\frac{s}{l}\right)^{1/5} \left(\frac{s}{a}\right)^{3/5} \left(\frac{U^2}{v^2}\right)^{3/5}$$

そしてこれをコルニツシユの実験結果に比較して、レイノルズ数 Re の小さいはんいでは理論と実験はきわめてよい一致をみる事がわかつた。又乱流境界層においては $v_0 = \bar{v} = C$ とし δ を x のかん数として摩擦係数を求めた結果

$$\frac{ghs}{v^2 l} = \frac{0.095}{Re^{1/5}} (s/l)^{1/5} \left[1 + 0.25 \left(\frac{U}{v}\right)^2\right]^{3/10}$$

なる式を得たが、これもコルニツシユの実験に比較し仮定の大たんなわりにより一致を示すことを知つた。 v_0 を x について変化するものとするばさらにより一致をみるであろうと考えられる。

- 註 (1) 昭和29年3月5日機械学会九州支部総会講演会において講演
- (2) 機械学会論文集第17巻第66号140頁

材料試験機の精度に就いて

松 井 時 治

I 緒 言

各種の材料試験機は製作後製造家に依る精密なる荷重比較試験を行つた上国立試験所の厳格なる検量試験の検定を受けたものであつて使用期間の短いものは先づ其の精度は信用出来る。然し長期間使用していると機械そのものには何等破損又は外傷など生じていないのに相当の狂いを生じていることがある。是を良く考察して見ると試験機の機構上廻転部とか或る角度軸が滑動する部分其他の軸受部等が含まれているが此等の箇所に於ける摩擦抵抗が僅かであるが其の状態に変化するものであつて或るものは軸承部やリンクの継手部など錆を生じて締め過ぎの状態にあるものや反対に極端にガタがあることがあり又は荷重表示指針に作用するラック(押棒)の先端が其の接触面との摩擦抵抗のため滑かに動かないことなどがあつて機械に狂いを生

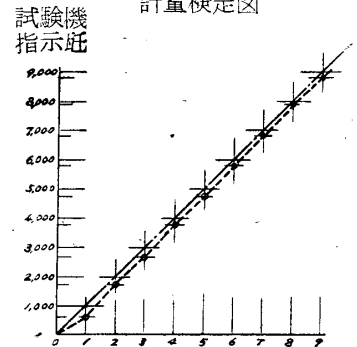
ずる原因となるものであろう。

II 検 定 例

一例として当工学部内にある二・三種の材料試験機に就いて調べた結果は次の三つの図に示す通りであつた。

図は総て横軸に検定器による正しい噸数を取り其の時の試験機の指示噸数を縦軸にとつたものである。第1図を見ると誤差は僅かであり殆んど一定してい

100吨アムスラー式万能試験機 計量検定図



第1図 検定器噸数 試験機の計量誤差を測つたもの