

半径方向の荷重を受ける円環の固有振動数

日 高 照 晃*・杉 本 信 行*

On the Natural Frequencies of Circular Rings Subjected to Radial Load Sets

Teruaki HIDAOKA and Nobuyuki SUGIMOTO

Abstract

The frequencies for free rings have been studied by many authors. But there appear few literatures which deal with the vibrations of rings considering any stiffened conditions. Present report developed experimentally the natural frequencies of circular rings subjected to radial load sets.

Forty-six steel rings were investigated; whose rim cross sections were rectangular; ratio of rim thickness to radius of curvature of center line of rim h/r 0.029~0.128; width of rim b 8.1~100.0 mm. These samples were stressed in tension subjected to radial two or three loads and were vibrated by shaking apparatus. Then their natural frequencies of rings were measured. Increasing tension loads, the natural frequencies of rings were larger and larger. So the relationship between tension loads and the natural frequencies of rings were expressed by one experimental equation.

1. 緒 言

円環状部品は今日多くの機械に用いられているが、その機械装置の騒音・振動に関連して円環の振動が問題になることがある。それゆえ、円環の固有振動数に関する研究は国内外を問わず数多くなされているが¹⁾²⁾、自由状態における円環の固有振動数についての実験、あるいは理論的な扱いをした論文が多いようである。実際に機械部品として用いられる円環が無拘束状態で使われることはまれであり、支持、固定あるいは外力が作用した状態で使用されるのが普通である。円環に拘束条件を付加した場合の固有振動数については、S. S. Rao and V. Sundararajan³⁾が円環の周囲をN箇所支持した時の理論解を、五十嵐⁴⁾は玉軸受の騒音に関して、数種類の玉軸受に半径方向の荷重を掛けた場合と軸方向の荷重を掛けた場合の固有振動数をそれぞれ実験的に求めている。また遊星歯車装置に使われている内歯車も円環状部品と考えられるが、運転中における内歯車の共振周波数は通常の内歯車の固有振動数より約30%高くなるという報告がある⁵⁾。これは内歯車と遊星歯車のかみあいによる歯面荷重により、

内歯車が拘束されるためである。文献(3)(4)(5)のいずれも自由状態における円環の固有振動数より拘束状態における円環の固有振動数の方が高くなることを示しているが、文献(3)を除いて定性的領域にとどまっている。

そこで本研究は文献(5)で述べられた内歯車を研究の対象として、円環の半径方向に荷重の大きさを種々変えて掛け、荷重の大きさと円環の固有振動数の関係を実験より定量的に明らかにすることを目的として行った。そのため形状寸法の異った計46個の長方形断面を有する円環を用い、加振器の強制振動によってまずそれらの自由状態における固有振動数を求めた。次に円環の半径方向に180°及び120°間隔の引張荷重を掛け、荷重の大きさを段階的に増加させた場合について、各荷重に対する固有振動数を求め、自由状態での固有振動数と比較すると共に、2方向荷重による固有振動数については、荷重の大きさと固有振動数の関係の実験式を導いた。

2. 固有振動数の理論式と振動モード

円環の曲げ振動には半径方向の変位を伴う面内振動と、軸方向の変位とねじりの両方を伴う面外振動の二

* 生産機械工学科

つの場合があるが、本実験では面内振動だけを取り扱った。自由状態で面内振動をする円環固有振動数の理論式は、さまざまな仮定のもとに導かれたものがあるが、振動による円環の変形は曲げのみによるもので、せん断力、回転慣性、また円環中心線の伸びを無視した理論式として(1)式⁶⁾がある。

$$\omega = \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \sqrt{\frac{EgI}{\gamma Ar^4}} \equiv K_0 \sqrt{\frac{EgI}{\gamma Ar^4}} \quad (1)$$

ただし ω : 円環の角固有振動数

E : 円環材質の弾性係数

g : 重力加速度

I : 円環断面二次モーメント

γ : 円環材質の比重量

A : 円環断面積

r : 円環の平均半径

n : モード数 (円環円周上の完全波形の数)

K_0 : 振動モードによる定数

したがって(1)式は薄肉円環に限定される。これに対して円環のせん断変形及び回転慣性を考慮した式として、文献(2)、(3)などの式がある。これらの理論式から長方形断面を有する円環の面内固有振動数は、円環形状のうち平均半径と円環肉厚の値で決定され、円環幅は固有振動数と無関係であるといえる。

振動モード $n=2$ 及び $n=3$ について実験を行うので、両者の振動モードと円環円周ひずみの関係を Fig. 1 に示した。これより実験的に求めた固有振動数のモードは、(1)式で求めた計算値と Fig. 1 の S1, S2 の 2 点のひずみを同時測定し、その位相から判別した。

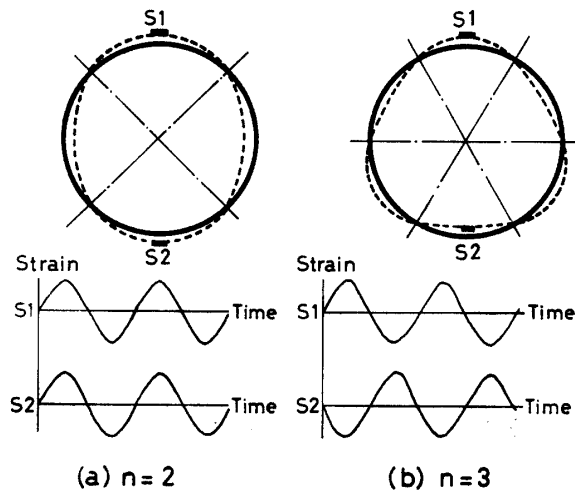


Fig. 1 Mode shapes and phase.

3. 実験方法

3.1 円環の諸元

実験に使用した円環の形状寸法は、平均半径 $r=53.03\sim 105.65$ mm, 円環肉厚 $h=3.06\sim 11.27$ mm, 円

Table 1 Ring shapes

Ring name	Mean radius r mm	Rim thickness h mm	Rim width b mm	h/r	
S	1	54.23	4.47	9.95	0.082
	2	53.42	6.10	10.05	0.114
	3	53.04	6.78	10.00	0.128
	4	54.24	4.61	19.95	0.085
	5	53.41	6.22	20.00	0.116
	6	53.04	6.80	20.05	0.128
	7	54.28	4.59	30.05	0.085
	8	53.40	6.14	30.10	0.115
	9	53.05	6.78	30.00	0.128
	10	54.23	4.56	40.05	0.084
	11	53.41	6.21	40.10	0.116
	12	53.03	6.80	40.10	0.128
	13	54.22	4.47	59.10	0.082
	14	53.40	6.14	60.10	0.115
	15	53.05	6.78	60.05	0.128
M	1	66.92	4.26	10.05	0.064
	2	65.91	6.34	10.00	0.096
	3	65.11	7.90	10.10	0.121
	4	66.94	4.28	20.10	0.064
	5	65.90	6.33	20.05	0.096
	6	65.11	7.90	20.10	0.121
	7	66.90	4.25	29.95	0.064
	8	65.88	6.40	30.00	0.097
	9	65.09	7.89	30.15	0.121
	10	66.94	4.28	40.00	0.064
	11	65.87	6.40	40.00	0.097
	12	65.11	7.86	40.00	0.121
	13	66.90	4.25	60.05	0.064
	14	65.89	6.34	60.00	0.096
	15	65.10	7.86	60.05	0.121
L	1	104.62	3.09	8.10	0.030
	2	105.43	4.00	8.10	0.038
	3	104.61	3.06	11.95	0.029
	4	105.65	4.00	12.15	0.038
	5	105.19	6.03	20.10	0.057
	6	102.80	9.21	20.05	0.090
	7	102.32	11.25	20.00	0.110
	8	104.97	5.94	40.00	0.057
	9	103.12	9.19	40.00	0.089
	10	102.29	11.18	40.00	0.109
	11	105.02	5.95	60.05	0.057
	12	102.33	11.27	60.00	0.110
	13	105.09	5.99	80.05	0.057
	14	102.34	11.27	80.05	0.110
	15	102.29	11.20	100.00	0.109
	16	103.17	9.23	100.00	0.089

環幅 $b=8.10\sim 100.00$ mm, 平均半径に対する肉厚の比 $h/r=0.029\sim 0.128$ であり, これらを Table. 1 に示す. これら46個の円環の外径の大きさにより小さい方から S 型, M 型, L 型と3つに分類し, さらに円環幅の小さい方から, かつ肉厚の薄いものから順次番号をつけた. 円環素材は圧力配管用炭素鋼管を使用した.

3.2 自由状態における固有振動数の測定

表面に180°間隔で2枚のひずみゲージを貼り付けた円環の1点を Fig. 2 に示すように細いひもでつり上げ, これを加振器に取り付け加振した. 固有振動数測定のプロック線図を Fig. 3 に示す. 加振器の周波数を低い方から高い方へ徐々に上げながら円環を加振すると, ある周波数で急激にひずみ量が大きくなる. これをシンクロスコープでモニターし, その時の周波数を周波数カウンターで読みとり, 固有振動数の測定を行った.

なお L 型の円環についてはモード2, モード3の固有振動数を測定したが, 加振器の可変周波数が5~2500 Hz であるため S 型, M 型の円環についてはモード3の固有振動数は測定できず, モード2の固有振動数のみ測定した.

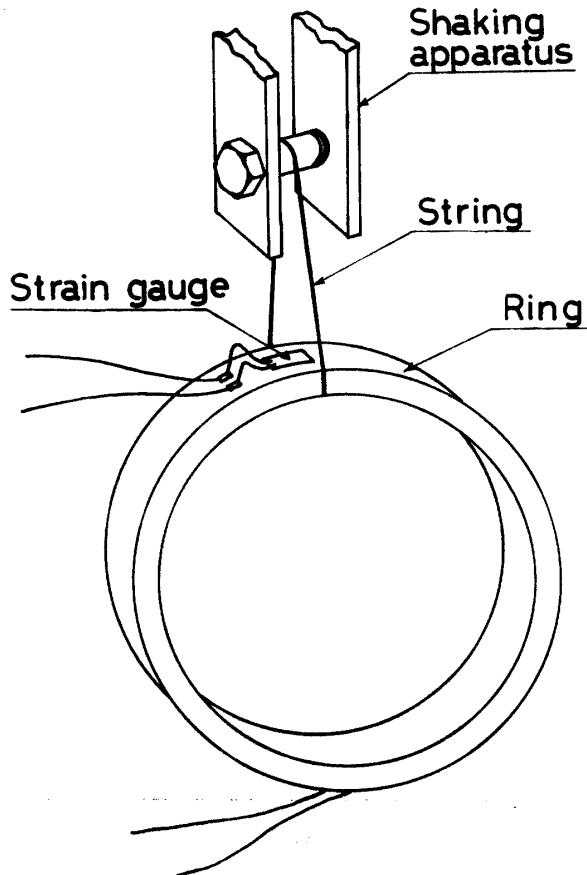


Fig. 2 Setting method of ring.

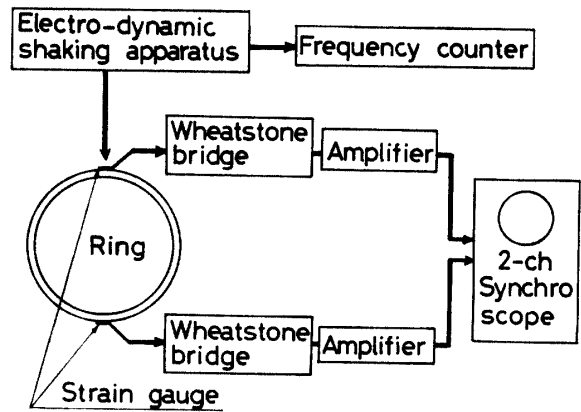


Fig. 3 Measuring apparatus diagram.

3.3 荷重を掛けた場合における固有振動数の測定

円環の半径方向に180°及び120°間隔でそれぞれ2方向, 3方向の引張荷重を掛けた. 純粋に荷重の大きさと固有振動数の関係を求めるためには, 荷重を掛けることによって円環に新たな慣性力が生じないように考慮する必要がある. そのため質量が円環に対して非常に小さく, またある程度の引張荷重に耐えることのできる0.6mm径のワイヤ(つり糸36番)の一端を直接円環に結びつけ, 他端に重錘をつりさげることによって, 円環に引張荷重を掛けることにした. この装置のモデル図を Fig. 4 に示す. Fig. 4 (a) は2方向の荷重を掛けた場合で, (b) は3方向の荷重を掛けた場合である. 円環によってそれぞれ直径が違うので, 荷重の作用線が円環の中心を通り180°または120°等間隔になるよう, プーリをスライドしてこの調節を行った. 両装置とも必要な大きさの荷重を掛けた後は, 振動による重錘の慣性力が生じないように, またワイヤのばね定数が小さくなるように, 円環からできるだけ離れたワイヤの一点を基礎に固定した.

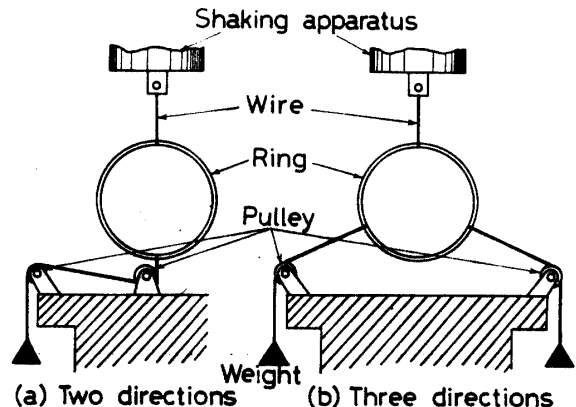


Fig. 4 Load sets method.

実験に使用したワイヤの負荷荷重の最大が 20 kgf 程度に制約されるので、2 方向及び 3 方向の引張荷重を 1.8 kgf, 2.8 kgf, 3.8 kgf, 4.8 kgf, 5.8 kgf, 6.8 kgf, 11.8 kgf, 16.8 kgf, 21.8 kgf の 9 ステップの荷重について実験を行った。そして同一円環についてそれぞれの荷重を掛けた時の固有振動数を Fig. 3 に示した測定法と同様な方法で求めた。このとき 2 方向荷重を掛けた場合については $n=2, 3$ 方向荷重を掛けた場合は $n=3$ の固有振動数を測定した。

4. 実験結果及び考察

4.1 自由状態の固有振動数

長方形断面を有する円環では (1) 式に $I=bh^3/12, A=bh$ を代入すると (2) 式を得る。ただし、 b は円環幅、 h は円環肉厚を表す。

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \sqrt{\frac{Egbh^3/12}{\gamma bhr^4}} \\ &= \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \sqrt{\frac{Egh^2}{12\gamma r^4}} \end{aligned} \quad (2)$$

また (2) 式の両辺を $(Eg/\gamma r^2)^{1/2}$ で除し無次元化すると

$$\omega r \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}} = \frac{1}{\sqrt{12}} \frac{n(n^2-1)}{\sqrt{n^2+1}} \frac{h}{r} \quad (3)$$

ここに (3) 式の左辺は無次元固有振動数と呼ばれ、円環の平均半径 r を一定と考えた場合、固有振動数は円環肉厚 h に比例することを意味する。Fig. 5 は横軸に平均半径 r に対する肉厚の比 h/r を、縦軸に (3)

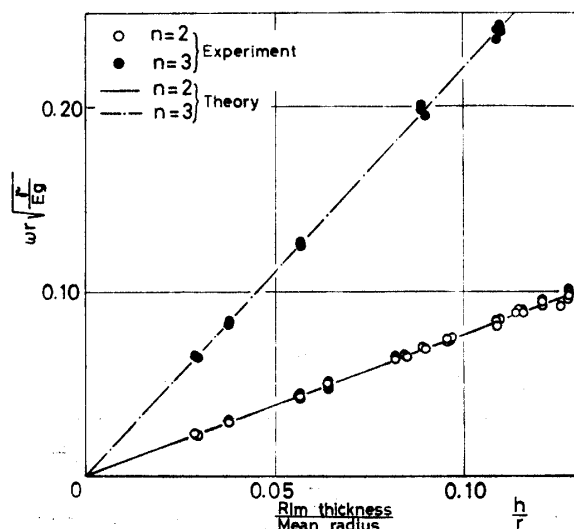


Fig. 5 Comparison of theory and experiment.

式の左辺に示された無次元固有振動数を取り、理論値と実験値を比較したものである。なお固有振動数の理論値を求めるにあたり、使用した円環の弾性係数及び比重量はそれぞれ $E=21000 \text{ kgf/mm}^2, \gamma=7.86 \times 10^{-6} \text{ kgf/mm}^3$ とした。Fig. 5 からモード 2 に関しては本実験で使用した最も厚肉な円環 ($h/r=0.128$) に対しても、またモード 3 に関しては $h/r=0.110$ でもせん断変形及び回転慣性を無視した (1) 式は、ほぼ実験値に一値すると言える。

4.2 2 方向荷重による固有振動数

2 方向荷重を段階的に増加させた場合の円環固有振動数は、自由状態における固有振動数より高くはなるが、その増加の割合は各円環によって異っている。これらの関係を実験した円環の数例について示すと Fig. 6 となる。図中 S-1, M-1, L-1 は薄肉でかつ円環幅の小さい円環であり、S-14, M-15, L-16 は厚肉で円環幅の大きい円環である。前者はいずれも荷重の増加による固有振動数の増加割合が大きく、例えば L-1 の円環では自由状態の固有振動数が 180 Hz であるのに対し、21.8 kgf の荷重を掛けた場合では 390 Hz と 2 倍以上も固有振動数が高くなっている。しかし後者の円環では、引張荷重を増加させてもほとんど固有振動数の増加は見られない。他の 40 個の円環についても同様な傾向が見られた。これらの傾向は個々の円環のこわさの違いによるものと推定される。

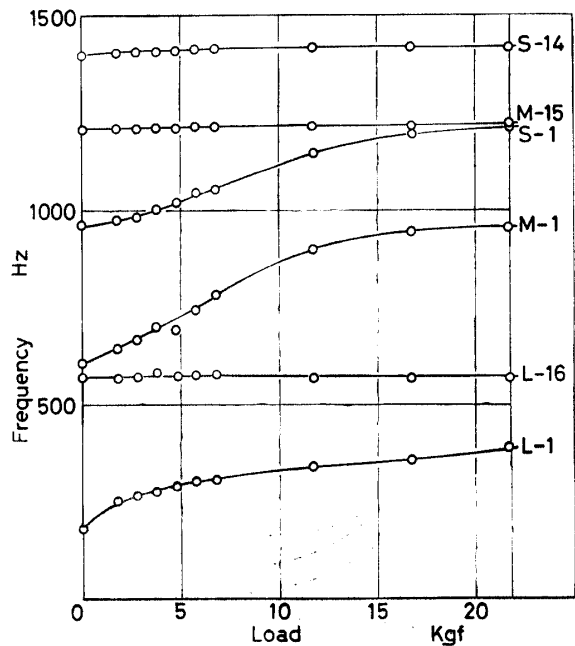


Fig. 6 Natural frequency in radial two direction load sets (for $n=2$).

引張荷重を掛けると固有振動数は増加する。これを(4)式に示すように、(1)式の自由振動の振動モードによって決定される定数 K_0 が、引張荷重の増加によって増加すると考え、その増加分を ΔK とし、 K_0 と ΔK の和である K の値を用いて荷重を掛けた場合の固有振動数を表すこととした。

$$K = K_0 + \Delta K \quad (4)$$

これより実験から求めた固有振動数による K の値と荷重の大きさの関係を、円環のこわさ k をパラメータとして Fig. 7 に示したところ、こわさの小さい円環ほど K の値の増加割合が大きいことが明らかになった。なお円環のこわさ k は、作用線が円環の中心を通る2方向荷重を受ける円環の作用線方向のたわみと荷重の関係を表した(5)式⁷⁾より求めた。

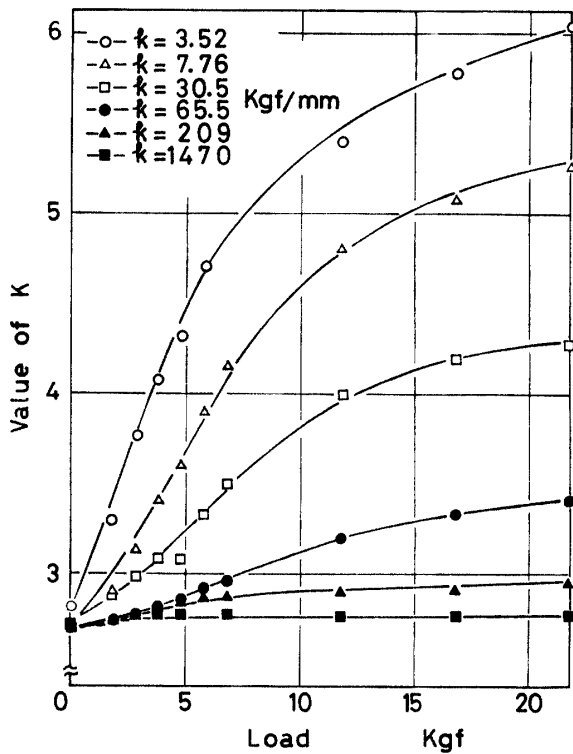


Fig. 7 Value of K in radial two direction load sets (for $n=2$).

$$\delta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \frac{r^3 P}{EI} \quad (5)$$

- ただし δ : 作用線方向のたわみ
- P : 荷重
- r : 平均半径
- E : 弾性係数
- I : 断面二次モーメント

Fig. 7 より K の値は荷重の大きさと円環のこわさ k に関係することがわかる。そこで実際に掛けた荷重

P を(6)式に示した単位荷重 P_0 (円環の半径方向に単位長さたわますに要する荷重) で除すことにより、荷重の無次元化を図った。

$$P_0 = \frac{EI}{(\pi/4 - 2/\pi)r^3} \quad (6)$$

この無次元荷重 P/P_0 と K の値の関係を Fig. 8 に示す。Fig. 8 より荷重による K の値の増加量 ΔK と無次元荷重 P/P_0 との関係は、 P/P_0 が大きくなると測定値のばらつきも大きくなるが、ほぼ平方根に比例していると考察される。したがって K と P/P_0 の関係を実験式として(7)式に示した。

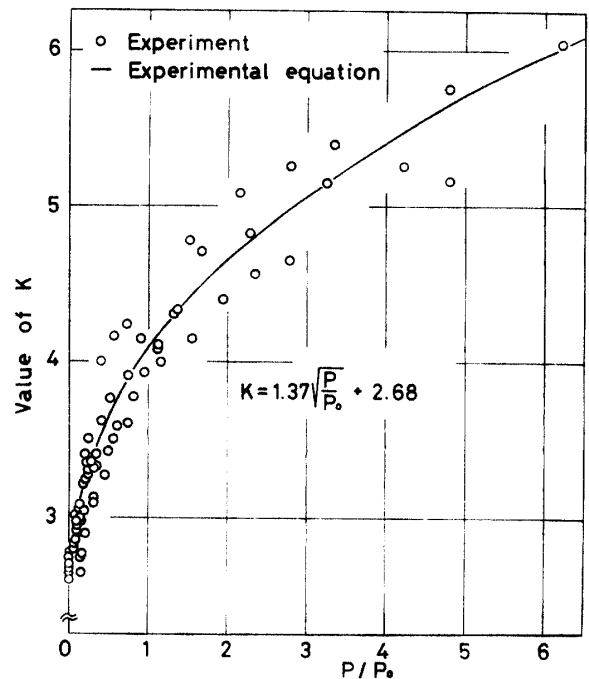


Fig. 8 Experimental equation for value of K (for $n=2$).

$$K = K_0 + \Delta K = 2.68 + 1.37 \sqrt{\frac{P}{P_0}} \quad (7)$$

これより2方向の引張荷重を受ける円環のモード2による面内固有振動数は(8)式で表される。

$$\omega = \left(2.68 + 1.37 \sqrt{\frac{P}{P_0}} \right) \sqrt{\frac{EgI}{rAr^4}} \quad (8)$$

Den Hartog による両端固定半円弧の固有振動数⁸⁾は、半径の等しい円環の固有振動数に対して1.63倍になることを示しているが、2方向荷重を受ける円環の固有振動数は Fig. 8 に見られるように、荷重の大きさによっては両端固定の半円弧の固有振動数よりも高くなることが明らかになった。

4.3 3方向荷重による固有振動数

同一円環においては3方向荷重に対する円環のこわさは、2方向荷重に対するこわさに比べ10倍程度大きくなる。したがってこの程度の荷重を掛けても固有振動数の増加は顕著には現れなかった。具体的にはL型円環16個のうち11個については、最大荷重 21.8 kgf における固有振動数の増加は1%以内で、他の5個の円環については数%の増加が見られたにすぎなかった。加振器の負荷容量の制限から引張荷重を大きくとることができなかつたので、本実験に使用した円環試料程度では3方向荷重の実験式を導くことができなかった。

5. 結 言

半径方向の引張荷重を受ける円環の固有振動数を実験的に求めた結果、次のことが明らかになった。

- (1) 振動モードによって決まる定数 K_0 の値に、拘束条件である引張荷重の影響を単位荷重に対する

実際の荷重の比 P/P_0 の関数として加算することにより、任意の半径方向の引張荷重を受ける任意形状の円環の面内固有振動数を表示することができた。

- (2) 2方向の引張荷重を受ける円環のモード2における面内固有振動数を求める実験式を導いた。

参 考 文 献

- 1) 遠藤, 谷口: 日本機械学会論文集, **34**, 268 (1968)
- 2) B.S. Seidel and E.A. Erderyi: Trans. ASME, Ser. B, **86**, 3 (1964)
- 3) S.S. Rao and V. Sundararajan: Trans. ASME, Ser. E, **36**, 3 (1969)
- 4) 五十嵐: 日本機械学会論文集, 25, 158 (1959)
- 5) 日高, 寺内, 石岡: 日本機械学会論文集, **42**, 356 (1976)
- 6) 渡辺, 谷下訳: チモシェンコ工業振動学, 東京図書 (1977) p. 390
- 7) 湯浅: 材料力学, 上, コロナ社 (1969) p. 213
- 8) 日本機械学会: 機械工学便覧, 改訂4版 (1960) 3編 p. 54 (昭和54年4月16日 受理)