確率点過程の生成について

平　田　威　彦*

Generation of Stochastic Point Processes

Takehiko HIRATA

Abstract

Several methods for generating stochastic point processes have been reported so far. This paper describes a method for generating them by modulating stochastically (or, sampling with the time variant probability) the intervals between events which distribution is known. This notion is based on the variable probability (or, the probability modulation) which principle is different from above reports.

The form of the probability density function for the distribution of intervals generated by this method is considerably unrestricted, ranging from the 0 th order Markov process to the higher order Markov process. It is also possible to apply this thinking of the method to hardware and realize the point processes.

As regards the field of application of the stochastic point processes generated by this method, the simulation of the pulse sequences flowing in the nervous system, the queueing systems, the reliability engineering, etc. are considered.

1. まえがき

事象が繰返し生起するときその時間々隔が或る確率分布に従う場合このような系列は確率点過程或いは点間隔確率過程 (stochastic process of interpoint intervals) と呼ばれ，神経パルスの系列，待ち行列系での到着系列，機械の故障発生系列，地震の発生系列等多くの現象に見られる．特にこれらの中神経パルス系列は多重マルコフ過程であることがわかっている[1]． これらの系列の同定や応用においてそのような系列を生成することは重要である．その生成に関しては計算機によるシミュレーションの方法[2] があり，かなり広範囲に種々の確率点過程を生成することが可能である．この他にもハードウェア及びソフトウェアによる方法が幾つかある[3)4)5)6)]が，それらによって生成出来る確率点過程の種類はかなり限定されたものである．それに対しここに述べる方法は前記の何れの方法とも全く原理を異にし，計算機によって実時間実現することも出来るが，高速度が要求されるときはハードウェアでも実現出来るものである．その基本的考え方は既知の点間隔確率分布の点系列を発生させ，その点を時変確率的に抽出することによって新たな点系列を得るというものである．これによって実現出来る系列の種類は比較的広範囲に亙り，ガンマ分布，切断正規分布などから任意の次数のマルコフ過程に及ぶ．

本文は第1節に先ず確率点過程生成の基本的方法について，第2節に Wold のマルコフ過程の生成について述べる．

2. 確率点過程の生成

いま間隔分布のわかっている確率点過程の系列を1次系列と呼び，その間隔分布の確率密度函数を $g(t)$ とする．するとその間隔が τ 以内である確率 $G(\tau)$ は

$$G(\tau)=\int_0^\tau g(t)dt$$

であり，従って間隔が τ を越える確率は $1-G(\tau)$ であるがこれを次のように置く．

$$1-G(\tau)\equiv\exp\left[-\int_0^\tau \eta(t)dt\right] \qquad \cdots(1)$$

但し，$\eta(t)$ はハザード函数で，事象が区間 $(0, \tau]$ 内に1回も起らないとき続く区間 $(\tau, \tau+d\tau]$ 内に1回生起するという条件付き確率が $\eta(\tau)d\tau$ であると定義されているものである．従って，

$$[1-G(\tau)]\cdot\eta(\tau)d\tau=g(\tau)d\tau$$

なる関係より一般に

$$\eta(t)=g(t)/\{1-G(t)\}$$

* 電気工学科

であり，この $\eta(t)$ を用いれば密度函数 $g(t)$ は

$$g(t)=\eta(t)\cdot\exp\left[-\int_0^t\eta(t)dt\right] \quad\cdots(2)$$

と表わせる．今は簡単のためこの1次系列のハザード函数 $\eta(t)$ は t に無関係に一定値 μ であるとすると，密度函数は (2) 式より $g(t)=\mu\cdot\exp(-\mu t)$ となり，指数分布となる．このような系列は計算機において計算時間が $1/\mu$ より充分小なる場合実時間実現出来る．ハードウェアで実現するには最大周期系列（M 系列）発生器のクロック・パルスの周波数を出来るだけ高くし，得られた M 系列信号を固定確率回路[7] に通して無作意抽出することによって無周期化すればよい．μ を変えるにはクロック・パルスの周波数を調整する．この1次系列の模様を Fig.1 (a) に書く．

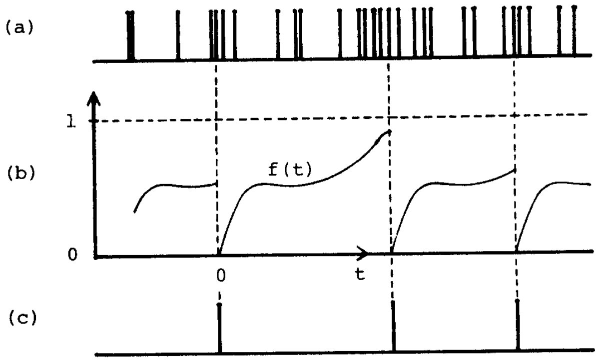

Fig.1 (a) Input point sequence (b) Time variant probability (c) Output point sequence

次に，この1次系列の中の或る1点が抽出されたとし，それを例えば Fig.1 (c) の3つの時点の中の左端の時点とする．この点が抽出された瞬間から時変確率 $f(t)$ が始動し（例えば Fig.1 (b) の曲線），その確率 $f(t)$ によって1次系列を抽出することにする．ここで，$f(t)$ は全ての t において

$$0\leqq f(t)\leqq 1$$

であって，この確率に従って1次系列を抽出するには，例えば精度 1%の場合 t 時刻において00から99までの100 個の数から成る一様乱数 R を発生させ，$R\leqq 100\cdot f(t)$ ならば t 時刻に生起した1次系列の点は抽出されたとし，$R>100\cdot f(t)$ ならば抽出されなかったとすることによって等価的に実現される．一旦1次系列の点が抽出されれば，その時点を次のサイクルの $t=0$ として同様のことが繰返される．かくして出力2次系列が得られる．ハードウェアでこれを実現するには可変確率回路[7]，即ち，パルスの通過確率をアナログ入力信号によって変調することの出来る回路（確率変調回路）のアナログ入力信号として別にアナログ演算回路で生成した $f(t)$ を用いる．

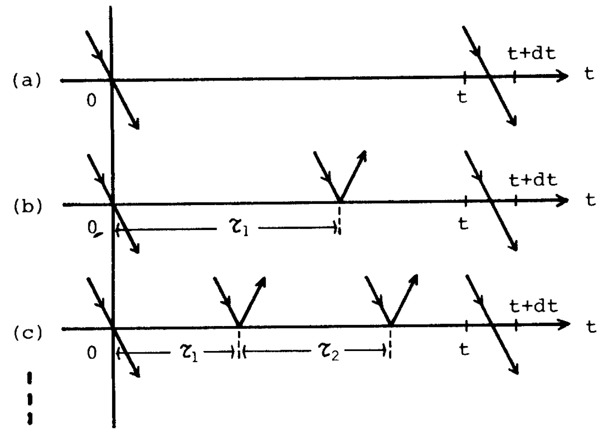

Fig.2 Disjointed aspects of output sequence

$f(t)$ の形によって生成しようとする2次系列の間隔分布の形が以下のようにして決まる．

先ず Fig.2 (a) のように $(0, t]$ 区間内には1次系列の生起は1つもなく，続く $(t, t+dt]$ 内に1つ生起して，それが2次系列の点として抽出される確率を $P_0(t)$ とすれば

$$P_0(t)=\exp[-\mu t]\cdot\mu dt\cdot f(t) \quad\cdots(3)$$

また，(b) 図のように $(0,t]$ 区間内の例えば τ_1 に1次系列の点が生起したけれどもそれは2次系列に抽出されず，その後 $(t, t+dt]$ 内に1つ生起して，それが抽出される確率は

$$\exp[-\mu\tau_1]\cdot\mu d\tau_1\cdot\{1-f(\tau_1)\}\cdot\exp[-\mu(t-\tau_1)]\cdot\mu dt\cdot f(t)$$

従って，τ_1 が0から t まで全ての場合について加えれば $(0, t]$ 内に1次系列の点が1つ生起したけれども2次系列に抽出されず，且つ，$(t, t+dt]$ 内に1つ生起してそれが抽出される同時確率となる．これを $P_1(t)$ と書けば

$$\begin{aligned}P_1(t)&=\int_0^t\exp[-\mu t]\cdot\{1-f(\tau_1)\}\cdot\mu^2\cdot f(t)dtd\tau_1\\&=\left[\int_0^t\{1-f(\tau_1)\}d\tau_1\right]\cdot\mu^2\cdot\exp[-\mu t]\cdot f(t)dt \quad\cdots(4)\end{aligned}$$

同様にして，(c) 図のように $(0,t]$ 内に2個の1次系列の点が生起する場合は，

$$\begin{aligned}P_2(t)&=\int_0^t\int_0^{t-\tau_1}\exp[-\mu t]\cdot\{1-f(\tau_1)\}\cdot\{1-f(\tau_1+\tau_2)\}\cdot\mu^3\cdot f(t)dt\,d\tau_2d\tau_1\\&=\left[\int_0^t\int_0^{t-\tau_1}\{1-f(\tau_1)\}\cdot\{1-f(\tau_1+\tau_2)\}d\tau_2d\tau_1\right]\cdot\mu^3\cdot\exp[-\mu t]\cdot f(t)dt \quad\cdots(5)\end{aligned}$$

以下同様にして $(0,t]$ 区間内に無限個の1次系列が生起する場合を求めて，式 (3)，(4)，(5)，…を全て加え合せれば，結局 $(0,t]$ 間には1つも1次系列の点が抽出されず，且つ，$(t,\ t+dt]$ 内に1つ生起して，それが2次系列の1つの点として抽出される同時確率が求まる．即ち，

$$\Big[1+\mu\int_0^t\{1-f(\tau_1)\}d\tau_1+\mu^2\int_0^t\int_0^{t-\tau_1}\{1-f(\tau_1)\}\cdot\{1-f(\tau_1+\tau_2)\}d\tau_2d\tau_1+\cdots\Big]\cdot\exp[-\mu t]\cdot\mu\cdot f(t)dt \quad\cdots(6)$$

(6) 式中の左の部分を

$$\Big[1+\mu\int_0^t\quad+\mu^2\int_0^t\int_0^{t-\tau_1}\quad+\cdots\Big]\cdot\exp[-\mu t]\equiv\overline{P(t)} \quad\cdots(7)$$

と置けば，これは $(0,t]$ 間には1つも1次系列の点が抽出されない確率であることが式 (3)，(4)，(5)，…の成立の過程から解る．従って，(6) 式を (7) 式で除した商 $\mu\cdot f(t)dt$ は $(0,t]$ 間に1つも2次系列として抽出されないとき続く $(t,\ t+dt]$ 内に1つ2次系列として抽出される条件付き確率を表わすこととなる．即ち，2次系列として抽出される点の間隔分布のハザード函数を $\zeta(t)$ とすると

$$\zeta(t)dt=\mu\cdot f(t)dt \quad\cdots(8)$$

従って，出力2次系列の間隔分布の確率密度函数は

$$p(t)=\mu\cdot f(t)\cdot\exp\Big[-\mu\int_0^t f(t)dt\Big] \quad\cdots(9)$$

となる．かくして，任意の時間函数 $f(t)$ を選ぶことによりかなり任意の間隔分布の確率密度函数を得ることが出来る．

例として，$f(t)=K$（但し，K は $0\leqq K\leqq 1$ なる定数）とすれば

$$p(t)=K\mu\cdot\exp[-K\mu t]$$

なる指数分布が得られ，この系列の点を k 番目毎に抜き出せば k アーラン分布が得られる．また，

$$f(t)=(N/\mu)t^n\leqq 1$$

とすれば

$$p(t)=Nt^n\cdot\exp\,[-\{N/(n+1)\}t^{n+1}] \quad\cdots(10)$$

なるワイブル分布が得られる．但し，時間が経過して $(N/\mu)t^n=1$ となる t を越えるとその後は $f(t)=1$ であるので生起した1次系列の点は必ず抽出され，出力2次系列の間隔の確率密度は (10) 式に従わなくなり，それから外れた分が誤差となる．この誤差の値は(10)式を t について $\sqrt[n]{\mu/N}$ から∞まで積分すれば得られる．従って，誤差の値を指定して μ の値を選ぶことが出来る．μ が大きい程誤差の値は小さい．

また，密度函数の形が Γ 分布のように

$$p(t)=h(t)\cdot\exp[-\lambda t]$$

である場合には，

$$-\mu\int_0^t f(t)dt\equiv-\lambda t+\log q(t)$$

と置けば

$$\mu\cdot f(t)=\lambda-q'(t)/q(t) \quad\cdots(11)$$

であるから

$$\begin{aligned}\mu\cdot f(t)\cdot\exp\Big[-\mu\int_0^t f(t)dt\Big]&=\{\lambda-q'(t)/q(t)\}\cdot\exp[-\lambda t+\log q(t)]\\&=\{\lambda\cdot q(t)-q'(t)\}\cdot\exp[-\lambda t]\end{aligned}$$

従って，

$$\lambda\cdot q(t)-q'(t)=h(t) \quad\cdots(12)$$

となるような $q(t)$ を求めて (11) 式に代入すれば時変確率 $f(t)$ の形が求まる．この際も誤差の値を指定して μ を選ぶことが出来る．

その他切断正規分布など多くの分布が上に述べた方法と同様にして実現出来るが，上述の方法で実現出来ない確率密度函数の例としては対数正規分布のような $t=0$ のとき $f(t)$ の値が∞をとるものがある．任意に確率密度函数の形が与えられた場合には，その形に応じて試行錯誤的に実現方法を考えねばならない．

3. Wold のマルコフ過程の生成

いま着目中の点系列の i 番目の間隔が τ_i である確率密度が1つ前の間隔 τ_{i-1} のみに依存するときこの系列は Wold のマルコフ過程と呼ばれている[2),8)]が，ここでは便宜上1重マルコフ点過程と呼び，その推移確率密度を $p(\tau_i|\tau_{i-1})$ と書くことにする．この系列を実現するには時変確率として τ_{i-1} を含む函数を選べばよい．ハードウェアでは切替スイッチ及び瞬間短絡スイッチをアナログ演算回路に組込み一時記憶を含む回路を構成することによって実現出来る．

例として，現在進行する時間を τ_i として，時変確率 $f(\tau_i,\ \tau_{i-1})=M(\tau_i+\tau_{i-1})$ なる場合には出力2次系列の確率密度は (9) 式より

$$p(\tau_i|\tau_{i-1})=M\mu(\tau_i+\tau_{i-1})\cdot\exp[-M\mu(\tau_i^2+2\tau_{i-1}\cdot\tau_i)/2] \quad\cdots(13)$$

となる．

一般に n 重マルコフ点過程の確率密度を $p(\tau_i|\tau_{i-1},\ \tau_{i-2},\cdots,\ \tau_{i-n})$ とするとき，この系列を実現するには上述と同様時変確率として $\tau_{i-1},\ \tau_{i-2},\ \cdots,\ \tau_{i-n}$ を含む函数を選べばよい．ハードウェアでは切替及び瞬間短絡のための夫々 $(n+1)$ 極のロータリ・スイッチをアナログ演算回路に組込み一時記憶を含む回路を構成すればよい．

例として，時変確率 $f(\tau_i,\ \tau_{i-1},\ \cdots,\ \tau_{i-n})=M(\tau_i+\tau_{i-1}+\cdots+\tau_{i-n})$ の場合には

$$p(\tau_i \mid \tau_{i-1}, \cdots \tau_{i-n}) = M\mu(\tau_i + \tau_{i-1} + \cdots + \tau_{i-n}) \cdot \exp[-M\mu(\tau_i^2 + 2\tau_{i-1} \cdot \tau_i + \cdots + 2\tau_{i-n} \cdot \tau_i)/2] \tag{14}$$

が得られる.

4. むすび

以上の0重マルコフ点過程と1重マルコフ点過程の場合の夫々1つずつの例についてハードウェアで実験を行ない，実験データについて先ずマルコフ性の検定[9),1)]を行なった結果，前者に関しては0重マルコフ性を有意水準 97.5% でも棄却出来ず，後者に関しては0重マルコフ性を 5%有意で棄却，1重マルコフ性が5%有意で採択された，次に，実験データと実験回路の設定に用いた確率密度函数の式から得られる推定値との間で適合度検定を行なった結果，前者に関しては30%有意で，後者に関しては1%有意で適合することとなった．以上より実験回路はほぼ理論計画通りに動作するものであると判断される．

本方法においては選ばれる時変確率の函数形に応じて得られる確率点過程の間隔分布の種類は比較的広範囲に亙り，また，0重から多重に及ぶマルコフ過程を作ることが出来る．ここでは1次系列として指数分布点過程のみを用いたが，指数分布以外の1次系列を用いる場合どのような確率点過程が得られるかは今後の問題である．

終りに有益な御討論，御助言を頂いた九州大学工学部田町常夫教授，本学蛯名良雄，高浪五男両教授，古賀和利講師及び現在 NHK 勤務森近治彦氏，実験装置の作成と測定にお骨折り頂いた桐原昭雄技官，論文内容に御批評を賜わった九州大学理学部加納省吾教授更に数々の有益な文献をも賜わった九州工業大学磯泰行教授及び矢鳴虎夫助教授に厚く感謝する．

参 考 文 献

1) H. Nakahama, et al.: Biol. Cybernetics, **25**, 209(1977).
2) 矢鳴虎夫，中原潤一郎：九州工大研報（工学），**29**，125 (1974).
3) S. Nakamura: Proc. IEEE, **62**, 651 (1974).
4) 佐藤拓栄，岸本成雄：計測と制御，**4**，38 (1965).
5) 山下一美，岡本次郎：電子通信学会論文誌，**53-C**，198 (1965).
6) H.N. El-Ghoroury, S.C. Gupta: IEEE Trans., Comput., **C-21**, 1119 (1972).
7) 平田威彦：昭和49年電気四学会中国支部連大，62308 (1974).
8) D.R. Cox, P.A.W. Lewis: "The Statistical Analysis of Series of Events", Methuen (1966), p.183.
9) 森村英典，高橋幸雄：マルコフ解析，日科技連，(1979) p.209.

（昭和 54 年 10 月 15 日 受理）