

# 非保存力を受ける骨組構造物の弾性安定性に 及ぼす減衰の影響について

會 田 忠 義\*・波 木 健 一\*\*

## On the Influence of Damping Affected to the Elastic Stability of the Structures Subjected to the Nonconservative Loads

Tadayoshi AIDA and Kenichi NAMIKI

### Abstract

In this paper applying the analytical method of nonconservative elastic stability of framed structure, which has been represented by authors in Ref. 7), the influence of damping affected to the elastic stability is re-examined. It is assumed that damping force proportional to a derivative of displacement with respect to time is considered and damping matrix can be diagonalized by modal matrix.

It is confirmed that there is no effect of damping on the critical load of a elastic system which a divergence instability phenomenon is happened in the case without damping and, in a elastic system which a flutter instability phenomenon is happened in the case without damping, i.e., Beck's system, damping have a stabilizing effect if each element of the diagonalized damping matrix are equal and it have a destabilizing effect if elements of damping matrix mentioned above are different from each other. But this study make it clear that, in the problem of a column with nonconservative torque, damping have a stabilizing effect if it is large even through elements of damping matrix mentioned above are different from each other.

### 1. ま え が き

非保存的弾性系では、内部減衰が不安定化効果をもたらすことがあることを Ziegler<sup>1)</sup> により見い出されて以来、Bolotin<sup>2)</sup>, Leipholz<sup>3),4)</sup> および Herrmann<sup>5),6)</sup> により、非保存的弾性系における減衰の影響についての研究報告がなされている。

粘性減衰の影響について、これまでの研究から次のことが知られている。すなわち、有効剛性マトリックスに相当するマトリックスが対称で、減衰マトリックスは対角化され、すべて正の異なった要素をもつか、あるいは交代マトリックスの場合、ならびに、有効剛性マトリックスがわずかに非対称 (Slightly asymmetric) で、減衰マトリックスは対角化され、そのすべての要素が正で相等しい場合は、静的判定法により臨界荷重は求められる。一方、有効剛性マトリックスの非対称性が強く (Strongly asymmetric)、減衰マトリ

ックスは対角化され、そのすべての要素が正で相等しい場合および相異なる場合はいずれも動的判定法によらねばならず、特に、対角要素が相異なる場合はわずかの減衰により臨界荷重は急激に低下 (不安定化) する。ここで、非対称性の弱いマトリックス (Slightly asymmetric matrix) とは無次元荷重の変動にかかわらず、固有値は常に実数をとるか、あるいは無次元荷重の増加にともない固有値は、固有値平面において、初め実軸上を移動するが、原点を通過した後に複素数を取る (いずれもダイバージェンス型不安定となる) マトリックスである。また、非対称性の強いマトリックス (Strongly asymmetric matrix) とは、無次元荷重の増加にともない固有値は上記の平面における実軸上を移動し、原点を通過する前に複素数を取る (フラッタ型不安定となる) マトリックスである。

本論文は、著者らが文献7) で発表した骨組構造物の非保存的弾性安定性の解析法を応用し、減衰の影響を再検討したものである。減衰は速度に比例する粘性減衰のみを考慮し、減衰マトリックスはモーダルマトリックスにより対角化され得る場合限定している。

\* 土木工学科

\*\* 福山コンサルタント(株)

解析は、ダイバージェンス型不安定の例として、等分接線従動力を受ける両端単純支持柱と一端固定他端単純支持性に、フラッタ型不安定の例として、一端固定他端自由柱の自由端に集中従動力が作用する場合と同じく自由端に垂直トルクが作用する場合について行なった。

2. 運動方程式と臨界荷重の算定

減衰マトリックスを  $D$  とするとき、振動変位を考慮した場合の外乱による運動方程式は次式で表わされる<sup>7)</sup>。

$$W \frac{d^2 d}{dt^2} + D \frac{dd}{dt} + P_0(K_3 + K_4)d + K_1 d = 0 \quad \dots\dots(1)$$

減衰マトリックス  $D$  を下記のように減衰定数  $h$  で表わす。今、無載荷時の非減衰の自由振動の固有円振動数を  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ 、それぞれに対応する正規化された固有ベクトルを  $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ 、さらに、それぞれのモードに対応する減衰定数を  $h_1, h_2, \dots, h_m$  とするとき、仮定にしたがいモーダルマトリックス  $[\Phi]$  により、次のように対角される。

$$[\Phi]^T D [\Phi] = \begin{pmatrix} 2h_1\omega_1 & & & 0 \\ & 2h_2\omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2h_m\omega_m \end{pmatrix} = [2h\omega] \quad \dots\dots(2)$$

すると、減衰マトリックス  $D$  は次式で表わされる。

$$D = W[\Phi][2h\omega][\Phi]^T W \quad \dots\dots(3)$$

式(1)の外乱による振動変位を次式で表わすと、

$$d = \tilde{d}e^{\omega t} \quad \dots\dots(4)$$

式(1)は次式に書き直すことができる。

$$[\omega^2 W + \omega D + P_0(K_3 + K_4) + K_1]d = 0 \quad \dots\dots(5)$$

上式が  $\tilde{d} = 0$  以外の解を持つための条件式として次の特性方程式が得られる。

$$|K_1 + P_0(K_3 + K_4) + \omega D + \omega^2 W| = 0 \quad \dots\dots(6)$$

したがって、初期微小外乱により不安定となる最小の臨界荷重を求めるには、 $\omega$  値が負の実根あるいは負の実部をもつ複素根から正の実根あるいは正の実部をもつ複素根に変化する臨界時の  $P_0$  値を算出すればよい。式(6)の実際の数値計算は変形された次式による。

$$[[H] + \omega[E]] = 0 \quad \dots\dots(7)$$

ここで、 $[H]$  および  $[E]$  は下記の要素をもつマトリ

ックスである。

$$[H] = \begin{bmatrix} W^{-1}D & W^{-1}\{K_1 + P_0(K_3 + K_4)\} \\ -E & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}$$

$E$  は単位マトリックスである。

3. 減衰の影響

解析モデルは文献7)に示してある柱長 60cm、断面 4cm×0.2cm のアルミニウム柱である。解析に当って柱を10等分割し集中質量系にする。特に、自由端に垂直トルクを受ける場合には断面 0.6cm×0.5cm の柱を4等分割し集中質量系に置換し解析する。ここで考慮する減衰マトリックスは対角化され、対角要素がすべて等しい場合、すなわち、式(2)において  $2h_i\omega_i = 2h\omega_1$  とする場合および対角要素がすべて異なる場合、すなわち、式(2)において  $2h_i\omega_i = 2h\omega_i$  としすべてのモードに対して減衰定数を一定とする場合である。

解析結果を図示するに当り、次に示す無次元量を用いる。

無次元荷重  $\eta_P = Pl^2/EI$

$\eta_q = ql^3/EI$

無次元固有値  $\bar{\xi} = \omega l^2 \sqrt{\mu/EI}$

$R_r \bar{\xi}$ :  $\bar{\xi}$  の実部

$I_m \bar{\xi}$ :  $\bar{\xi}$  の虚部

ここで、

$P$ : 集中荷重 (kg),  $q$ : 等分布荷重 (kg/cm),

$l$ : 柱長 (cm),  $EI$ : 曲げ剛性 (kg・cm<sup>2</sup>),

$\mu$ : 柱の単位長さ当りの質量 (kg・sec<sup>2</sup>/cm<sup>2</sup>),

$\omega$ : 固有円振動数 (rad/sec).

特に、軸トルクを受ける問題においては次の量を用いる。

$M_t$ : トルク (kg・cm),  $R_r \omega$ :  $\omega$  の実部,  $I_m \omega$ :  $\omega$  の虚部.

3.1 非減衰系のダイバージェンス型不安定に及ぼす減衰の影響

3.1.1 等分布接線従動力を受ける両端単純支持柱 (Fig. 1(a))

非減衰の場合の1次および2次の固有値曲線を Fig. 2 に示す。また、対角化された減衰マトリックスの各

要素がすべて等しい場合の固有値曲線を Fig. 3 に示す。この場合の曲線は非減衰時の1次および2次の曲線を同じ量だけ  $Re \xi$  軸の負の方向に平行移動させた形と似ている。同じく、対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて異なる場合の固有値曲線を Fig. 4 に示す。この場合は非減衰時の1次および2次の曲線を量は異なるが  $Re \xi$  軸の負の方向に平行移動させた形と似ている。さらに、臨界荷重値付近における1次の固有値曲線の  $\eta_q - Re \xi$  平面への射影図を Fig. 5 に示す。

図より明らかなように、減衰が存在する場合もダイバージェンス型不安定を起し、臨界荷重は非減衰の場合

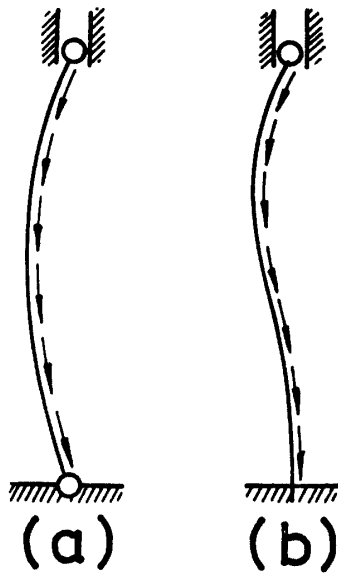


Fig. 1 Columns with the uniformly distributed tangential loads

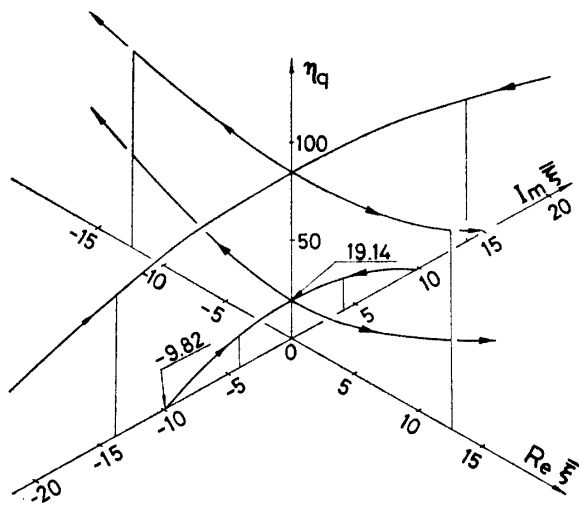


Fig. 2 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 1 (a) without damping

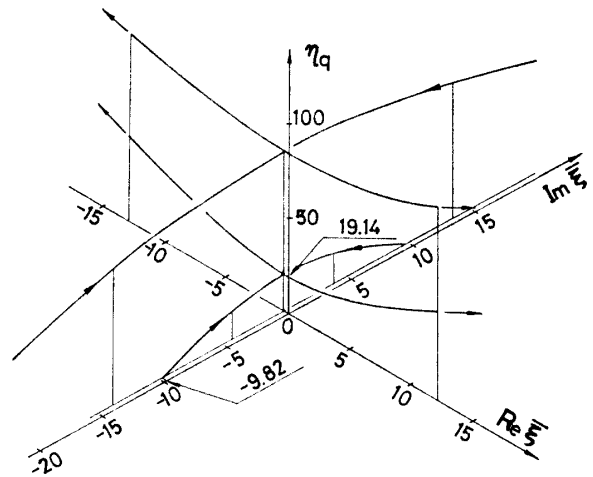


Fig. 3 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 1 (a) with damping, where each element of the diagonalized damping matrix are equal, i.e.,  $2h\omega_1$  (damping constant  $h=0.05$ )

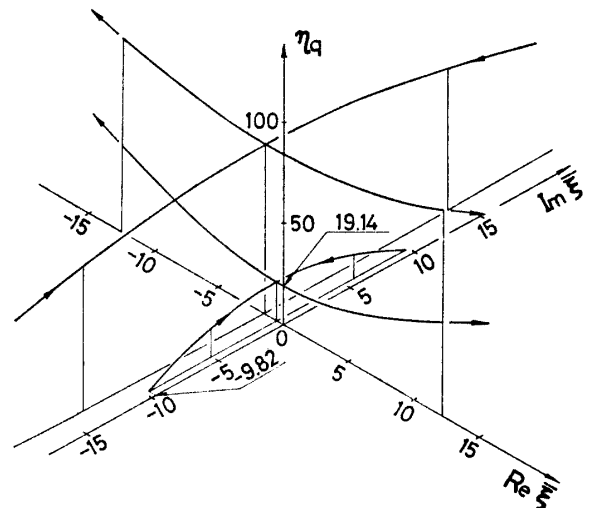


Fig. 4 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 1 (a) with damping, where elements of the diagonalized damping matrix are different from each other, i.e.,  $2h\omega_i$  (damping constant  $h=0.05$ )

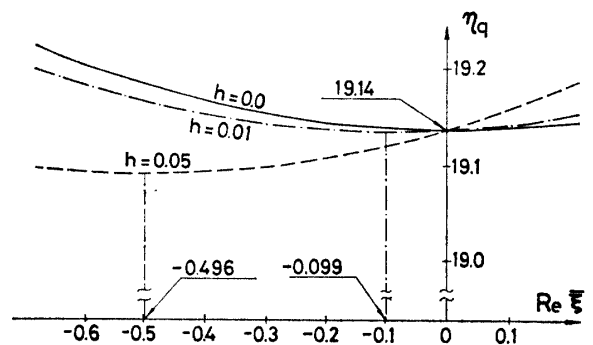


Fig. 5 Orthographic projections of eigenvalue curves of 1st. mode for a column shown in Fig. 1 (a)

合と等しい値をとる。文献7)に示した非保存力を受けるアーチも含めて、このような循環系構造物は減衰の有無にかかわらず静的解析法により臨界荷重値を求めることができる。

3.1.2 等分布接線 従動力を受ける一端固定他端単純支持柱 (Fig. 1 (b))

非減衰の場合の1次および2次の固有値曲線を Fig. 6に示す。対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて等しい場合の固有値曲線を Fig. 7に示す。こ

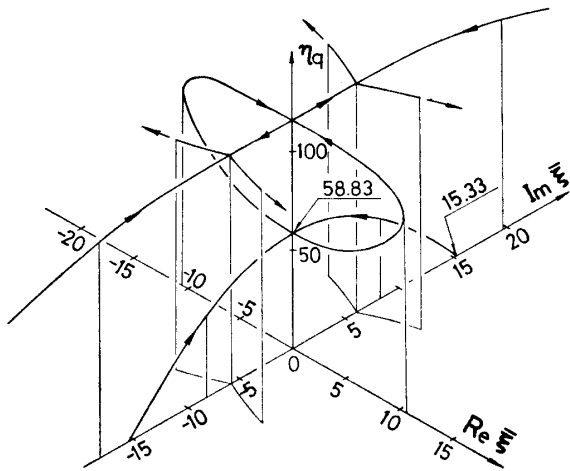


Fig. 6 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 1 (b) without damping

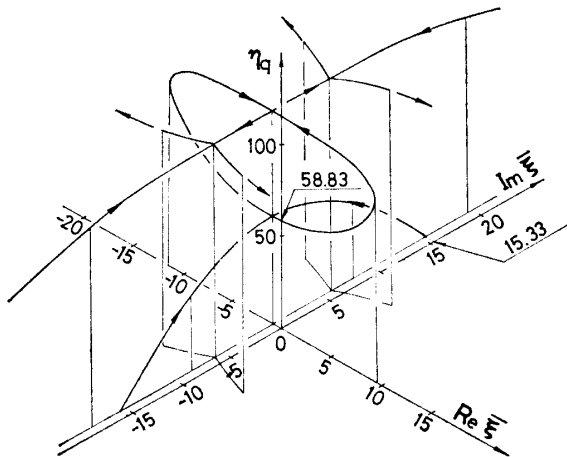


Fig. 7 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 1 (b) with damping, where each element of the diagonalized damping matrix are equal, i.e.,  $2h\omega_1$  (damping constant  $h=0.05$ )

の場合も、非減衰時の1次および2次の曲線を同じ量だけ  $Re \xi$  軸の負の方向に平行移動させた形と類似の曲線になる。上記の減衰マトリックスの各要素がすべ

て異なる場合の固有値曲線を Fig. 8 に示す。この場

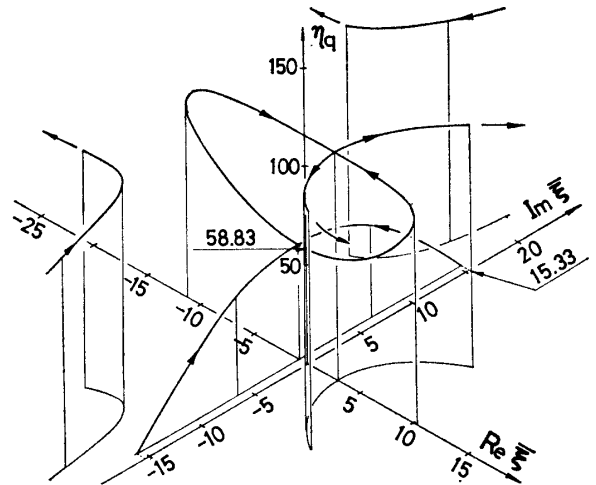


Fig. 8 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 1 (b) with damping, where elements of the diagonalized damping matrix are different from each other, i.e.,  $2h\omega_i$  (damping constant  $h=0.05$ )

合、非減衰時の1次の曲線は Fig. 7 と同様、 $Re \xi$  軸の負の方向へ移動させた形と似ているが、2次曲線はこれと異なった挙動を示し、常に  $Re \xi$  の負の側にあることより2次モードは常に安定であることがわかる。さらに、臨界荷重値付近における1次の固有値曲線の  $\eta_q - Re \xi$  平面への射影図を Fig. 9 に示す。

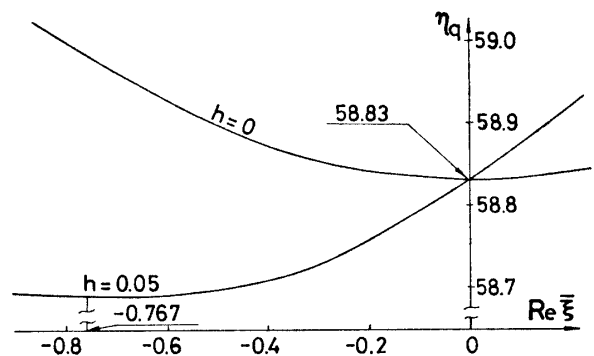


Fig. 9 Orthographic projections of eigenvalue curve of 1st. mode for a column shown in Fig. 1 (b)

この場合も、上記の図から明らかのように、前項3.1.1と同様、減衰を考慮してもダイバージェンス型不安定を起し、臨界荷重に変化はなく、静的解析法によりこれを求め得ることがわかる。

3.2 非減衰系のフラッタ型不安定に及ぼす減衰の影響

3.2.1 自由端に集中従動力を受ける一端固定他端自由柱 (Fig. 10 (a))

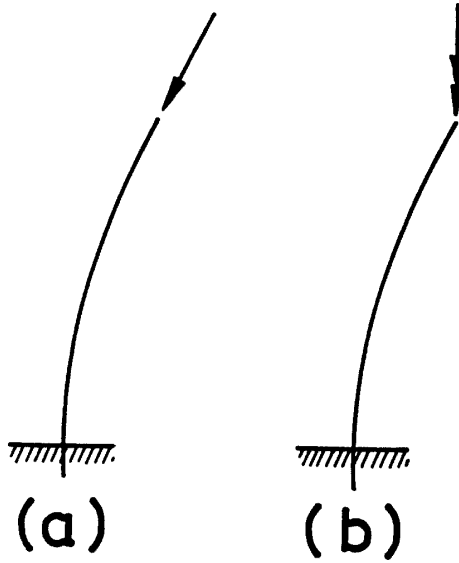


Fig. 10 Columns clamped at one end with nonconservative loads

非減衰時の固有値曲線を Fig. 11 に示す. 対角化さ

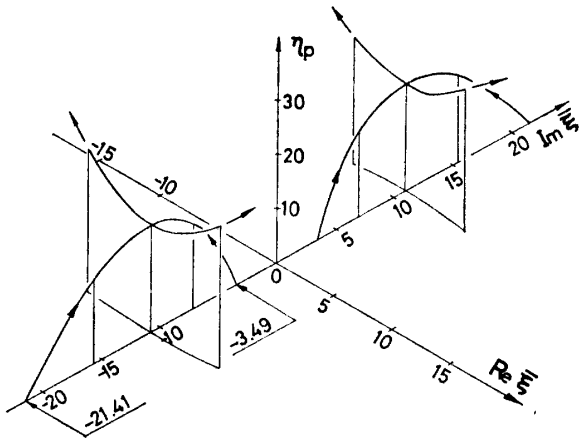


Fig. 11 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 10 (a) without damping

れた減衰マトリックスの各要素がすべて等しい場合の固有値曲線を Fig. 12 に示す. この場合は非減衰時の固有値曲線を  $Re \xi$  の負の側にそのまま平行移動させた形をとる. 臨界荷重値付近における1次の固有値曲線の  $\eta_p - Re \xi$  平面への射影図を Fig. 13 に示す. 図から明らかなように, 臨界荷重値が増大し減衰によって系が安定化されることがわかる.

対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて異なる場合の固有値曲線を Fig. 14 に示す. さらに, 臨界荷重値付近における1次の固有値曲線の  $\eta_p - Re \xi$

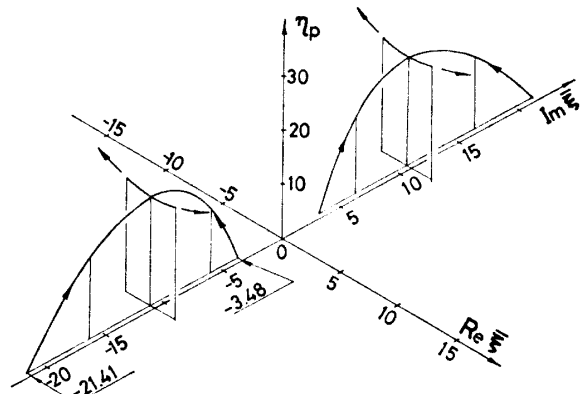


Fig. 12 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 10 (a) with damping, where each element of the diagonalized damping matrix are equal ( $h=0.05$ )

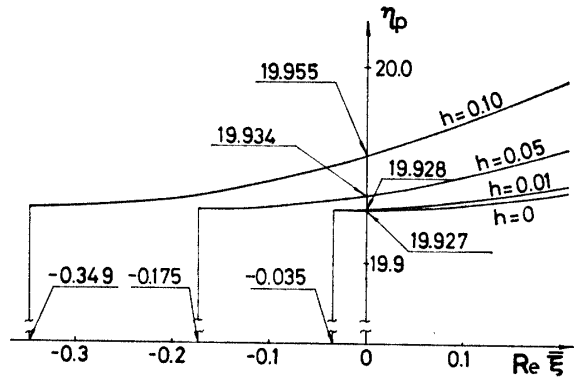


Fig. 13 Orthographic projections of eigenvalue curves of 1st. mode for a column shown in Fig. 10 (a) when each element of the diagonalized damping matrix are equal

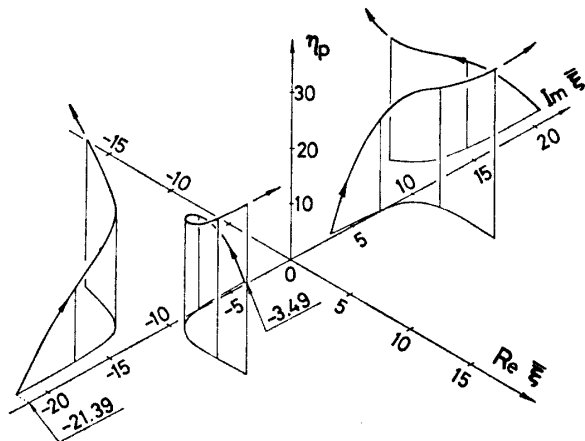


Fig. 14 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 10 (a) with damping, where elements of the diagonalized damping matrix are different from each other ( $h=0.05$ )

平面への射影図を Fig. 15 に示す. 図より明らかなよ

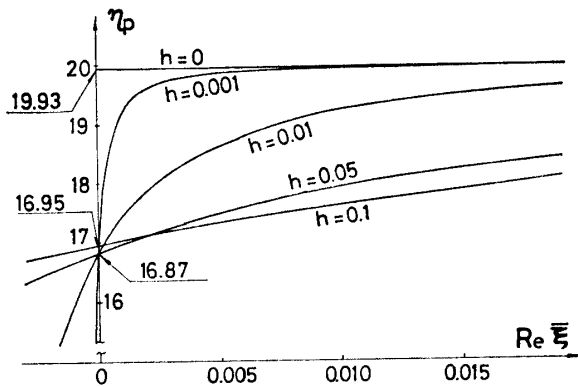


Fig. 15 Orthographic projections of eigenvalue curves of 1st. mode for a column shown in Fig. 10 (a) when elements of the diagonalized damping matrix are different from each other

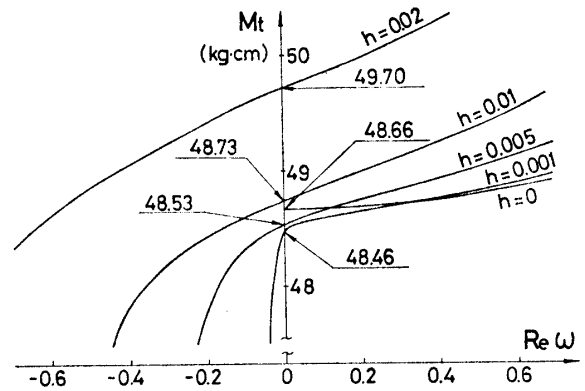


Fig. 17 Orthographic projections of eigenvalue curves of 1st. mode for a column shown in Fig. 10 (b) when elements of the diagonalized damping matrix are different from each other

うに、減衰をわずかでも考慮すると、臨界荷重値は急激に低下しその値は減衰定数が小さい間は一定値をとる。すなわち、減衰を考慮することにより不安定化が起ることがわかる。

以上より明らかなように、減衰を考慮してもこの場合はフラッタ型不安定を起すが、減衰の安定化効果あるいは不安定化効果は減衰マトリックスの形に影響されることがわかる。

### 3.2.2 自由端に集中垂直軸トルクを受ける一端固定他端自由柱 (Fig. 10 (b))

非減衰時の固有値曲線および対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて異なる場合の固有値曲線を Fig. 16 に示す。さらに、臨界荷重値付近における1次の固有値曲線の  $M_t$ - $Re \omega$  平面への射影図を Fig. 17

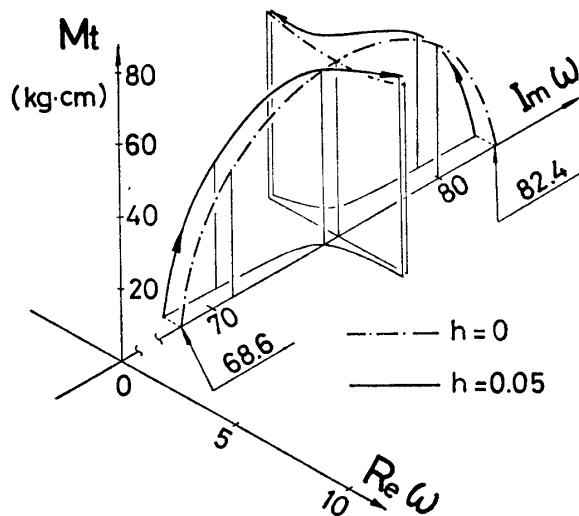


Fig. 16 Eigenvalue curves of a column shown in Fig. 10 (b) with no damping and damping

に示す。図より明らかなように、減衰を考慮する際、ある程度小さい減衰力に対しては不安定化されるが、減衰力が大きい場合は安定化されることがわかる。

対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて等しい場合は、ここには図示しないが、自由端に集中従動力を受ける一端固定他端自由柱(3.1.1)と同様になり、減衰を考慮することにより安定化する。

この場合も、減衰を考慮してもフラッタ型不安定を起し、対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて等しい場合は減衰に安定化効果があるが、上記各要素がすべて異なる場合は減衰が小さい時に不安定化効果が、大きくなると安定化効果があることがわかる。

## 4. 結 び

骨組構造物の非保存的弾性安定性の解析法を用いることにより、これまでに明らかにされてきた減衰の影響に関する事項を確かめるとともに、非保存軸トルクを受ける柱の安定性に及ぼす減衰の影響を明らかにした。すなわち、非減衰系のダイバージェンス型不安定には減衰力は何ら影響を及ぼさず、臨界荷重値は静的解析法により算出される。非減衰系のフラッタ型不安定には、対角化された減衰マトリックスの各要素がすべて等しい減衰力によって系は安定化されるが、上記マトリックスの各対角要素がすべて異なる微小減衰力によっては不安定化される。ただし、自由端に集中垂直軸トルクを受ける一端固定他端自由柱も含めて、ある程度大きい減衰力によってはむしろ安定化されることがわかった。

本研究の数値計算は、九州大学大型計算機センター

の FACOM 230-75 および 山口大学 電子 計算機室の  
FACOM 230-28 により倍精度計算したものである。

参 考 文 献

- 1) Ziegler, H.: Ing. -Arch., **20**, 49 (1952).
- 2) Bolotin, V. V.: Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Pergamon Press, N. Y., 1963.
- 3) Leipholz, H.: Ing. -Arch., **33**, 308 (1964).
- 4) Leipholz, H.: Stabilitätstheorie, B.G. Teubner, Stuttgart, 1968. (Stability Theory, Academic Press, N. Y., 1970)
- 5) Herrmann, G. and Jong, I. -C.: Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., **32**, 592 (1965).
- 6) Herrmann, G. and Jong, I. -C.: Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., **33**, 125 (1966).
- 7) 會田忠義, 波木健一: 山口大学工学部研究報告, **26**, 159, (1975)

(昭和 51 年 4 月 15 日 受理)