

# 直交異方性板理論による桁橋構造の 自由振動に関する研究（續報）

米 沢 博

## 1. はしがき

著者はさきに、直交異方性板理論の桁橋構造への適用に関する研究の一部として、桁橋構造の自由振動の解析を行って、直交異方性板理論が桁橋構造の静力学的解析とともに、動力学的解析にも有効なことを述べた<sup>1)</sup>。

直交異方性板理論によって、桁橋構造の振動を解析する場合、種々な仮定を適用しなければならない。すなわち、 $H=\kappa\sqrt{D_x D_y}$  の  $\kappa$  の値、境界条件の考え方、ポアソン比  $\nu$  の値などを適当に仮定しなければならない。

さらに、桁橋全体としての振動時の形状やスパンと幅員の比の影響など、検討を要する問題が多く存在する。

ここでは、さきに誘導した以外の振動数方程式を誘導するとともに、これらの問題を理論的に考察し、測定結果との比較検討を行ってみたいと考える次第である。

## 2. 振動数方程式

さきに、 $\kappa=1$  で境界条件に等方性板の条件を適用した場合の振動数方程式を誘導したので、ここでは、それ以外の場合の振動数方程式を誘導した結果を述べる

図-1のような直交異方性矩形板において、辺  $x=0$ 、 $a$  において単純支持、辺  $y=\pm b/2$  において、直交異方性板としての自由辺の境界条件を採用すると、 $\kappa=1$  あるいは  $\kappa=0$  に従って、振動数方程式は次のようになる。

(a)  $H^2=D_x D_y$  すなわち  $\kappa=1$  の場合

$\mu > m^2 \frac{b^2}{a^2}$  に対して

$$\left(\frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2}\right) \sqrt{\frac{M'}{r}} \left\{ \frac{M'}{r} + \frac{1}{r} \left(2 - \nu \frac{1}{r}\right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} \\ + \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} - \frac{1}{r} \left(2 - \nu \frac{1}{r}\right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \left( \frac{M'}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} = 0$$

( $x$  軸に対称な振動) ..... (1)

$$\left(\frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2}\right) \sqrt{\frac{M'}{r}} \left\{ \frac{M'}{r} + \frac{1}{r} \left(2 - \nu \frac{1}{r}\right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} \\ - \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} - \frac{1}{r} \left(2 - \nu \frac{1}{r}\right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \left( \frac{M'}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M'}{r}} = 0$$

( $x$  軸に逆対称な振動) ..... (2)

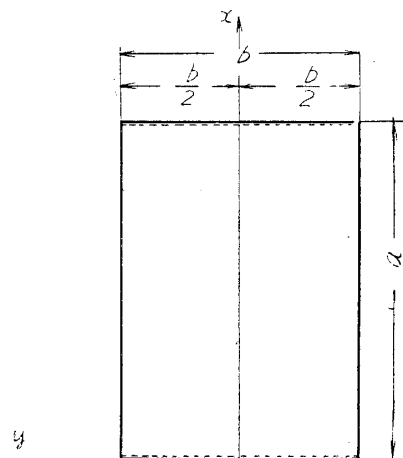


図-1

$\mu < m^2 \frac{b^2}{a^2}$  に対して

$$\begin{aligned} & \left( \frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \sqrt{-\frac{M'}{r}} \left\{ -\frac{M'}{r} - \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{M'}{r}} \\ & - \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} - \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \left( -\frac{M'}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{M'}{r}} \\ & = 0 \quad (\text{x軸に対称な振動}) \quad \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{M}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \sqrt{-\frac{M'}{r}} \left\{ -\frac{M'}{r} - \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{M'}{r}} \\ & - \sqrt{\frac{M}{r}} \left\{ \frac{M}{r} - \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \left( -\frac{M'}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{M}{r}} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{-\frac{M'}{r}} \\ & = 0 \quad (\text{x軸に逆対称な振動}) \quad \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

ただし, 式(1)~(4)において

$$\mu = \frac{P b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho}{D_x}}, \quad M = \mu + m^2 \frac{b^2}{a^2}, \quad M' = \mu - m^2 \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{D_y}{D_x} = r^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

$\rho$  は板の単位面積あたりの質量である。

(b)  $H=0$  すなわち  $\kappa=0$  の場合

$\mu > m^2 \frac{b^2}{a^2}$  に対して

$$\begin{aligned} & \left( \frac{N}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left\{ \frac{N}{r} + \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} \\ & + \left( \frac{N}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left\{ \frac{N}{r} - \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} = 0 \\ & \quad (\text{x軸に対称な振動}) \quad \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left( \frac{N}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left\{ \frac{N}{r} + \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \sinh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} \\ & - \left( \frac{N}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left\{ \frac{N}{r} - \frac{1}{r} \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) m^2 \frac{b^2}{a^2} \right\} \cosh \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{r}} = 0 \\ & \quad (\text{x軸に逆対称な振動}) \quad \dots\dots\dots(6) \end{aligned}$$

$\mu < m^2 \frac{b^2}{a^2}$  に対して

$$\begin{aligned} & \left\{ N' \left( \frac{N'}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) - m^2 \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{N'}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) \right\} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \\ & + \left\{ N' \left( \frac{N'}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) + m^2 \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{N'}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) \right\} \sinh \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \cosh \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \\ & = 0 \quad (\text{x軸に対称な振動}) \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ N' \left( \frac{N'}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) - m^2 \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{N'}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) \right\} \sin \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \cos \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \\ & - \left\{ N' \left( \frac{N'}{r} - \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) + m^2 \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{N'}{r} + \nu m^2 \frac{b^2}{a^2} \right) \left( 2 - \nu \frac{1}{r} \right) \right\} \sinh \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \cosh \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{N'}{r}} \\ & = 0 \quad (x\text{軸に逆対称な振動}) \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

ただし、式(5)~(8)において

$$N = \sqrt{\mu^2 - m^4 \frac{b^4}{a^4}}, \quad N' = \sqrt{m^4 \frac{b^4}{a^4} - \mu^2}$$

である。

以上に誘導した振動数方程式(1)~(8)のうちで、板としての特長を有する振動をあらわすのは、式(1),(2),(5),(6)である。これ以外の式に相当する振動は、単純梁の振動とほとんど等しいか、もしくは存在しない。

**3. 振動時のたゆみ曲面に関する考察**

図-2のような桁橋構造の最低次振動数を、梁の理論で計算する場合、振動数は主桁の数、桁橋の幅員、桁と床板の相関剛比などに関係ない。従って、桁橋において、スパンと桁の断面が同一ならば、主桁の数や幅員が異なる場合でも、振動数は同一になる。このことは、桁橋の主桁が床板や横桁などによって互に緊結されていて、いわゆる桁と床板の合体振動をすることを考えると、明らかに不合理である。この点、直交異方性板理論によると、幅員とスパンの比、相関剛比などが理論の中に含まれており、合理的に解析できると考えられる。

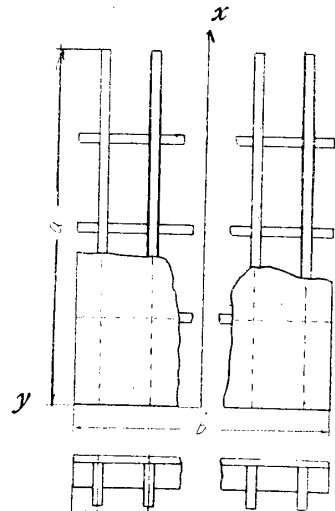


図-2

純然たる直交異方性板や、幅員に対してスパンが比較的大きくて、全体として梁に類似の振動をする桁橋では、梁の理論を適用してよいであろう。

しかし、特にスパンに対して幅員が比較的大きい桁橋では、梁理論による計算結果が実測値と全くあわないことが、実験の結果判明している。このような桁橋が、板としての振動をするものと考え、式(1),(5)の最低次振動、すなわち、図-3に示すようなx軸方向の二本の節線を有する振動をするか、あるいは、式(2),(6)に相当する最低次振動、すなわち、図-4のように、x軸方向に一本の節線を有する逆対称振動をするかが問題となる。

いま、 $a/b=2$ とし、 $D_x/D_y=4\sim 400$ で $H^2=D_x D_y$ 、 $\nu=0$ と仮定して、式(1),(2)を満足する最低次の $\mu$ の値を求めると、図-5, a, bのようになる。図にはいずれも、単純梁の

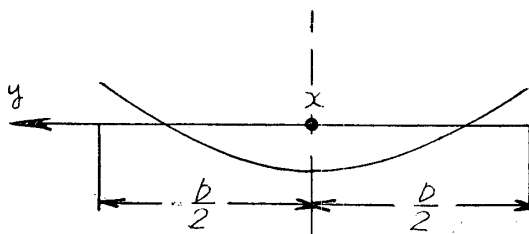


図-3

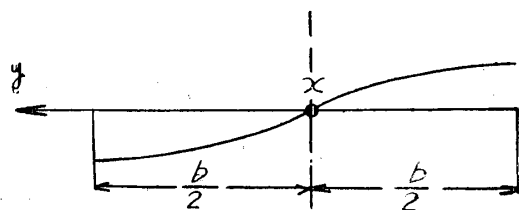


図-4

$\mu$  の値を記入しておいた。

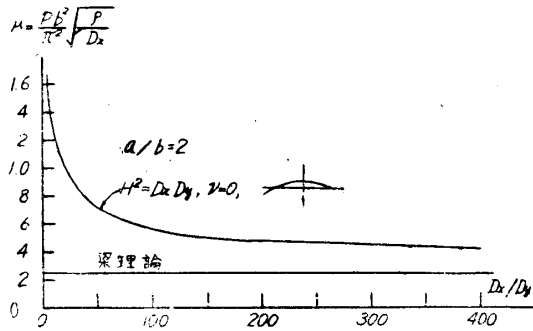


図-5a

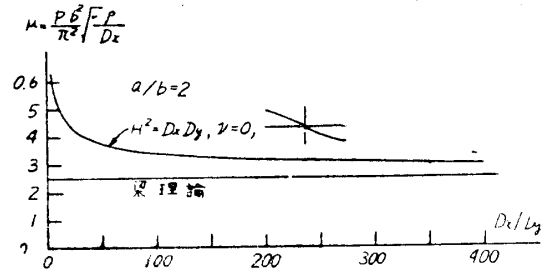


図-5b

図-5 から明らかなように、 $x$  軸方向の節線を有する振動は、単純梁の振動よりも振動数が相当大きい。しかも  $x$  軸方向の振動の形は梁の振動形と同一である点を考えると、このことは注目すべき特長である。さらに、相関剛比  $D_x/D_y$  の値によって、 $\mu$  が著しく変化することがわかる。

#### 4. $\kappa$ の値に関する考察

$\kappa$  の値は、桁橋の構造によって異なり、振動数方程式も  $\kappa$  の値で異なる。厳密には、それぞれの桁橋に対する実験によって、 $\kappa$  の値は決まるものである。しかし、その都度実験で決定した値を用いて計算するのは、実用的でない。従って、ここでは  $\kappa=1$  あるいは  $\kappa=0$  の二つの場合を比較してみよう。

いま、 $a/b=2$  とし、 $D_x/D_y=4\sim 400$  で  $\nu=0$  と仮定し、 $\kappa=1$  あるいは  $\kappa=0$  で  $x$  軸に対称あるいは逆対称な振動をする場合を比較すると、図-6, 7 のようになる。

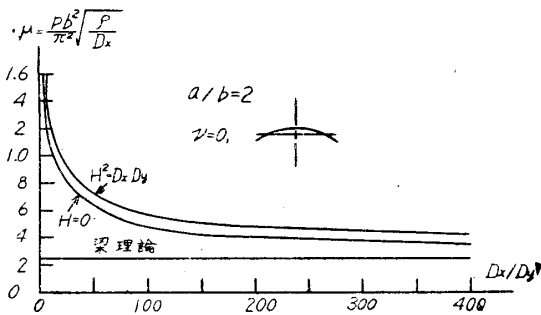


図-6

図-6, 7 を見ると、いずれも  $\kappa=1$  の振動数が  $\kappa=0$  の場合より大きくなっている。

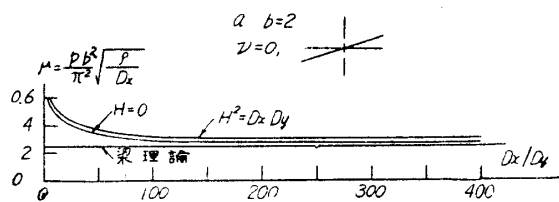


図-7

$\kappa=0$  と仮定することは、捩り抵抗を無視することになり、振動数が小さくなることは初めから予想される結果である。合成桁橋や鉄筋コンクリート丁桁橋に対しては  $\kappa=1$  とし、床板のない格子桁橋に対しては  $\kappa=0$  と仮定して計算すればよいと考えられる。

いずれにしても、 $\kappa=1$  あるいは  $\kappa=0$  と仮定して計算した結果を比較すると、振動数に著しい相違はないことがわかる。

#### 5. 境界条件に関する考察

自由辺の境界条件として、直交異方性板の境界条件を適用するのが自然であるが、桁橋構造に対しては、その自由辺ではむしろ等方性板の性質を多く有するとする考え方もあるわけで、ここではこの両者の相異を比較してみよう。

いま、 $a/b=2$  とし、 $D_x/D_y=4\sim 400$  で、 $H^2=D_x/D_y$ 、 $\nu=0$  と仮定し、 $x$  軸に対称な振動をする場合を比較すると、図-8 のようになる。これを見ると、直交異方性板の境界条件を適用した場合の振動数が、幾分大きくなって

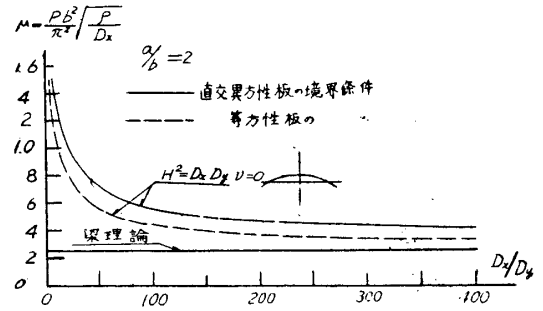


図-8

**6. スパンと幅員の比およびポアソン比の影響に関する考察**

スパンと幅員の比 ( $a/b$ ) およびポアソン比 ( $\nu$ ) の値によって、振動数がどのように変化するか調べてみよう。

いま、 $H^2=D_x D_y$  と仮定し、 $a/b=1, 2, 4, 8$ 、 $D_x/D_y=4\sim 400$ 、 $\nu=0$  あるいは  $0.15$  として振動数を計算したものを図-9, a~d, 図-10, a~d に示す。

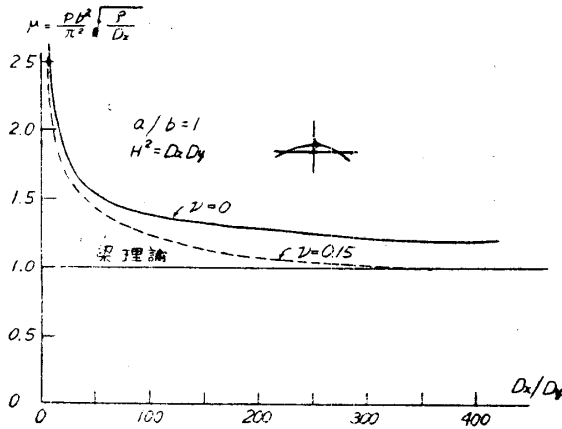


図-9, a

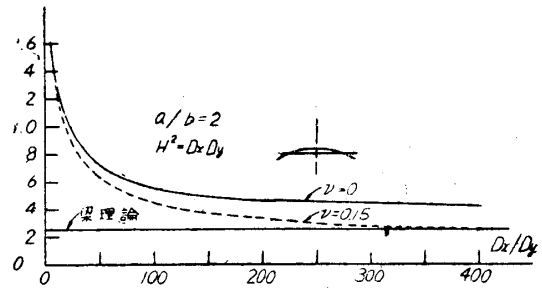


図-9, b

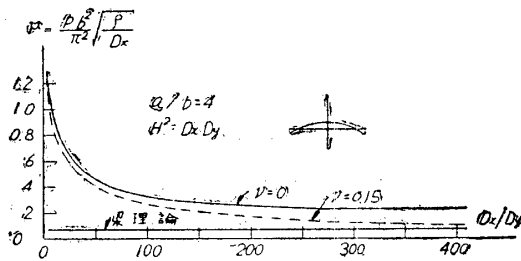


図-9, c

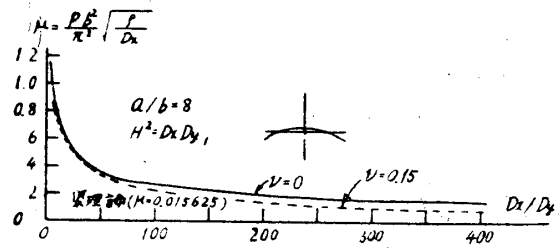


図-9, d

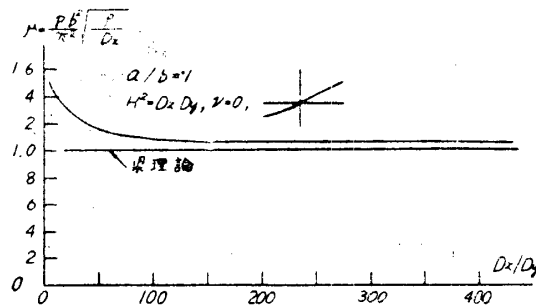


図-10, a

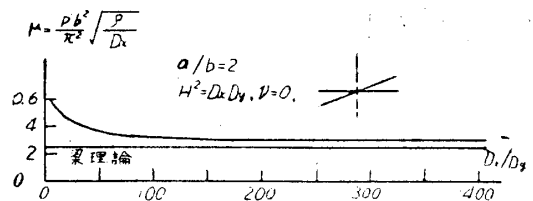


図-10, b

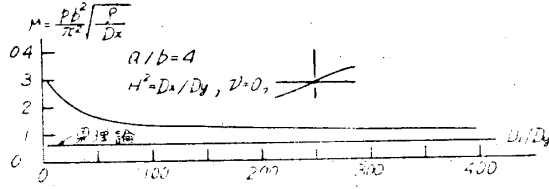


図-10, c

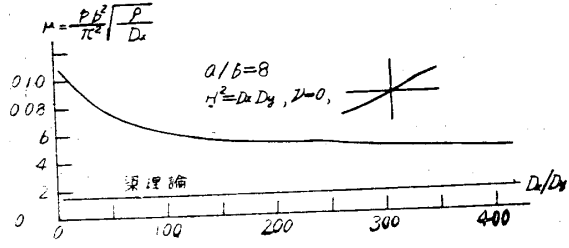


図-10, d

$\nu=0$  の振動数が  $\nu=0.15$  の振動数より大きくなるが、これは当然の結果であろう。

つぎに、これらの図によって、最低次の振動数と高次の振動数との相互の間隔を考えてみよう。

表-1 自由振動数の比

$a/b \backslash D_x/D_y$	4	100	200
1	1:1.5:2.6	1:1.1:1.4	1:1.1:1.3
2	1:2.4:6.4	1:1.3:2.2	1:1.2:1.9
4	1:4.8:20	1:2.1:5.1	1:1.9:3.9
8	1:7.1:73	1:4.0:17	1:3.4:13

単純梁の理論では、自由振動の間には  $1:4:9:\dots$  の比が存在する。直交異方性板として取り扱おうと、この比は  $a/b$  および  $D_x/D_y$  の値によって著るしく相違する。 $a/b, D_x/D_y$  の種々な値に対し、この比を求めると表-1 のようになる。表にて 1 は節線のない最低次振動である。

表-1 を見ると、 $a/b$  の小さいほど、また  $D_x/D_y$  の大きいほど、比の間隔が接近している。逆に、 $a/b$  が大きくなると、比の間隔は単純梁の場合の  $1:4:9$  よりもはるかに大きくなる。このことから、スパンに対して幅員が比較的大きい桁橋構造ほど、 $x$  軸方向の節線を有する振動が誘発されやすいと判断される。

表-1 を見ると、 $a/b$  の小さいほど、また

### 7. 測定結果との比較

鋼製あるいは鋳鉄製の小形の模型桁橋について、 $a/b, D_x/D_y$  の値を変化させて振動測定を行った結果は、ここで述べた理論的考察が適当であることを示した。これらの実験結果について述べることは、ここでは省略して、つぎの二三の実際の桁橋に対する測定値によって、比較検討してみよう。

振動測定した橋梁は鶴沼橋（鉄筋コンクリートT桁橋、スパン9 m、幅員12m）、橋本橋（主桁並列全溶接上路プレートガーダー橋、スパン18.75m、幅員7.5m）、昭平橋（PC桁橋、スパン12m、幅員11m）である。これらの測定値と直交異方性板理論および単純梁理論による計算値とを比較したものを、表-2, 3, 4 に示す。

表-2 鶴沼橋の測定値との比較

測定値	単純梁の理論	直交異方性板理論 ( $H^2=D_x D_y$ )	
		$\nu=0$	$\nu=0.15$
周期(sec) 0.040~0.065	0.103~0.106	0.055	0.059

表-3 橋本橋の測定値との比較

測定値	単純梁の理論	直交異方性板理論 ( $H^2=D_x D_y$ )	
周期(sec) 0.067	0.086	0.058	0.031

表-4 昭平橋の測定値との比較

測定値	単純梁の理論	直交異方性板理論 ( $H^2=D_x D_y$ )	
周期(sec) 0.063	0.185	0.071	0.123

いずれも、直交異方性板理論による値が、測定値に近い値を示していることがわかる。なお格子桁橋に対しても、成岡博士、平井氏などの研究結果<sup>2)</sup>は、直交異方性板理論によ

る結果が有効なことを示している。

## 8. むすび

道路橋桁橋構造の振動を計算する場合、従来はすべて梁の理論によって来たが、これでは不十分であって、主桁、横桁、床板などの合体振動として解析すべきであると考えられる。この目的のためには、直交異方性板理論による解析法が非常に有効であると思われる。

ここでは、いずれも直橋である単純桁橋について述べたが、さらに斜桁橋構造や連続桁橋構造に適用する場合や、強制振動に対する問題などがある。これらについては、改めて研究したいと考える次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 米沢 博：土木学会誌，第40巻（昭30）59頁
- 2) 成岡，平井：土木学会論文集，第35号（昭31）25頁