

図5 tangent-Dプロット

であるべきで $\nu=0.01$ としたのであるから、

$$Re = \frac{\nu D}{0.01} \text{ として代入すると}$$

$$k = (622 - 3.25D) \frac{D^{0.34}}{V^{1.29}} (1+N)^{1.5+0.643D}$$

D: 管径 cm V: 平均流速 cm/sec

N: 小数で表はした濃度

となる。レーノルツ数を使はず始めから V, D, N, とおとの関係を求めて行つても上式と相似た結果が得られた。

3. 吟味

計算値と実測値とを比較すると図6の如くである。

30インチ管の場合は大体両者が一致して居り1インチ管は大きすぎる値を與え、4インチ管

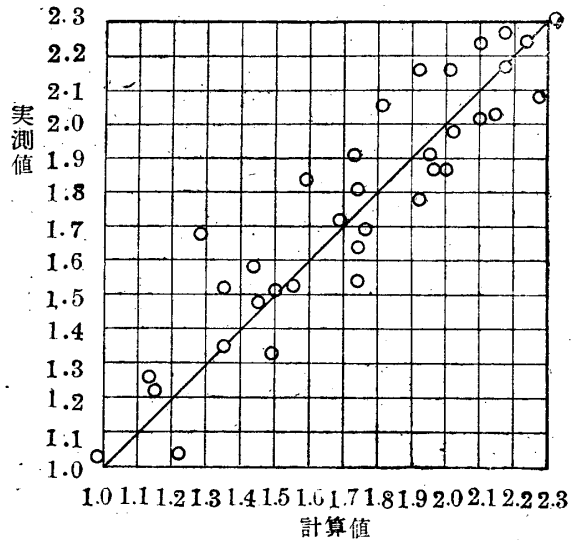


図6 k 値の検討

は少し小さい値を與える。これらは常数項の操作によつて加減することができる。

以上は一つの試みであつて、さらに充分な資料によつて検討されるべきである。ただ全く經驗的に想定するのに対して幾分なりとも計算的に推定する方法が考えられる事を述べたものである。(科学研究費による) 文献は第一報に同じ。

軌條應力算定に關する一考察

最上 幸夫

1. 緒言

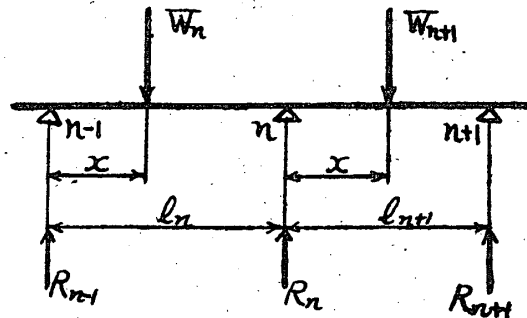
軌條応力計算法としては従来弾性床上の無限桁としての解法と枕木間隔比較的大なる場合は支点沈下を考慮した連続梁としての解法があり、いづれも静力学的に解き衝撃係数を乗じて所要の応力を求めている。これに対して近來各方面で動力学の立場から応力を求めんとする理論的ならびに實驗的研究が行われている。弾性床上の桁と考へた軌條に動力学の考察を加へたものには後藤氏の研究⁽¹⁾がある。

ところでわが国の如く枕木間隔の比較的大なる場合連続桁として取扱うのが適當のように思われるので著者はこのような連続桁に対し動力学的な取扱いを行つて見た。しかし誘導された結

果は嚴密な数学的解法ができないのでこれから略算的に近似解を求めた。

2. 基本算式

連続梁に動荷重が作用する場合の取扱いについて筆者が行つた結果は以下述べる通りであ



第1図

る。
いま連続梁の一部をとりだし(第1図)n支
の左右スパン上に荷重 W_n, W_{n+1} のみがあるも
のと考えれば静的釣合いの関係から次式が成立
する。

$$R_n = K y_n = R_{n,n} + R_{n,n+1} - (2M_n - M_{n-1} - M_{n+1})/l \quad (1)$$

$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = 6EI/l^2(2y_n - y_{n-1} - y_{n+1}) - W_n(x - x^3/l) - W_{n+1}(2x - 3x^2/l + x^3/l^2) \quad (2)$$

ここに

M_{n-1}, M_n, M_{n+1} ……はそれぞれ支点 $n-1, n, n+1$ ……のモーメント

$$6EI/Kl^3 M_{n+2} + (1 - 4 \cdot 6EI/Kl^3) M_{n+1} + (4 + 6 \cdot 6EI/Kl^3) M_n + (1 - 4 \cdot 6EI/Kl^3) M_{n-1} + 6EI/Kl^3 M_{n-2} = 6EI/Kl^2 \{ 2(R_{n,n} + R_{n,n+1}) - R_{n-1,n} - R_{n+1,n+1} \} - W_n(x - x^3/l^2) - W_{n+1}(2x - 3x^2/l + x^3/l^2) \quad (3)$$

上式を連続桁における静的5連モーメントの定理と呼ぶことにする。

次に動荷重が作用する場合は慣性力の影響を

$$(6EI/Kl^3 + 9/20 \cdot \rho Al/K \cdot P^2 + 1/36 \cdot \rho^2 A^2 l^5 / 6EIK \cdot P^4) \bar{M}_{n-2} + \{ 1 - 24EI/6Kl^3 + (1/12 \cdot \rho Al^4 / 6EI + 2/3 \cdot \rho Al/K) P^2 + 1/18 \cdot \rho^2 A^2 l^5 / 6EIK \cdot P^4 \} \bar{M}_{n-1} + \{ 4 + 36EI/Kl^3 + (1/3 \cdot \rho Al^4 / 6EI - 67/30 \cdot \rho Al/K) P^2 - 1/6 \cdot \rho^2 A^2 l^5 / 6EIK \cdot P^4 \} \bar{M}_n + \{ 1 - 24EI/Kl^3 + (1/12 \cdot \rho Al^4 / 6EI + 2/3 \cdot \rho Al/K) P^2 + 1/18 \cdot \rho^2 A^2 l^5 / 6EIK \cdot P^4 \} \bar{M}_{n+1} + (6EI/Kl^3 + 9/20 \cdot \rho Al/K \cdot P^2 + 1/36 \cdot \rho^2 A^2 l^5 / 6EIK \cdot P^4) \bar{M}_{n+2} = 6EI/Kl^2 \{ 2(\bar{R}_{n,n} + \bar{R}_{n,n+1}) - \bar{R}_{n-1,n} - \bar{R}_{n+1,n+1} \} + \rho Al/3K(2\bar{K}_n - \bar{K}_{n-1} - \bar{K}_{n+1}) - \bar{H}_n = F(P) \quad (4)$$

ここに

$$H_n = W_n(x - x^3/l^2) + W_{n+1}(2x - 3x^2/l + x^3/l^2) = W_n \{ (x_0 + Vt) - (x_0 + Vt)^3/l^2 \} + W_{n+1} \{ 2(x_0 + Vt) - 3(x_0 + Vt)^2/l + (x_0 + Vt)^3/l^2 \}$$

$$K_n = \frac{\partial^2 H_n}{\partial t^2} = -W_n \cdot 6V^2(x_0 + Vt)/l^2 + W_{n+1} \{ -6V^2/l + 6V^2(x_0 + Vt)/l^2 \}$$

x_0 は荷重の移動始点の位置を表わす。また

$$R_n = R_{n,n} + R_{n,n+1} - (2M_n - M_{n-1} - M_{n+1})/l + \rho Al^3/18EI \left[\frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + 1/12 \cdot \rho Al^4/6EI \cdot \frac{\partial^4 M_{n-1}}{\partial t^4} + 4 \left(\frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + 1/12 \cdot \rho Al^4/6EI \cdot \frac{\partial^4 M_n}{\partial t^4} \right) + \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} + 1/12 \cdot \rho Al^4/6EI \cdot \frac{\partial^4 M_{n+1}}{\partial t^4} + K_n \right] + 7/60 \cdot 9Al^3/6EI \left(\frac{\partial^2 M_{n-1}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 M_n}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_{n+1}}{\partial t^2} \right) \quad (5)$$

(4)式を連続桁における動的5連モーメントの定理と呼ぶことにする。

しかしこの式は左辺に演算子の P を含んでいるたわ厳密に解くことはできない。従つて上式を利用して略算的に近似解を求めるのである。その要領を以下の計算例によつて具体的に示すことにする。

R_{n-1}, R_n, R_{n+1} ……はそれぞれ支点 $n-1, n, n+1$ ……の反力

y_{n-1}, y_n, y_{n+1} ……は支点 $n-1, n, n+1$ ……に生ずる沈下量

$R_{n,n}, R_{n,n+1}$ ……は $n, n+1$ ……番スパン上の荷重によつて n 支点到に生ずる反力

K ……軌道の反力係数, E ……レールヤング率

I ……レール断面二次モーメント

L ……枕木間隔(各スパン等間隔とする。)

(1)から y_n, y_{n-1}, \dots などを求めて(2)の右辺に代入整理すると

考慮して上式にかなり複雑な附加項を生じ演算子を用いて表わすと次の如くなる。

3. 計算例

計算例として次の Data が與えられたものとする。

$$W = 7.5t, E = 2100000 \text{ kg/cm}^2, 9g = 0.00785$$

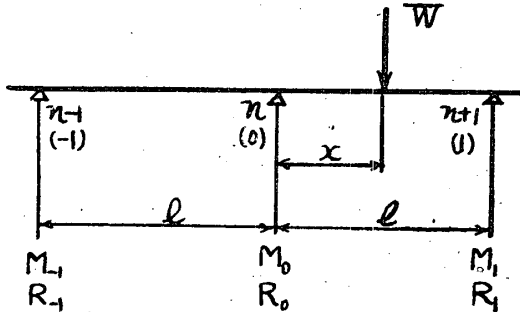
$$\text{kg/cm}^3, K = 17000 \text{ kg/cm}, V = 20 \text{ m/sec},$$

$$l = 75 \text{ cm}$$

$$L = 50 \text{ kg} (I = 1744 \text{ cm}^4, A = 64.33 \text{ cm}^2)$$

與えられた数値を(4)に代入すると

$$(3.069 + 1.024 \times 10^{-6} P^2 + 46.8 \times 10^{-14} P^4) \bar{M}_{n-2} + (-11.276 + 1.58 \times 10^{-6} P^2 + 93.6 \times 10^{-14} P^4) \bar{M}_{n-1} + (22.414 + 4.833 \times 10^{-6} P^2 - 280.8 \times 10^{-14} P^4) \bar{M}_n + (-11.276 + 1.58 \times 10^{-6} P^2 + 93.6 \times 10^{-14} P^4) \bar{M}_{n+1} + (3.069 + 1.024 \times 10^{-6} P^2 + 46.8 \times 10^{-14} P^4) \bar{M}_{n+2} = F(P) \quad (6)$$



第 2 図

この式で動荷重は $n, n+1$ 支点間にのみある場

$$\begin{aligned} & \bar{M}_{n-2} + (-11.276 + 1.58 \times 10^{-6} P^2) / (3.069 + 1.024 \times 10^{-6} P^2) \bar{M}_{n-1} \\ & + (22.414 + 4.833 \times 10^{-6} P^2) / (3.069 + 1.024 \times 10^{-6} P^2) \bar{M}_n \\ & + (-11.276 + 1.58 \times 10^{-6} P^2) / (3.069 + 1.024 \times 10^{-6} P^2) \bar{M}_{n+1} + \bar{M}_{n+2} \\ & = F(P) / (3.069 + 1.024 \times 10^{-6} P^2) \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式でもこのまゝでは解けないから、更に近似的に左辺の P^2 の項が常数に比しその影響が

$$\bar{M}_{n-2} - 3.675 \bar{M}_{n-1} + 7.308 \bar{M}_n - 3.675 \bar{M}_{n+1} + \bar{M}_{n+2} = 1/3.069 \cdot F(P) / (1 + \beta^2 P^2) \quad (8)$$

ただし $\beta = 0.577 \times 10^{-3}$ (9)

略算的に上式のように表わすと定差法の理論によつて解くことができる。

(8)式の左辺=0の一般解を求めるための附属方程式は

$$\bar{M}_n = \rho_1^n (A \cos n\varphi_1 + B \sin n\varphi_1) + \rho_2^n (C \cos n\varphi_2 + D \sin n\varphi_2) \quad (10)$$

となる。こゝに

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= 0.434, \quad \tan \varphi_1 = 0.8539 \\ \rho_2 &= 2.307, \quad \tan \varphi_2 = 0.8539 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

こゝで $n = \infty, \bar{M}_n = 0; n = -\infty, \bar{M}_n = 0$ の条件を用いると

$$\left. \begin{aligned} n \geq 1 \text{ で } \bar{M}_n &= \rho_1^n (A \cos n\varphi_1 + B \sin n\varphi_1) \\ n \leq 0 \text{ で } \bar{M}_n &= \rho_2^n (C \cos n\varphi_2 + D \sin n\varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

この常数 A, B, C, D をきめる条件式として次の4式を用いる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{n-3} - 3.675 \bar{M}_{n-2} + 7.308 \bar{M}_{n-1} - 3.675 \bar{M}_n + \bar{M}_{n+1} &= 0 \\ \bar{M}_{n-2} - 3.675 \bar{M}_{n-1} + 7.308 \bar{M}_n - 3.675 \bar{M}_{n+1} + \bar{M}_{n+2} &= f(P) \\ \bar{M}_{n-1} - 3.675 \bar{M}_n + 7.308 \bar{M}_{n+1} - 3.675 \bar{M}_{n+2} + \bar{M}_{n+3} &= g(P) \\ \bar{M}_n - 3.675 \bar{M}_{n+1} + 7.308 \bar{M}_{n+2} - 3.675 \bar{M}_{n+3} + \bar{M}_{n+4} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(13)式で $n = 0$ とおき (12) を代入して A, B, C, D を求めると

$$\left. \begin{aligned} A &= 0.257f + 0.130g, \quad B = 0.156f + 0.671g \\ C &= 0.256f + 0.125g, \quad D = -0.158f + 0.035g \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

従つて

合を考慮する。(第2図)

他の荷重に対しても同様の方法で計算し近似的に加算すれば所要点のモーメントが得られる。

(6)式は厳密には解けないので上式を利用して略算的に動荷重の影響をしらべる。

さて(6)式左辺の P^2, P^4 の係数は常数に比し著しく小さく P^4 の項は P^2 の項より更に小さいから近似的には P^4 の項を無視しても大過ないものと考えられる。従て P^4 の項を省略すると

小さいものと考えと

$$f(t) = t^4 - 3.675t^3 + 7.308t^2 - 3.675t + 1 = 0$$

この4根を Ferrari の方法で求めると

$$t_{1,2} = 0.291 \pm 0.322i, \quad t_{3,4} = 1.547 \pm 1.712i$$

従つて一般解は

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_0 &= C = 0.256f + 0.125g \\ \bar{M}_{-1} &= \rho_2^{-1}(C \cos \varphi_2 - D \sin \varphi_2) = 0.125f + 0.025g \\ \bar{M}_1 &= \rho_1(A \cos \varphi_1 + B \sin \varphi_1) = 0.125f + 0.254g \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ところで0-1スパン上に一荷重Wがある場合0支点より移動始点までの距離を x_0 とすれば

$$\begin{aligned} f(P) &= W/3.069 \cdot 1/(1 + \beta^2 P^2) [6EI/kI^2 \{ (2 - 3x_0/l) - 3V/l \cdot 1/P \} - \{ (2x_0 - 3x_0^2/l + x_0^3/l^2) \\ &\quad + (2V - 6x_0V/l + 3x_0^2V/l^2) 1/P + (3x_0V^2/l^2 - 3V^2/l) 2/P + V^3/l^2 \cdot 6/P^3 \}] \\ g(P) &= W/3.069 \cdot 1/(1 + \beta^2 P^2) [6EI/kI^2 \{ (3x_0/l - 1) + 3V/l \cdot 1/P \} - \{ (x_0 - x_0^3/l^2) \\ &\quad + (V - 3x_0^2V/l^2) 1/P - 3x_0V^2/l^2 \cdot 2P^2 - V^3/l^2 \cdot 6/P^3 \}] \end{aligned} \quad (16)$$

(16)を(15)に代入して整理すれば

$$\begin{aligned} \bar{M}_0 &= W/3.069 \cdot 1/(1 + \beta^2 P^2) [6EI/kI^2 (0.387 - 0.393x_0/l - 0.393V/l \cdot 1/P) - \{ (0.637x_0 \\ &\quad - 0.768x_0^2/l + 0.131x_0^3/l^2) + (0.637V - 1.536V/l \cdot x_0 + 0.393V/l^2 \cdot x_0^2) 1/P \\ &\quad + (0.393x_0V^2/l^2 - 0.768V^2/l) 2/P^2 + 0.131V^3/l^2 \cdot 6/P^3 \}] \\ \bar{M}_{-1} &= W/3.069 \cdot 1/(1 + \beta^2 P^2) [6EI/kI^2 (0.225 - 0.3x_0/l - 0.3V/l \cdot 1/P) - \{ (0.275x_0 - 0.375x_0^2/l \\ &\quad + 0.1x_0^3/l^2) + (0.275V - 0.75x_0V/l + 0.3x_0^2V/l^2) 1/P + (0.3x_0V^2/l^2 - 0.375V^2/l) 2/P^2 \\ &\quad + 0.1V^3/l^2 \cdot 6/P^3 \}] \\ \bar{M}_1 &= W/3.069 \cdot 1/(1 + \beta^2 P^2) [6EI/kI^2 (-0.004 + 0.387x_0/l + 0.387V/l \cdot 1/P) - \{ (0.504x_0 \\ &\quad - 0.375x_0^2/l - 0.129x_0^3/l^2) + (0.504V - 0.75x_0V/l - 0.387x_0^2V/l^2) 1/P + (-0.387x_0V^2/l^2 \\ &\quad - 0.375V^2/l) 2/P^2 - 0.129V^3/l^2 \cdot 6/P^3 \}] \end{aligned}$$

以上の $\bar{M}_0, \bar{M}_{-1}, \bar{M}_1$ を逆変換して表領域で表わすと

$$\begin{aligned} M_0 &= W/3.069 [6EI/kI^2 \{ 0.387 - 0.393x_0/l - 0.393V/l(t + \beta \sin t/\beta) \} - \{ (0.637x_0 - 0.768x_0^2/l \\ &\quad + 0.131x_0^3/l^2) + (0.637V - 1.536x_0V/l + 0.393x_0^2V/l^2)(t + \beta \sin t/\beta) + (0.393x_0V^2/l^2 \\ &\quad - 0.768V^2/l) t^2 + 0.131V^3/l^2 (t^3 - 6\beta^2 t + 6\beta^3 \sin t/\beta) \}] \\ M_{-1} &= W/3.069 [6EI/kI^2 \{ 0.225 - 0.3x_0/l - 0.3V/l(t + \beta \sin t/\beta) \} - \{ (0.275x_0 - 0.375x_0^2/l \\ &\quad + 0.1x_0^3/l^2) + (0.275V - 0.75x_0V/l + 0.3x_0^2V/l^2)(t + \beta \sin t/\beta) + (0.3x_0V^2/l^2 - 0.375V^2/l) t^2 \\ &\quad + 0.1V^3/l^2 (t^3 - 6\beta^2 t + 6\beta^3 \sin t/\beta) \}] \\ M_1 &= W/3.069 [6EI/kI^2 \{ -0.004 + 0.387x_0/l + 0.387V/l(t + \beta \sin t/\beta) \} - \{ (0.504x_0 - 0.375x_0^2/l \\ &\quad - 0.129x_0^3/l^2) + (0.504V - 0.75x_0V/l - 0.387x_0^2V/l^2)(t + \beta \sin t/\beta) + (-0.387x_0V^2/l^2 \\ &\quad - 0.375V^2/l) t^2 - 0.129V^3/l^2 (t^3 - 6\beta^2 t + 6\beta^3 \sin t/\beta) \}] \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式によつて動荷重が0-1スパン上にある場合の0, -1, 1 支点のモーメントが得られる。

その他の支点についても全く同様にして支点モーメントが得られる。

かくして各支点モーメントが算出されると、(5)式を用いて各支点反力が求められ、従つて任意点のモーメントも計算される。

$$\begin{aligned} R_0 &= W \{ 1 - (x_0 + Vt)/l \} - \frac{2M_0 - M_{-1} - M_1}{l} + 9/20 \cdot \rho A l^3 / 6EI \left(\frac{\partial^2 M_{-1}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial t^2} \right) \\ &\quad + 47/30 \cdot \rho A l^3 / 6EI \frac{\partial^2 M_0}{\partial t^2} - \rho A l^3 / 18EI \cdot W \{ -6V^2/l + 6V^2(x_0 + Vt)/l^2 \} \end{aligned} \quad (18)$$

ただし $\frac{\partial^4 M_{-1}}{\partial t^4}$, ……などは無視してある。

以上(17)(18)式によつて0-1スパン間のモーメントを求めて見ると

(5)式を用いる際に近似的に $\frac{\partial^4 M_n}{\partial t^4}$ の項は無視して差支えないと考えられる。

荷重が0-1スパン間にある場合の過渡的現象として問題になるのはやはり0-1スパン間に生ずる応力であるから、この部分に生ずるモーメントを検討すればよい。従つてこの場合に必要となる0支点の反力は(5)式によつて次のように求められる。すなわち

(1) 移動荷重が0 支点を始点とした場合
このときは(17)(18)で $x_0=0$ とおいて計算する。
荷重の移動につれて各時刻における M_0, M_{-1} ,

M_1, R_0 及びその時刻における荷重点のモーメントを求めると次表のような結果となる。

M及R	0sec	0.5×10^{-2}	1.0×10^{-2}	1.5×10^{-2}	1.875×10^{-2}	2.0×10^{-2}
	kg-cm					
M_0	217500	171230	131800	99640	76290	75480
M_{-1}	126460	95930	68760	44710	25830	23240
M_1	-2250	16950	38380	66800	82440	87720
	kg					
R_0	3360	3170	3290	3210	3125	2710
	kg-cm					
M_x	217500	202930	197600	195940	193480	183920

(2) 移動始点が 0-1 スパン中点にある場合

このときは (17)(18) 式において $x_0 = \frac{l}{2}$ と
して計算すれば次のようになる。

M及R	0sec	0.5×10^{-2}	1.0×10^{-2}	1.5×10^{-2}
	kg-cm			
M_0	82000	53380	30700	14190
M_{-1}	31820	9150	-10620	-27730
M_1	82990	109630	148380	188300
	kg			
R_0	3125	3120	3055	2733
	kg-cm			
M_x	199150	201580	206400	198690

以上の結果について見ると荷重の始点が支点にある場合はこの点のモーメントが一番大きく、 $M = 217500 \text{kg-cm}$ となり、時間の経過従つて荷重の移動につれてモーメントは漸減する傾向を示し、始点をスパン中点に取つた場合はスパン中央より少し先の点で M_{\max} が生じている。もちろん与えられた数値によつては異つた結果を生ずるが、こゝでは主として著者の用いた算式の説明を例示したにすぎないから計算結果から直ちに結論的な事項を引出すわけにはいかない。

4. 結 言

動荷重が連続梁に作用する場合その動的影響を厳密に解くことは一般に不能となりただ近似的にその性質をしらべうるにすぎない。

ただし支点が固定された場合は容易に解きうる。著者の用いた算式によると静荷重における従来 of 計算法に比して約 12% 程度のモーメント増加を生ずるが列車速度の影響が明確に握めない点に欠陥があり、現在のところ動荷重の場合にはレールを弾性床上の桁として取扱うのが最も適當のように考えられる。

筆者の式で速度の影響が現われない点については K (反力係数) が一定のものと仮定しているが厳密には当然 K は速度 V のある函数と考えられ、これによつてモーメントが変化してくるのであるが、この関係については、まだ不明であるから、やむをえず $K = \text{一定}$ として取扱つた今後このような点が明らかにされれば著者の算式も充分役立つものと思われる。

(以上)

(1) 弾性基礎にある梁の撓み振動に関する基礎的研究 後藤尙男 (土会誌35巻4号)

山口大學工學部學報

昭和 26 年 7 月 15 日 印刷
昭和 26 年 7 月 31 日 発行

編集兼発行者

山口大學工學部

印刷者

津 永 善 助

印刷所

徳山印刷株式會社