

# 交通流モデルに関する基礎的研究 (第1報)

——一次元圧縮性流体への analogy による交通流のモデル化について——

田村 洋一\*・最上 幸夫\*

Studies on the Traffic Flow Model (1st Report)

Yōichi TAMURA and Sachio MOGAMI

## Abstract

In this paper, the authors built up the mathematical models of the traffic flow according to the method that analogizes the traffic flow to the one-dimensional compressible fluid. And we observed the traffic flow and recognized that our models were in good agreement with the observed results.

More details are described in the following articles.

## 1. 緒言

交通工学において、円滑かつ安全な交通の流れを実現することのできる道路の幾何構造の設計および適切な交通の規制、制御のあり方を検討するためには、交通流のもつ性質を明らかにし、また交通流に影響を与える要因とその影響を定量的に評価することが必要であるが、そのための基礎理論として開発されてきた理論として交通流理論がある。

交通流理論は大きく2つに分類が可能であり、まず第1として交通密度が低く、交通流を構成する各車がそれぞれ他の車の影響を受けずに比較的自由度の高い状態で走行している場合の理論で、この場合の代表的なモデルとしては、確率論的考察による待行列理論によるモデルがある。第2としては、交通密度が高くて各車相互間の自由度が低く、先行車の運動が後続車の運動を決定してしまうような場合の理論であり、この場合には、決定論的考察による追従理論によるモデル、あるいは波動理論によるモデルが代表的なものである<sup>1)</sup>。

交通流理論の道路幾何構造設計への適用を考えるにあたっては、そのモデルの中で道路条件の影響が評価される必要があるが、以上のモデルのうち確率論的モデルおよび追従理論によるモデルについては、道路条

件をモデル中に組み込むには無理がある。このようなことから本研究では、比較的道路条件をモデルの中に組み込める可能性が高いと考えられる流体力学的モデルに注目して<sup>2)</sup>、まず第1段階として交通流を一次元圧縮性流体にアナロジーすることにより、交通流の速度、密度、交通量についての相関関係を表現し得るモデルを作成することができたので、その結果について以下報告する。

## 2. 交通流のモデル化

### 2.1 交通流と流体との類似性

交通流のモデルを一次元圧縮性流体にアナロジーするにあたり、両者の類似性についてまとめておくと、Table 1 のようになる<sup>3)</sup>。

### 2.2 モデルの基礎方程式

道路上で交通流の進行方向に  $x$  軸をとり、微小区間  $[x, x+dx]$  について連続の式および運動方程式をたてる。以下もちいるおもな記号は次のとおりである。

$q(x, t)$ : 断面  $x$ , 時刻  $t$  における交通量,

$k(x, t)$ : 断面  $x$ , 時刻  $t$  における単位幅員当りの交通密度,

$u(x, t)$ : 断面  $x$ , 時刻  $t$  における速度,

$p(x, t)$ : 断面  $x$ , 時刻  $t$  における単位幅員当りに作用する圧力,

\* 土木科工学

Table 1 Similarity between the Traffic Flow and Fluid

Fluid	Traffic Flow
one-dimensional compressible fluid	one-way traffic flow
unit: molecule	unit: vehicle
distance, mass, time	distance, number of the cars, time
density: $\rho$ velocity: $u$ momentum: $\rho u$	traffic density: $k$ speed: $u$ traffic volume: $q$

$w(x)$  : 断面  $x$  における幅員.

上記諸量のうち圧力  $p$  の導入については, このよ  
うな力の交通工学的意味は目下のところあいまいである  
が, これは交通流を流体にアナロジーするために必要  
となったものである.

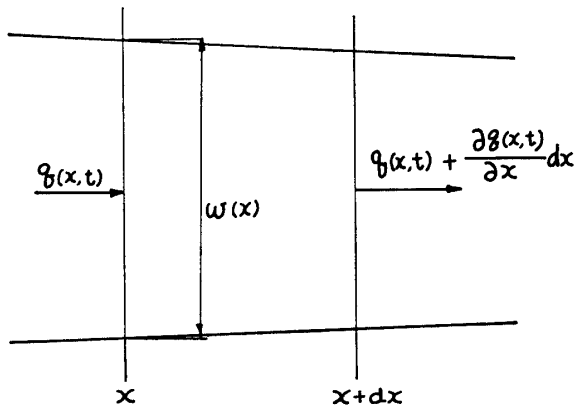


Fig. 1 Flow in the very small section

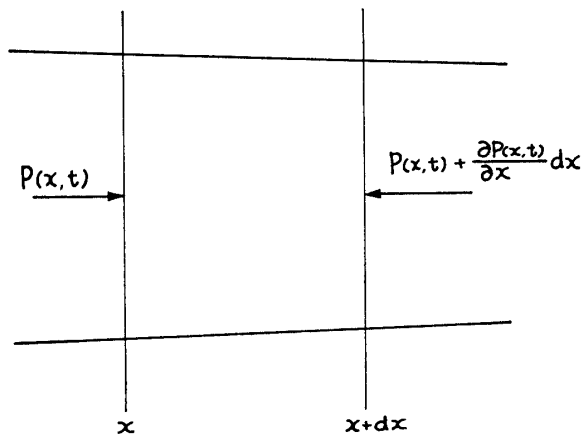


Fig. 2 Conditions of the supposed pressures acting on the very small section

まず連続の式について考えれば, 微小区間での流入  
量と流出量の差が, 微小区間内の貯留量の増加に等し  
いとして,

$$\frac{\partial k(x,t)w(x)}{\partial t} dx dt = q(x,t) dt - \left\{ q(x,t) + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} dx \right\} dt \quad (1)$$

これを整理して連続の式として式(2)が得られる.

$$\frac{\partial k(x,t)w(x)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

次の運動方程式について考えれば作用する力が圧力  
のみを仮定すれば,

$$k(x,t)w(x) dx \frac{Du(x,t)}{Dt} = p(x,t)w(x) - \left\{ p(x,t)w(x) + \frac{\partial p(x,t)w(x)}{\partial x} dx \right\} \quad (3)$$

ただし,

$$\frac{Du(x,t)}{Dt} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \quad (4)$$

これを整理して運動方程式として次式を得る.

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = - \frac{1}{k(x,t)w(x)} \cdot \frac{\partial p(x,t)w(x)}{\partial x} \quad (5)$$

また交通量  $q$ , 速度  $u$ , 密度  $k$  の間には次の関係があ  
る.

$$q(x,t) = k(x,t)w(x)u(x,t) \quad (6)$$

式(6)を式(2)に代入すると連続の式は次のよ  
うになる.

$$\frac{\partial k(x,t)w(x)}{\partial t} + \frac{\partial k(x,t)w(x)u(x,t)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

### 2.3 速度 $u$ と交通密度 $k$ の関係

これを知るために, 一車線のみ注目して車線幅員  
に変化がない場合について考えて解を得ることを考え

る。

$$k(x, t) \equiv k$$

$$u(x, t) \equiv u$$

$$w(x) \equiv \text{const.}$$

と表わせば、式(5)、式(7)は次のようになる。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(ku)}{\partial x} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

ここで圧力  $p$  を密度  $k$  の関数と仮定して次の関数形を仮定すれば、

$$p(x, t) = a\{k(x, t)\}^n \quad (10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (11)$$

となり、式(11)を式(9)に代入して次式を得る。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{k} \frac{dp}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

さらに速度  $u$  を密度  $k$  の関数と仮定して次のようにおくと、

$$u = f(k) \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dk} \frac{\partial k}{\partial t} \quad (14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dk} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (15)$$

となり、これを用いて式(8)、式(12)を変形整理すると、

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \left(k \frac{du}{dk} + u\right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{du}{dk} \frac{\partial k}{\partial t} + \left(u \frac{du}{dk} + \frac{1}{k} \frac{dp}{dk}\right) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

となり、これらの共通解は上式の係数行列式を0とおいて求められる。

そこで係数行列式は

$$\begin{vmatrix} 1 & k \frac{du}{dk} + u \\ \frac{du}{dk} & u \frac{du}{dk} + \frac{1}{k} \frac{dp}{dk} \end{vmatrix} = \frac{1}{k} \frac{dp}{dk} - k \left(\frac{du}{dk}\right)^2 \quad (18)$$

となり、これを0とおいて解くと、

$$\frac{du}{dk} = \pm \frac{1}{k} \sqrt{\frac{dp}{dk}} \quad (19)$$

を得る。ここで、速度  $u$  は密度  $k$  の増加にもなって減少することを考えれば、 $du/dk < 0$  であるから、

$$\therefore \frac{du}{dk} = -\frac{1}{k} \sqrt{\frac{dp}{dk}} \quad (20)$$

式(10)より

$$\frac{dp}{dk} = ankn^{n-1} \quad (21)$$

であるから、これを式(20)に代入して解くと、 $n \neq 1$  のとき境界条件  $k = k_j$  (jam density) のとき  $u = 0$  のもとで解くと、式(22)を得る。

$$u = \frac{2\sqrt{an}}{n-1} k_j^{\frac{n-1}{2}} \left\{ 1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^{\frac{n-1}{2}} \right\} \quad (22)$$

$n = 1$  の場合についても、同一の境界条件のもとで解いて式(23)を得る。

$$u = \sqrt{a} \ln k_j \left( 1 - \frac{\ln k}{\ln k_j} \right) \quad (23)$$

さらに式(22)において、 $k = 0$  で  $u = u_f$  (自由速度) になるとすれば、

$$u_f = \frac{2\sqrt{an}}{n-1} k_j^{\frac{n-1}{2}} \quad (24)$$

また(23)では  $k = 0$  とすれば、 $u$  は無限大となり不合理であるか、 $k = 1$  で  $u = u'_f$  となるとすれば、

$$u'_f = \sqrt{a} \ln k_j \quad (25)$$

となる。以上のことから、 $u-k, q-k, q-v$  の関係式として以下の式が導かれる。

$n \neq 1$  の場合、

$$u = u_f \left\{ 1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^N \right\} \quad (26)$$

$$q = u_f k \left\{ 1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^N \right\} \quad (27)$$

$$q = k_j u \left( 1 - \frac{u}{u_f} \right)^{\frac{1}{N}} \quad (28)$$

$$\text{ただし、} N = \frac{n-1}{2} \quad (29)$$

$n = 1$  の場合、

$$u = u'_f \left( 1 - \frac{\ln k}{\ln k_j} \right) \quad (30)$$

$$q = u'_f k \left( 1 - \frac{\ln k}{\ln k_j} \right) \quad (31)$$

$$q = u e^{(1 - \frac{u'}{u_f}) \ln k_j} \quad (32)$$

2.4 最大交通量  $q_{max}$  を与える臨界速度と  $u_c$  臨界密度  $k_c$

最大交通量は  $dq/dk=0$  となるような  $k_c$  で実現される。これを求めたのが次式である。

$n \neq 1$  の場合,

$$q_{max} = \frac{N}{(N+1)^{\frac{N+1}{N}}} k_j u_f \tag{33}$$

$$u_c = \frac{N}{N+1} u_f \tag{34}$$

$$k_c = \frac{k_j}{(N+1)^{\frac{1}{N}}} \tag{35}$$

$n=1$  の場合,

$$q_{max} = \frac{u'_f k_j}{e \ln k_j} \tag{36}$$

$$u_c = \frac{u'_f}{\ln k_j} \tag{37}$$

$$k_c = \frac{k_j}{e} \tag{38}$$

3. 現実の交通流への適用例

3.1 交通流調査の概要

調査の概要について述べると、調査は宇部市流川付近の国道190号線で行ない、道路上に30mの測定区間を設置し、5分間交通量を測定すると同時に、ストップウォッチを用いて人手により測定区間の通過時間を測定し、これによって得られたデータより交通密度を算出し、また5分間交通量のデータより、一時間交通量の推定を行なった。

調査地点の上流、下流側に信号交差点があるが、上流側交差点より調査地点までの距離は各車十分に加速し得る長さがあり、交通流はほぼ定常流となっている。また下流交差点での渋滞列が長くなり調査地点の交通流に影響を与える場合には測定を行わず、交差点の影響がデータの中に入らないよう努力した。

3.2 モデルの適用

$p = a\{k(x, t)\}^n$  と仮定したモデルを Model (I)、 $p = ak(x, t)$  と仮定したモデルを Model (II) として、計算結果と調査結果を比較した図を次に示す。

自由速度、飽和密度 (jam density)、 $n$  の推定値は、Model (I) の場合、 $u_f = 95.9\text{km/h}$ 、 $k_j = 123.9\text{台/km}$ 、 $n = 1.665$  となり、この値を用いて  $k_c = 52.3\text{台/km}$ 、 $u_c = 23.9\text{km/h}$ 、 $q_{max} = 1250\text{台/h}$  を得た。また Model

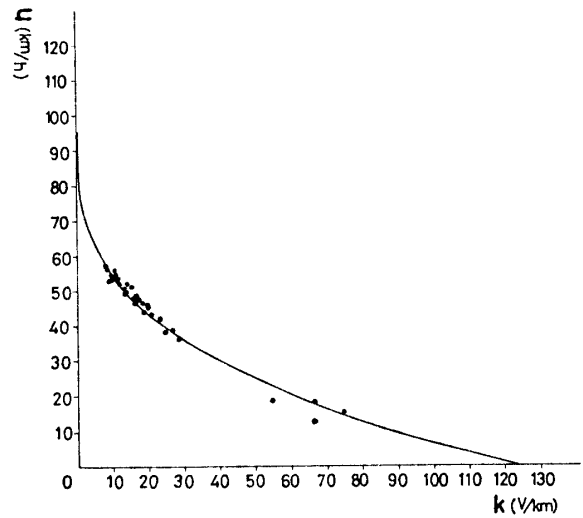


Fig. 3 Comparison of observed and calculated under the Model (I)  $u-k$  relationships

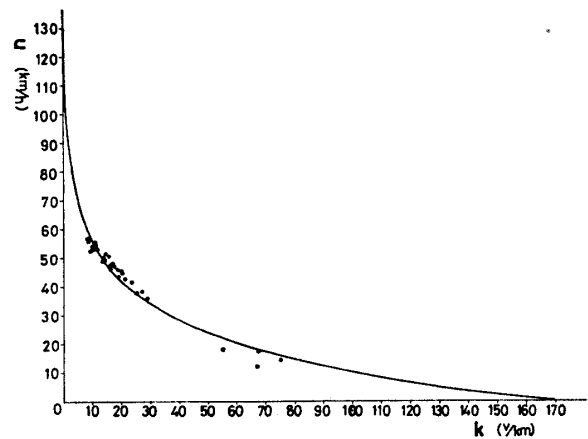


Fig. 4 Comparison of observed and calculated under the Model (II)  $u-k$  relationships

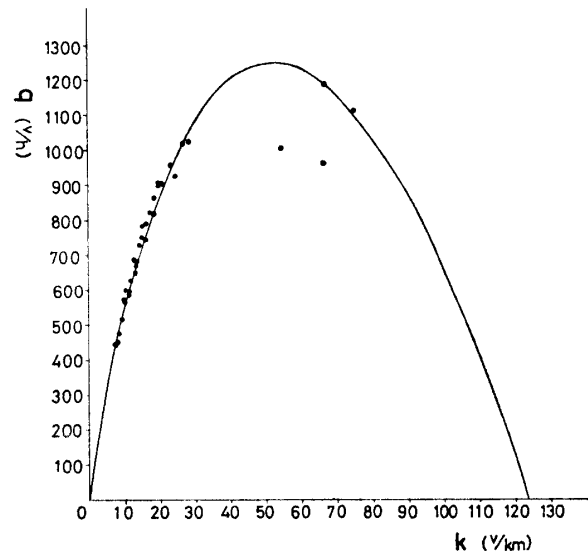


Fig. 5 Comparison of observed and calculated under the Model (I)  $q-k$  relationships

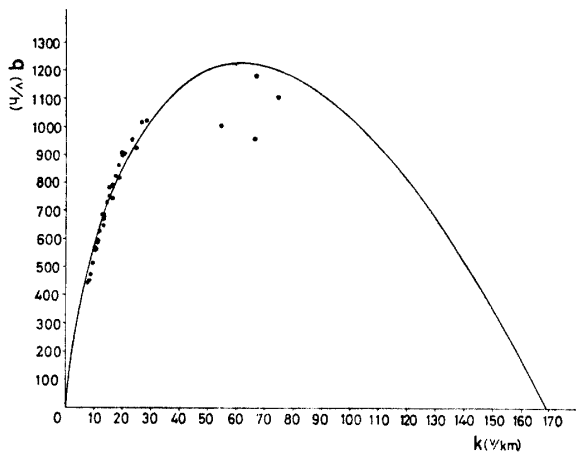


Fig. 6 Comparison of observed and calculated under the Model (II)  $q-k$  relationships

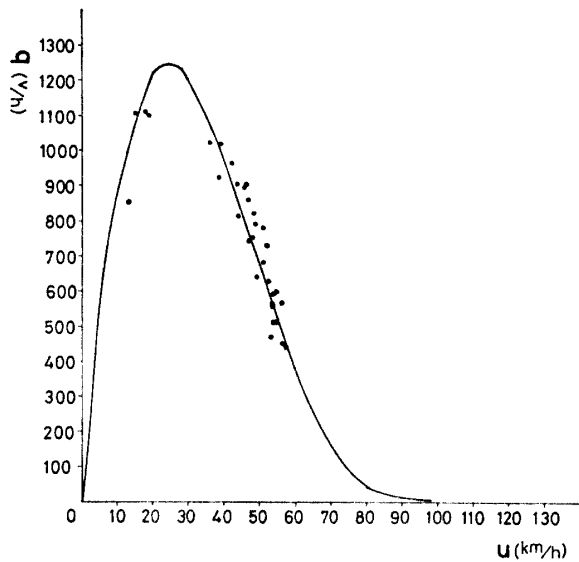


Fig. 7 Comparison of observed and calculated under the Model (I)  $q-u$  relationships

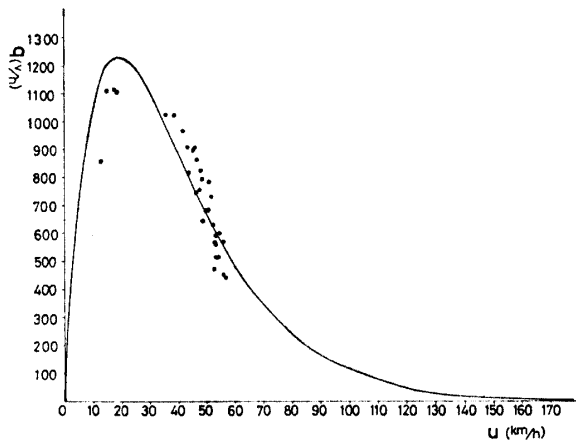


Fig. 8 Comparison of observed and calculated under the Model (II)  $q-u$  relationships

(II) の場合には,  $u_f=101.2\text{ km/h}$ ,  $k_f=169.1\text{ 台/km}$  となり,  $k_c=62.2\text{ 台/km}$ ,  $u_c=19.7\text{ km/h}$ ,  $q_{\text{max}}=1227\text{ 台/h}$  を得た. 両モデルとも現象とかなり良い一致をみているが,  $n \neq 1$  としたモデルの方がより適合性が良いようである.  $n=1$  としたモデルでは,  $k=0$  とした場合, 自由速度が無限大となる不合理もあることから, 交通流モデルとしては  $n \neq 1$  のモデルを用いるものが合理的であると思われる.

また両モデルとも高密度のところ, 適合度が悪くなっているが, これは高密度でのデータ不足に起因するものであり, より多くのデータを収集して, 係数を修正する必要があるようである.

本モデルでは, 速度を密度の関数と仮定しているが, この仮定が成立するのは, 密度がある程度以上になった場合であり, モデル適用の範囲を明確にする必要があるが, これに関しては現実のデータでチェックを行なうには至っていない. しかし, 車頭時間が7~8秒で前車と後車の速度差がほとんどなくなるという報告があり<sup>4)</sup>, これによると, モデルの適用範囲は交通量が500台/h以上の範囲であると推察される.

#### 4. 結 言

本研究では交通流を一次元圧縮性流体にアナロジーすることにより, 速度, 交通量を密度の関数として表わすモデルを導き, 現実の交通流との比較検討を行なったのであるが, 現象とかなり良い一致をみた. しかし現在のモデルは初歩的段階にとどまっております, 実用可能なモデルに至るには残された課題も多い.

重要な課題を列挙すると,

- (1) 圧力  $p$  の交通工学的意味を明確にすること.
- (2)  $u_f, k_f$  は最小自乗法によらず独立して求められる可能性のあること.
- (3) 幅員変化の評価.
- (4) モデル適用範囲を明確にすること.
- (5) 交通密度の高い部分のデータ不足.

などであるが, これらの課題については目下研究を続行中であり, その結果については第2報として報告する予定である.

おわりに, 本研究における交通調査および数値計算は本学昭和50年度卒論生 岡田篤和, 樺島 弘の両氏に負うところが大きかった. ここに記して謝辞としたい.

参 考 文 献

- 1) 佐佐木綱：交通流理論，技術書院 (1970)
- 2) 明神 証：Y型合流部の交通流モデル，交通工学，Vol. 10 No. 2 (1975) pp. 3~10
- 3) 交通工学研究会：交通工学ハンドブック，枝報堂 (1973) pp. 156.
- 4) 前掲 3)，pp. 128.

(昭和 51 年 4 月 14 日 受理)