

# 走行荷重を受ける板の有限帯板法による解析

岡部 益雄\*・工藤 洋三\*\*・中川 浩二\*\*

Analysis of plates under moving load using Finite Strip Method

Masuo OKABE, Yōzō KUDŌ and Kōji NAKAGAWA

## Abstract

In the first part of this paper, the applicability of Finite Strip Method for the dynamic response problems of civil engineering structures was studied.

From the analytical results on the static plate bending, it was shown that the applicability is good and the method is economical. In the case of dynamic response analysis, it was shown that the modal analysis is applicable. From these results, it was shown that though the Finite Strip Method has some limitations in the application of boundary conditions, it is very useful and economical for some problems.

In the second part, the dynamic response analysis of plates under moving load using the Finite Strip Method was studied. In this analysis many interesting results were shown.

## 1. はじめに

一般に汎用的なマトリクス構造解析法として有限要素法 (Finite Element Method) が知られている。この方法は最近になり、その数学的な裏づけを得ると同時に幅広い用途から今日では構造解析の分野のみならず流体力学、電磁気学その他工学の基礎と応用のあらゆる分野に広く用いられている。しかし、この方法も多次元の問題において、問題の複雑化にともない未知数が増加することにより、計算機の計算時間などの面からしばしば実際の応用に問題が生じることになる。この問題点を解決すべく、解を級数展開するという手法を導入することによる有限帯板法 (Finite Strip Method) なる方法が1968年ごろから Cheung<sup>1),3)</sup> あるいは、Powell<sup>2)</sup> らによって紹介されてきている。

今日この方法は、3次元問題としては有限プリズム法 (Finite Prism Method) と呼ばれ、広い意味の有限要素法の中の半解析的有限要素法として分類されている<sup>4)</sup>。有限要素法によるシェル等の解析において要素は三角形、四角形板が用いられることが多い。これに対して有限帯板法では長方形帯板要素、曲板状帯

板要素、シェル要素などが考えられている。そして、要素分割においては原則として要素が構造物の一端から他端へ伸びる形になることになる。

これらの要素は節線 (有限要素法では節点) によって結合され、要素間の変位の連続性を満足させる。したがって、比較的、規則的な形状が多く、かつその計算量が大きくなることの多い土木構造物では、その解析の効率、解析精度の面で一般の有限要素法と比較して有限な解析法であるということが期待される。

本論文の第1の目的は、この有限帯板法の有用性を特に構造物の動的応答という比較的複雑な問題にも拡張して明らかにすることである。さらにこれを用いて動的荷重を受ける典型的な土木構造物である床板が走行荷重を受ける場合を考え、四辺単純支持板の走行荷重下での応答を種々のパラメータの下で求め、その挙動を明らかにすることを第2の目的とした。

## 2. 解析理論

### 2-1 基礎方程式

一般的な板の曲げ問題を考える場合、1つの板構造に対して有限帯板要素分割を Fig. 1-(a) のようにとり、同時に構造全体に対する全体座標系を X, Y で示す。また、全体構造中の節線 i および j によって分割

\* フジタ工業 K.K.

\*\* 土木工学科

された帯板要素を Fig. 1-(b) のように表わし座標を  $x, y$  とする. 今, Fig. 1-(b) で表わされた帯板要素に

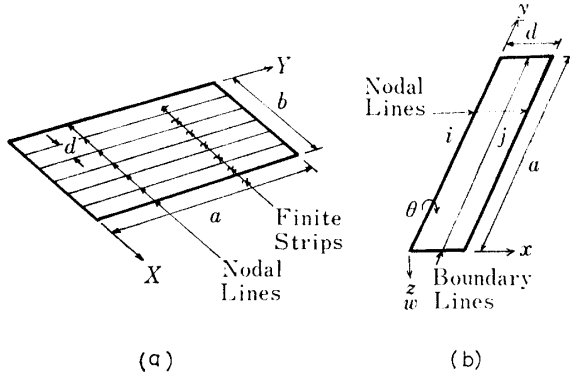


Fig. 1 Geometry of idealized plate and strip of structure

ついて考えるとき, 要素内における変位関数を次で表わす.

$$w(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots,r} (\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3) Y_m \quad (1-1)$$

これは, 帯板要素内の変位を  $x$  方向については  $x$  のべき級数で,  $y$  方向については  $Y_m$  で表わされる基本級数で表わしたことになる. ここで  $Y_m$  は問題とする全体板構造の  $Y$  方向の境界条件により決定される関数であり, そのいくつかを Table-1 に示す.

帯要素の  $x$  方向境界, すなわち節線  $i, j$  上の境界条件については次のように与える.

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } \begin{cases} w_i \\ \theta_i \end{cases} &= \sum_{m=1,2,\dots,r} \begin{cases} w_{im} \\ \theta_{im} \end{cases} Y_m \\ x=d \text{ で } \begin{cases} w_j \\ \theta_j \end{cases} &= \sum_{m=1,2,\dots,r} \begin{cases} w_{jm} \\ \theta_{jm} \end{cases} Y_m \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

ここで,  $m$  は調和級数番号,  $\{w_{im}, \theta_{im}, w_{jm}, \theta_{jm}\}$  は

各節線上における変位 ( $w$  方向変位と  $y$  軸に関する回転量) の振幅である. このとき式(1-1)における  $\alpha_1 \sim \alpha_4$  は帯板幅  $d$  および座標  $x$  で表わされ, 変位関数は,

$$w(x, y) = \sum_{m=1,2,\dots,r} \left[ \left( 1 - \frac{3x^2}{d^2} + \frac{2x^3}{d^3} \right) w_{im} + \left( x + \frac{2x^2}{d} - \frac{x^3}{d^2} \right) \theta_{im} + \left( \frac{3x^2}{d^2} - \frac{2x^3}{d^3} \right) w_{jm} + \left( \frac{x^3}{d^2} - \frac{x^2}{d} \right) \theta_{jm} \right] \quad (1-3)$$

となる. これをマトリクス表示して

$$w(x, y) = [N] \{\delta\} = \sum_{m=1,2,\dots,r} [N]_m \{\delta\}_m \quad (1-4)$$

となり, ここで,  $\{\delta\}_m = \{w_{im}, \theta_{im}, w_{jm}, \theta_{jm}\}^T$  であり, また  $[N]$  は形状関数である.

板曲げ問題において, 2次元弾性問題のひずみと応力に対応する量は, 一般化ひずみとして曲率が, 一般化応力として曲げおよびねじりモーメントがとられている. すなわち, 板の曲げにおける曲率は,

$$\begin{aligned} \{T\} &= \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = [B] \{\delta\} \\ &= \sum_{m=1,2,\dots,r} [B]_m \{\delta\}_m \end{aligned} \quad (1-5)$$

となる. ここで,  $[B]$  は曲げひずみマトリクスと呼ばれるものである.

直交異方性板の一般化応力 (曲げおよびねじりモーメント) は,

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \{T\}$$

Table 1 Basic functions for some boundary conditions

| two opposite sides                             | $Y_m$                                                                                                                                                              | $\mu_m$                      | $\alpha_m$                                                                     |
|------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| both ends simply supported                     | $Y_m = \sin \frac{\mu_m y}{a}$                                                                                                                                     | $\mu_m = m\pi$               |                                                                                |
| one end simply supported and the other clamped | $Y_m = \sin \frac{\mu_m y}{a}$<br>$-\alpha_m \text{sh} \frac{\mu_m y}{a}$                                                                                          | $\mu_m = \frac{4m-1}{4} \pi$ | $\alpha_m = \frac{\sin \mu_m}{\text{sh} \mu_m}$                                |
| both ends clamped                              | $Y_m = \sin \frac{\mu_m y}{a} - \text{sh} \frac{\mu_m y}{a}$<br>$\frac{\mu_m y}{a} - \alpha_m \left( \cos \frac{\mu_m y}{a} - \text{ch} \frac{\mu_m y}{a} \right)$ | $\mu_m = \frac{2m+1}{2} \pi$ | $\alpha_m = \frac{\sin \mu_m - \text{sh} \mu_m}{\cos \mu_m - \text{ch} \mu_m}$ |

$$=[D]\{T\} \quad (1-6)$$

で表わされる。[D] は、板の剛度を表わすマトリクスである。

ここで、帯板要素および全体板構造の剛性マトリクスを求める。そのため、まず各帯板要素について全ポテンシャルエネルギーを求めると、考えている板の単位面積当りに作用する荷重成分を  $q$  で表わして、

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^d \left( -M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy - \int_0^a \int_0^d w^T q dx dy$$

$$= \sum_{\substack{m=1,2,\dots,r \\ n=1,2,\dots,r}} \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^d \left\{ [B]_m \{\delta\}_m \right\} [D] [B]_n \{\delta\}_n \left. \right\} dx dy - \sum_{m=1,2,\dots,r} \int_0^a \int_0^d \{\delta\}_m [N]_m q dx dy \quad (1-7)$$

となる。ここで、

$$q = \sum_{n=1,2,\dots,r} q_n Y_n \quad (1-8)$$

と表わされる。このことは、荷重成分についても変位関数を与えたと同じ基本関数を用いて荷重を級数展開したことを意味する。

$U^e$  を最小化するため各変位成分で微分すると

$$\frac{\partial U^e}{\partial \delta} = \left\{ \frac{\partial U^e}{\partial w_i}, \frac{\partial U^e}{\partial \theta_i}, \frac{\partial U^e}{\partial w_j}, \frac{\partial U^e}{\partial \theta_j} \right\}$$

$$= \sum_{\substack{m=1,2,\dots,r \\ n=1,2,\dots,r}} \int_0^a \int_0^d \left\{ [B]_m [D] [B]_n \{\delta\}_n \right\} dx dy - \sum_{\substack{m=1,2,\dots,r \\ n=1,2,\dots,r}} \int_0^a \int_0^d \left\{ [N]_m^T q_n Y_n \right\} dx dy$$

$$= \sum_{\substack{m=1,2,\dots,r \\ n=1,2,\dots,r}} \left\{ [k]_{mn} \{\delta\}_n - \{f\}_{mn} \right\}$$

$$= [k] \{\delta\}^e - \{f\} \quad (1-9)$$

となる。一帯板要素についてのポテンシャルエネルギー最小化の原理を用いると

$$\frac{\partial U^e}{\partial \delta} = [k] \{\delta\} - \{f\} = 0 \quad (1-10)$$

となる。板全体のポテンシャルエネルギーについて、 $U = \sum U^e$  が成立すると拡大解釈されるなら、

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = [K] \{\delta\} - \{F\} = 0 \quad (1-11)$$

である。ここで、[k], [K] は、一要素および板全体の剛性マトリクスであり、{f}, [F] は、それぞれ一要素および全体の荷重ベクトルである。有限帯板法において帯板要素が相対する2辺で単純支持であり、それ

らを両端とする帯板要素を考えるときには、

$$[K]_{mn}^e = 0 \quad \text{for } m \neq n \quad (1-12)$$

となる。

## 2-2 自由振動

D'Alembert の原理を導入すると式(1-11) に対して次式が得られる。

$$[K] \{\delta(t)\} = \{F(t)\} - [M] \{\ddot{\delta}(t)\} \quad (2-1)$$

ここで、[M] は、全体質量マトリクスと呼ばれるものである。荷重項のない場合を考え  $\{F(t)\} = 0$  とすると、

$$[K] \{\delta(t)\} = -[M] \{\ddot{\delta}(t)\} \quad (2-2)$$

となる。この方程式は非減衰な自由振動を支配する一般的方程式である。ここで、節線上の変位が時間に関して調和的であるとすると、

$$\{\delta(t)\} = \{u\} \sin \omega t \quad (2-3)$$

と表わすことができる。ここで  $\omega$  は周期であり、式(2-2), (2-3)より、

$$[K] - \omega^2 [M] = 0 \quad (2-4)$$

## 2-3 強制振動

多自由度系の減衰を伴った強制振動方程式は、

$$[M] \{\ddot{\delta}(t)\} + [G] \{\dot{\delta}(t)\} + [K] \{\delta(t)\} = \{F(t)\} \quad (3-1)$$

で与えられる。ここで、[M], [K] は、(2-1), (2-2) に示された質量マトリクスおよび剛性マトリクスであり、[G] は減衰マトリクスである。

ここで、一般化座標による変位ベクトル  $\{P(t)\}$  を考え

$$\{\delta(t)\} = [X] \{P(t)\} \quad (3-2)$$

とする。ここで、[X] はモーダルマトリクスである。このとき式(3-1) は、次のように表わされる。

$$[L] \{\ddot{P}\} + [H] \{\dot{P}\} + [C] \{P\} = \{Q\} \quad (3-3)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [L] &= [X]^T [M] [X] \\ [H] &= [X]^T [G] [X] \\ [C] &= [X]^T [K] [X] \\ [Q] &= [X]^T \{F\} \end{aligned} \right\} \quad (3-4)$$

が得られる。これは、一般的固有値方程式である。質

量マトリクスは、

$$[M] = \sum_{m=1,2,\dots,r} \sum_{n=1,2,\dots,r} [m]_{mn} \quad (2-5)$$

と表わされ、ここで、

$$[m]_{mn} = \int_0^a \int_0^d \rho h [N]_m^T [N]_n dx dy \quad (2-6)$$

である。しかるに、 $[K]$  の場合と同様に、相対する 2 辺が単純支持であり、それらを両端とする帯板要素を考えるときには、

$$[M]_{mn}^e = 0 \quad \text{for } m \neq n \quad (2-7)$$

となる。

ここで、 $[K]^e, [M]^e$  は、それぞれ行および列数が帯板要素分割したことによる自由度数  $s$  である正方マトリクスであり、 $[K], [M]$  は、 $[K]^e, [M]^e$  が対称軸上に採用級数項数  $t$  だけ並んだ正方マトリクスである。したがって、式(2-4)からは、 $s \times t$  個の固有値が得られることになる。ここで得られた固有ベクトル  $\{u\}_1 \sim \{u\}_{s \times t}$  の直交性を利用し、モーダルマトリクスを求めこれを  $[X]$  で表わす。

である。これらはそれぞれ一般化質量マトリクス、一般化剛性マトリクスおよび一般化荷重ベクトルである。式(3-3)より次式が得られる。すなわち、

$$\{\dot{P}\} + [L]^{-1} [H] \{P\} + [L]^{-1} [C] \{P\} = [L]^{-1} \{Q\} \quad (3-5)$$

ここで、 $[L]^{-1} [H]$  は減衰要因マトリクスと呼ばれるものである。

式(3-5)の  $r$  番目の方程式は、

$$\ddot{P}_r + 2\omega_r \dot{P}_r + \omega_r^2 P_r = \frac{1}{m_r^*} Q_r(t) \quad (3-6)$$

となる。動的応答解析は、このような  $n$  個の方程式を解けば良いことになる。本研究では、これらの  $n$  個の式をルンゲ・クッタ法で計算した。

### 3. 解析結果と考察

#### 3-1 有限帯板法の動的応答問題を含む土木構造物の解析への適用性について

##### 3-1-1 板曲げ解析

静的な板の曲げ解析は最も基本的構造解析の問題として多くの例題にもみられるところである。本研究でもまず静的な問題に対する有限帯板法の有用性を検討するために、基本的な問題についてのいくつかの解析を行ない、他の解法との比較を行なった。その結果、ここで問題とした相対する 2 辺が単純支持された板の

ような構造の解析には有限帯板法はたとえば一般の有限要素法とくらべて著しい有利さを示している。

しかし荷重状態が集中荷重である場合には等分布荷重が作用する場合とくらべて有限帯板法の収束が遅く(級数項を多く必要とする)、また  $\beta = a/b$  の増加により収束が遅くなることが示された。このことは与えられた荷重を式(1-8)により級数展開する場合に集中荷重を精度よく展開するには等分布荷重の場合とくらべてより多くの項数を必要とすることから理解されよう。

さらに対象とする板の境界条件が両端単純支持でない場合には基本関数が Table-1 で表わされたようになることから問題の解法はそれだけ複雑となり、有限帯板法の利点が小さくなることが考えられる。

##### 3-1-2 板の固有値解析

有限帯板法による板の固有値解析については Cheung らによってかなり詳しく述べられている。たとえば相対する 2 辺を単純支持とし、他の 2 辺の支持条件による固有値の変化については文献<sup>3)</sup> に詳しく述べられており、本研究でもそれとほぼ等しい結果を得ている。

さらに本研究では有限帯板法の採用調和級数項による固有値の変化に関する検討を行なうために、4 辺単純支持板について円振動数と振動モードとを数学的解析解による結果と比較して Table-2 に示した。ここで有限帯板法において採用した調和級数項数は 3 である。

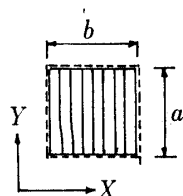
この表からわかるように、第 8 番目の振動モードまでは有限帯板法による結果は解析解とほぼ一致している。しかし第 9 番目からはその状況が著しく変わることが明らかである。これは有限帯板法の解析において  $y$  方向の調和級数項数を 3 項までしかとっていないため、 $y$  方向のモードが最大 3 までしかとり得ないことによる。したがって表からわかるように有限帯板法における第 9 次以降のモードは解析解において  $y$  方向のモードが 3 以下となるものを順次くり上げたもむとなる。このことはもし採用調和級数項数を十分にでなくとり固有値解析を行なうと、ある次数のモード以降では著しい誤差を生じる可能性があることに注意を要しよう。

##### 3-1-3 動的応答解析

有限帯板法の動的応答問題における有用性を検討するため、Fig-2 に対応する 2 端単純支持、他端自由の板の中央線上に走行荷重が作用した場合の板中央点の

Table 2 Comparisons of circular frequencies and modes of two analytic methods

|    | F. S. M. (3 terms) |      |     | Analytical |      |     |
|----|--------------------|------|-----|------------|------|-----|
|    | $\omega$           | mode |     | $\omega$   | mode |     |
|    |                    | $x$  | $y$ |            | $x$  | $y$ |
| 1  | 19.74              | 1    | 1   | 19.74      | 1    | 1   |
| 2  | 49.35              | 1    | 2   | 49.35      | 1    | 2   |
| 3  | 49.36              | 2    | 1   | 49.35      | 2    | 1   |
| 4  | 78.96              | 2    | 2   | 78.96      | 2    | 2   |
| 5  | 98.69              | 1    | 3   | 98.69      | 1    | 3   |
| 6  | 98.80              | 3    | 1   | 98.69      | 3    | 1   |
| 7  | 128.30             | 2    | 3   | 128.30     | 2    | 3   |
| 8  | 128.36             | 3    | 2   | 128.30     | 3    | 2   |
| 9  | 168.40             | 4    | 1   | 167.78     | 1    | 4   |
| 10 | 177.70             | 3    | 3   | 167.78     | 4    | 1   |
| 11 | 197.90             | 4    | 2   | 177.65     | 3    | 3   |
| 12 | 247.20             | 4    | 3   | 197.39     | 2    | 4   |
| 13 | 258.80             | 5    | 1   | 197.39     | 4    | 2   |
| 14 | 288.20             | 5    | 2   | 246.74     | 3    | 4   |
| 15 | 337.30             | 5    | 3   | 246.74     | 4    | 3   |
| 16 | 371.50             | 6    | 1   | 256.61     | 1    | 5   |
| 17 | 400.70             | 6    | 2   | 256.61     | 5    | 1   |
| 18 | 449.50             | 6    | 3   | 286.22     | 2    | 5   |
| 19 | 508.30             | 7    | 1   | 286.22     | 5    | 2   |
| 20 | 537.30             | 7    | 2   | 315.83     | 4    | 4   |



たわみを、はりに走行荷重が作用した場合のはりの中心のたわみと比較した。この場合有限帯板法解析における諸条件は以下の通りである。

要素分割数：8，採用級数項数3，板厚  $t=1.0$ ，  
 ポアソン比  $\nu=0.15$ ，板剛度  $D_x=D_y=1.0$ ， $D_1=\nu D_x$ ，  
 $D_{xy}=1/2(1-\nu)D_x$ ，移動荷重  $P=1.0$ ，

辺比  $\beta=a/b=1.0$ ，板の比重  $\rho=1.0$ ，

ここで速度パラメータとして  $\alpha(=\nu/2\omega_1 a)$ ， $\omega_1$ ：第1次基本円振動数) をとり， $\alpha$  の0.1, 0.4, 0.6, 1.0

のそれぞれの値についての比較を行なっている。この結果少なくとも  $\alpha=1.0$  までは有限帯板法による結果とはりの振動理論による解の間にはよい一致をみ、両者の構造と载荷形式の力学的な対応を考えると、有限帯板法がこの種の問題の解析に十分有用であることが示されている。

### 3-2 走行荷重を受ける板の動的応答について

板状構造物が走行荷重を受ける場合の動的応答は床

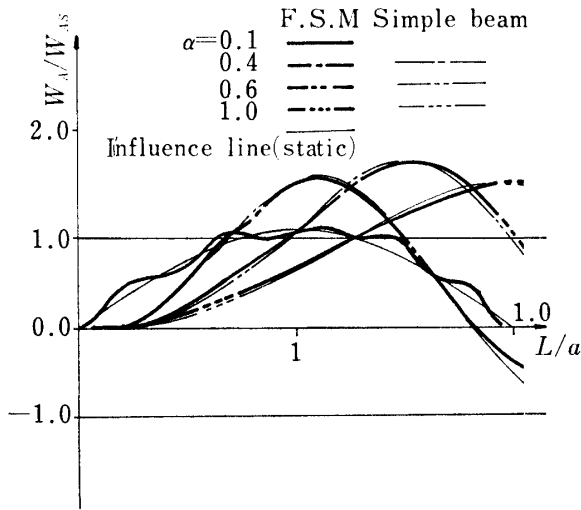


Fig. 2 Response history curves calculated by F. S. M. and Simple beam theory

板の挙動に代表されるように土木構造物としての挙動を考える上で非常に興味ある問題である。さらに今日の産業の発達にともなう交通施設および交通用具の質量とも巨大化を考えると、走行荷重を受ける床板の挙動を正確にとられることは非常に重要な意味を有している。そこで本研究ではいま一つの目的として走行荷重を受ける板の動的挙動を有限帯板法により解析した。

問題として Fig. 3 のように四辺単純支持板上の走行荷重  $P$  を考える。ここで簡単のため荷重としては

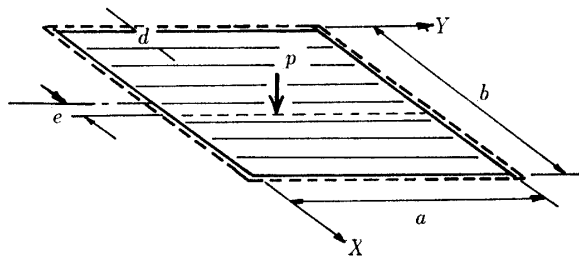


Fig. 3 Model plate and moving load

質量をもたない力を考えている。走行荷重の速度は無次元化するために  $\alpha = V/2\omega_1 a$  なるパラメータを前と同様導入する。さらに板の辺比を  $\beta = a/b$  で表わす。また走行荷重の速度は一定とし、一般性を与えるためつねに中心線より  $0.01b$  だけ外れたところを走るものとした。

まず Fig. 4 および Fig. 5 に  $\beta = 1.0$  とした場合の  $\alpha = 0.04$  および  $\alpha = 0.2$  に対する板中央点の変位応答曲線を示している。図において  $W_A$  は動的応答によ

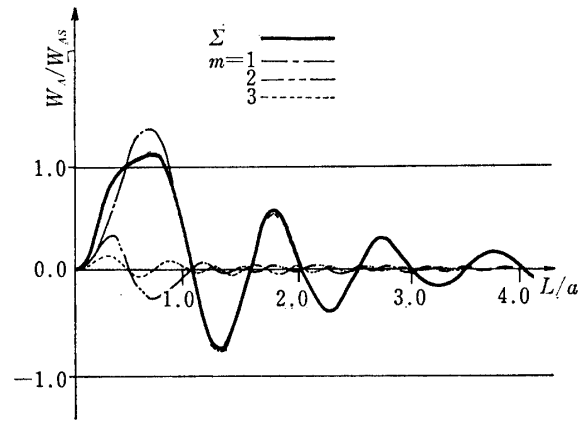


Fig. 4 Responses history curve of the central point A with  $\alpha = 0.04$

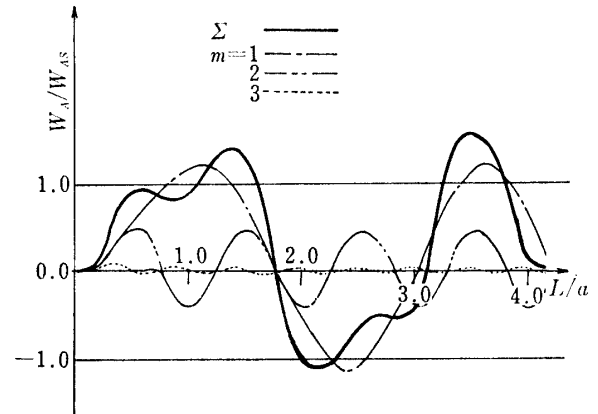


Fig. 5 Response history curves of the central point A with  $\alpha = 0.2$

る板中心点  $A$  のたわみであり、 $W_{AS}$  は対応する点に荷重が載荷された場合の静的な  $A$  点のたわみである。図中時間経過にともなう各次級数項の寄与を明らかにするため、1, 2, 3 次の寄与分とそれらの総和とを示している。Fig. 4 および Fig. 5 の比較から明らかなように Fig. 4 ( $\alpha = 0.04$ ) においては荷重移動速度が小さく、そのため板の振動に寄与する第 1 次項の割合が大きくなる様である。特にその状態は  $L/a = 1.0$  ( $L = vt$ , すなわち  $L/a = 1.0$  は荷重がちょうど板を通り抜けた状態を意味する) に近づくにしたがって顕著となり、 $L/a = 1.0$  をすぎると (荷重が板を通りすぎると) 第 1 次振動のみが卓越し、1 次の固有振動に近い形で板は振動することになる。これに対して Fig. 5 ( $\alpha = 0.2$ ) では荷重速度が比較的大きく、そのため板の振動に 2 次、3 次の項の占める割合が高くなる。このことは荷重が通りすぎてからも同様であり、 $L/a$  が大きくなっても板は 1, 2, 3 次が重なり合った複雑な形で振動しているのがみられる。この傾向は他の  $\alpha$  の値に対しても一般的に成り立つ。すなわち走行荷重を受け

る板の設計において、荷重がその板の固有振動周期に対して遅く走行する場合には荷重が作用している場合のみを考慮すればよいが、速い場合には荷重の通りすぎた後においても大振幅の振動を行なう可能性があるため板の振動減衰ともあわせて考慮すべき問題であろう。

さらに一般に  $\alpha$  の値が大きくなると最大応答変位を与える  $L/a$  が大きくなり、およそ  $\alpha=0.1$  より大きな値では荷重が板を渡り切った後に最大変位がもたらされることになる。また  $\alpha$  の値がさらに増加すると、問題は板に荷重が微小時間だけ作用したものとなり、動的応答問題としては問題点が小さくなることになる。

Fig. 6 は板中央点の最大応答変位を  $\beta=a/b$  および

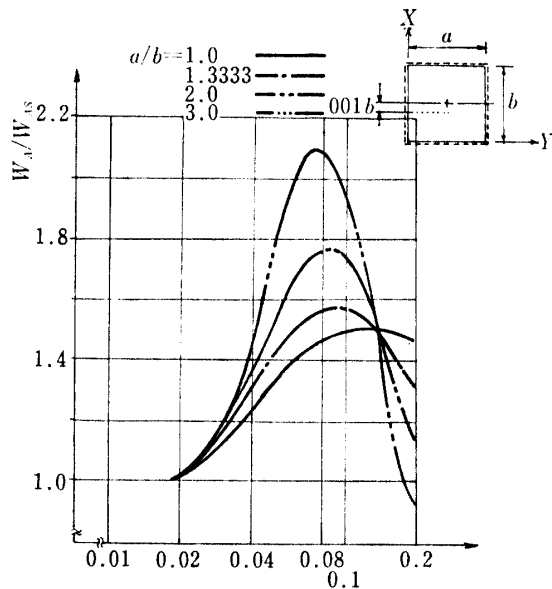


Fig. 6 Maximum deflections at the central point A with varying speed parameter and  $a/b$

$\log \alpha$  に対して示したものである。この図から見て  $\beta$  のそれぞれの値に対して最大応答変位を与える  $\alpha$  の値はおよそ  $0.07 \sim 0.14$  程度であり、その範囲はとくに大きくはない。これはそれぞれの板の基本円振動数にあまり大きな差がないため、最大応答変位を与える位相にあまり差がでないためである。しかし静的変位に対する動的応答変位の倍率（動倍率と呼ぶ）は  $\beta$  の増加とともに非常に大きくなることが認められる。これは動倍率に関しては微小な基本円振動数の差が大きく影響するためである。

また前の Fig. 4, Fig. 5 に示した値は Fig. 6 の B 点および C 点に対応しているということが容易に認められるであろう。

Fig. 7, Fig. 8 には減衰比  $\lambda$  (減衰マトリクスを

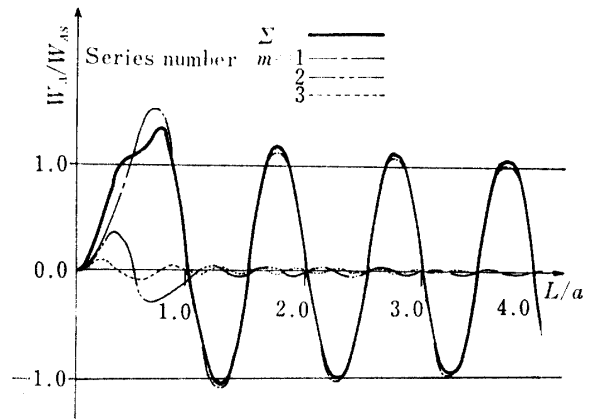


Fig. 7 Response history curves of the central point A with  $\lambda=0.01$  and  $\alpha=0.2$

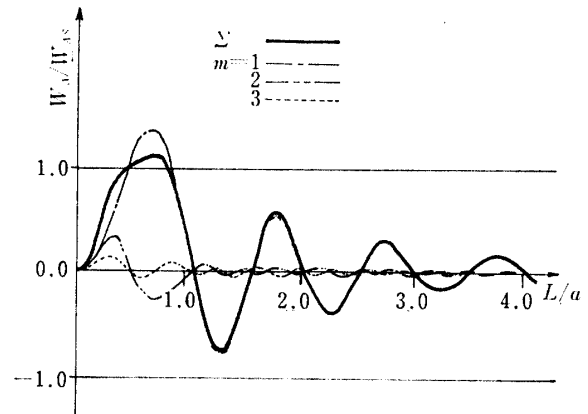


Fig. 8 Response history curves of the central point A with  $\alpha=0.1$  and  $\lambda=0.08$

$2\lambda\omega_1^{-1}I$  においている) を  $0.01, 0.1$  としたときの各級数項別の解の減衰を示している。(ただしここで  $a/b=1.333$  としている) ここで第2, 第3次振動に対するものの方が第1次振動に対するものよりも小さな減衰を受けているのが  $\lambda=0.1$  の場合によく認められる。これは減衰マトリクスの要素を先のように  $2\omega_1\lambda$  と近似的に定めたため、辺比  $\beta$  が大きくなりあるいは  $\alpha$  の値が大きくなって高次の調和級数項の重みが大きくなると減衰マトリクスもそれらに対応すべき工夫をしなければならなくなるであろうことが予想される。

#### 4. 結 論

本研究は有限帯板法の動的応答問題への適用性および経済性を知ることおよびこれを用いて床板が走行荷重を受ける場合の挙動を明らかにすることを目的とした。

まず第1の問題に対しては、静的な板の曲げに対して行なった解析の結果はその適用性および経済性に十分満足できると判断された。さらに動的問題については固有値問題に関する検討から、他の解法によって得られた固有値との十分な一致をみ、固有値問題への適用性が十分であることが確認された。また動的応答解析では上記固有値問題への有限帯板法の適用性にもとづき、モーダルアナリシスを適用することにした。数値積分法にはルンゲ・クッタ法を用いたが採用モード数も一般には7~10モードでありこの解法の有用性が十分に示された。

すなわち有限要素法の利点と直交関数による解の展開の原理を組み合わせた本解法は、ある方向に一定の物理的条件、幾何学的条件が存在するような状態では近似解を得るのに必要な採用級数項数が少なく済み、非常に有効である。換言すれば本解法では一般性が有限要素法にくらべて若干損なわれるが、問題によっては大きな経済性が得られる。

第2の問題に対しては種々の興味ある結果が得られたが、それらを個条書にすると次のとおりである。

1) 板の特性を一定としたとき、速度パラメータ  $\alpha$  が増加することにより、動的応答に寄与する高次モードの割合が高くなる。このことは  $\alpha$  の小さい間は板は荷重が板上にある場合のみ複雑な応答を示し、通りすぎると第1モードに近い形で自由振動を行ない、 $\alpha$  が大きくなると荷重が板を通りすぎてからも高次のモードが振動に大きく影響をもつことを意味す

る。

2)  $\alpha$  が大きくなるにつれて最大応答を与える時間パラメータ  $L/a$  は大きくなり、 $\alpha$  がおよそ0.1をこえると最大応答は荷重が板を通りすぎてから生じる。

3) 板の長さとの比、 $a/b=\beta$  を変えたとき、最大動的応答を与える  $\alpha$  の値は  $\beta=1.0$  から  $\beta=3.0$  において0.07~0.15と変化する。しかし動倍率はこの範囲で1.5~2.2と大きく変化する。

4) 低次の調和級数で解が満足されるような問題に対しては減衰マトリクスを  $2\lambda\omega_1 \Gamma I$  と近似して十分であるが、採用調和級数が高次におよび、かつそれらの寄与が大きい問題に対しては  $\omega_1$  を各調和級数項における基本円振動数におきかえるなどの工夫が必要となろう。

## References

- 1) Y.K. Cheung; Finite Strip Method Analysis of Elastic Slabs, Proc. ASCE, 94 (1968), ST12, pp. 1365-1378.
- 2) G.H. Powell; Analysis of Orthotropic Steel Plate Bridge Decks, Proc. ASCE, 95 (1969), ST5, pp. 909-922.
- 3) Y.K. Cheung and M.S. Cheung; Flexural Vibrations of Rectangular and Other Polygonal Plates, Proc. ASCE, 97 (1971), EM2, pp. 391-411.
- 4) O.C. Zienkiewicz; Finite Element Method in Engineering Sciences, McGraw Hill, 1973.

(昭和51年4月15日 受理)